Interrogation Écrite - Analyse de Fourier MATH256
Durée : 13h30 – 14h00
Points totaux : 20

Nota Bene : *Les documents, ordinateurs, téléphones portables, montres connectées et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.*

1. (6 points) Dire en justifiant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et donner un contre-exemple si l'assertion est fausse :
   (a) Si $t_1, \cdots, t_n$ sont des réels, alors le module $|e^{it_1} + \cdots + e^{it_n}|$ de $e^{it_1} + \cdots + e^{it_n}$ est égal n.
   (b) Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si la suite $(e^{u_n})_{n\geq 1}$ converge.
   (c) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
2. Soit $n \geq 2$ un entier.
   (a) (3 points) En passant par la forme exponentielle résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $$z^n = 1 \tag{E}$$
   Combien cette équation a-t-elle de solutions distinctes ?
   (b) (3 points) On pose $w = e^{2\pi i/n} \neq 1$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} w^k$.
3. Calculer la limite des suites suivantes si elle existe :
   (a) (3 points)
   $$u_n := \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n/2}$$
   ♠ *Remarque : on pourra admettre la limite de $(1 + 1/n)^n$ lorsque $n \to \infty$.*
   (b) (5 points)
   $$u_n := \int_2^{e^n} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x\ln(x)(\ln(x)+2)}.$$
   ♠ *Indication : procéder un changement de variable, puis calculer la décomposition*
   $$\frac{2}{t(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2}$$
   en déterminant la valeur de A et B. En déduire la limite de l'intégrale.