Interrogation Écrite - Analyse de Fourier MATH256
Durée : 10h30 – 11h00
Points totaux : 20

Nota Bene : *Les documents, ordinateurs, téléphones portables, montres connectées et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.*
Le barème est indicatif.

1. (6 points) Dire en justifiant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et donner un contre-exemple si l'assertion est fausse :

   (a) Soit $\sum f_{\mathrm{n}}$ une série de fonctions définies sur $[0, \infty[$. S'il existe un $\mathrm{n}_0 > 0$ tel que f_{n_0} n'est pas bornée sur $[0, \infty[$, alors la série ne peut pas converger normalement.

   ♠ *Remarque : une fonction est non-bornée sur* $[0, \infty[$ *si pour tout* $M > 0$*, il existe un* $x_0 \geq 0$ *tel que* $|f(x_0)| > M$.

   (b) Soit $\sum a_{\mathrm{n}} z^{\mathrm{n}}$ une série entière sur $\mathbb{C}$ avec $a_{\mathrm{n}} = 3^{1-\mathrm{n}}$ pour n pair et $a_{\mathrm{n}} = 3^{\mathrm{n}+1}$ pour n impair. Alors le rayon de convergence pour cette série est 3.

2. Soit la suite de fonctions $u_{\mathrm{n}}(x) = \mathrm{n}^{\alpha} \cos(x) \sin(x)^{\mathrm{n}+1}$ définie sur I=$[0, \pi/2]$ avec $\alpha > 0$.

   (a) (3 points) Montrer que $u_{\mathrm{n}}(x)$ converge simplement sur I.

   (b) (4 points) Comparer les limites $\int_0^{\pi/2} \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} u_{\mathrm{n}}(x)dx$ et $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \int_0^{\pi/2} u_{\mathrm{n}}(x)dx$. Que peut-on en conclure sur la convergence uniforme, selon la valeur de α ?

3. On veut calculer le développement en série entière sur $\mathbb{C}$ pour la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

   et déterminer le rayon de convergence pour sa série entière.

   (a) (2 points) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donner le développement en série entière pour la fonction $1/(a - z)$ ainsi de son rayon de convergence.

   (b) (2 points) Trouver dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme $z^2 - 5z + 6$ et factoriser le polynôme.

   (c) (3 points) Développer la fonction $f(z)$ en série entière et conclure son rayon de convergence.

   ♠ *Indication : décomposer la fonction en deux fractions du type* $1/(a - z)$.