Nom : **Groupe TP :**

Interrogation - 30 minutes - Calculatrice non programmable autorisée
Aucun document autorisé
Toutes les probabilités seront données sous forme décimale.

Exercice 1

A, B, C, D, E et F sont des évènements d'un même espace probabilisé.
Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes les unes des autres.

1. $\mathbb{P}(A) = 0,2$, $\mathbb{P}(B) = 0,5$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,6$.
   Calculer $\mathbb{P}(B|A)$.

2. $\mathbb{P}(C) = 0,5$, $\mathbb{P}(C|D) = 0,5$ et $\mathbb{P}(D|C) = 0,4$.
   Calculer $\mathbb{P}(D)$.

3. $\mathbb{P}(E) = 0,4$, $\mathbb{P}(\overline{F}|E) = 0,7$ et $\mathbb{P}(F|\overline{E}) = 0,3$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E \cap \overline{F})$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(E \cap F)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(F)$.

Solution d'Exercice 1.1. On note d'abord $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (voir **Propriété 4.1** du *Poly*). Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2 + 0,5 - 0,6 = 0,1.$$

Par définition de probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

△

Solution d'Exercice 1.2. D'après la définition de probabilité conditionnelle, on peut calculer

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C) = 0,4 \times 0,5 = 0,2.$$

En utilisant la probabilité conditionnelle de C sachant D, on a

$$\mathbb{P}(D) = \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(C|D)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

△

Solution d'Exercice 1.3. (a) On utilise la définition de la probabilité conditionnelle pour calculer

$$\mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = \mathbb{P}(\overline{F}|E)\mathbb{P}(E) = 0,7 \times 0,4 = 0,28.$$

△

(b) On a

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = 0,4 - 0,28 = 0,12.$$

△

(c) Comme $\Omega = \overline{E} \cup E$ est une décomposition de l'univers Ω en évènements incompatibles, on peut appliquer la formule des probabilités totales (voir **Théorème 1.2** du *Poly*) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F|\overline{E})\mathbb{P}(\overline{E}) \\ &= \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(F|\overline{E})\big(1 - \mathbb{P}(E)\big) \\ &= 0,12 + 0,3 \times 0,6 \\ &= 0,3.\end{aligned}$$

$\triangle$

Exercice 2

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et qui est tel que :

- $\mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 0,15$;
- Obtenir 2 en lançant le dé est trois fois plus probable qu'obtenir 1.

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(\{1\})$ et $\mathbb{P}(\{2\})$.
   (b) Soient
   $$I = \text{« obtenir un nombre impair à un lancé »}$$
   et
   $$P = \text{« obtenir un nombre pair à un lancé »}.$$
   Calculer la probabilité $\mathbb{P}(I)$ et $\mathbb{P}(P)$.
2. On lance deux fois de suite ce dé et on marque des points de la façon suivante :
   - Si on obtient deux nombres impairs, on marque 0 point ;
   - Si on obtient un nombre impair au premier lancé puis un nombre pair au second, on marque 2 points ;
   - Si on obtient un nombre pair au premier lancé puis un nombre impair au second, on marque 3 points ;
   - Si on obtient deux nombres pairs, on marque 5 points.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

   (a) En utilisant les questions précédentes, justifier que $\mathbb{P}(X = 0) = 0,16$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Déterminer l'expression de la fonction de répartition de X.

Solution d'Exercice 2.1. On traduit d'abord la deuxième condition en langage probabiliste, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\{2\}) = 3\mathbb{P}(\{1\})$. Comme $\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{i\}) = 1$, on obtient

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = 1 - \mathbb{P}(\{3\}) - \mathbb{P}(\{4\}) - \mathbb{P}(\{5\}) - \mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 4 \times 0,15 = 0,4.$$

En résolvant le système linéaire

$$\begin{cases}\mathbb{P}(\{2\}) = 3\mathbb{P}(\{1\}) \\ \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = 0,4\end{cases},$$

on a $\mathbb{P}(\{1\}) = 0,1$ et $\mathbb{P}(\{2\}) = 0,3$. $\triangle$

SOLUTION D'EXERCICE 2.2.
(a) On a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(I \times I) = \mathbb{P}(I) \times \mathbb{P}(I) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$ car les résultats des deux lancés sont indépendants. $\triangle$
(b) De la façon similaire, on a la probabilité pour le deuxième cas $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(I \times P) = 0,24$, pour le troisième cas $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(P \times I) = 0,24$, pour le quatrième cas $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(P \times P) = 0,36$. On en conclut alors la loi de X :

Valeur x_i	0	2	3	5
Probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$	0,16	0,24	0,24	0,36

$\triangle$

(c) On rappelle la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

On a alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 0,16 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0,4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,64 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x < +\infty \end{cases}.$$

$\triangle$