

Notes de Cours **Optique appliquée**

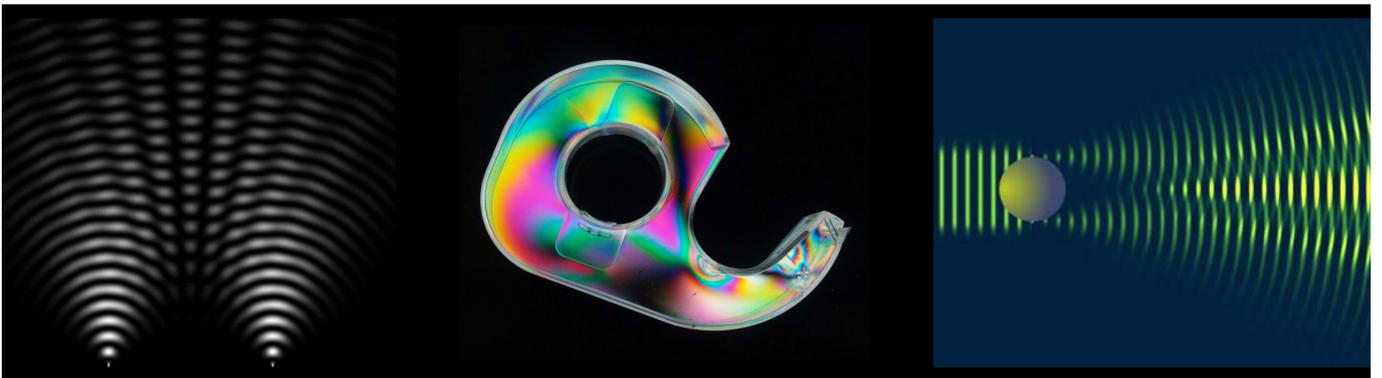


Table des matières

1	La nature ondulatoire de la lumière	5
1	Quelques rappels sur les ondes	5
1.1	Généralités	5
1.2	Ondes à une dimension	6
1.3	Ondes à trois dimensions	8
2	La lumière est une onde électromagnétique	10
2.1	Equations de Maxwell dans le vide	10
2.2	Structure d'une onde plane électromagnétique	10
2.3	Densité d'énergie et flux de puissance	11
3	Interférences	11
3.1	Notion de détecteur quadratique	11
3.2	Interférence entre deux ondes de même polarisation	12
3.3	Exemple 1 : interférence entre deux ondes planes	13
3.4	Exemple 2 : interférence entre deux ondes sphériques	14
3.5	Interférences à deux ondes : bilan	17
2	Notion de cohérence	19
1	Introduction	19
1.1	Superposition d'ondes de fréquences différentes	19
1.2	Généralisation : superposition d'ondes dont les phases dépendent du temps	20
2	Source ponctuelle quasimonochromatique	21
2.1	Première description du modèle	21
2.2	Interférences entre deux sources quasimonochromatiques indépendantes	22
2.3	Dispositif des trous d'Young	22
2.4	Bilan	23
3	Cohérence temporelle	24
3.1	Interférences en lumière polychromatique	24
3.2	Bilan : notion de temps de cohérence	26
4	Cohérence spatiale	26
4.1	Modèle de la source étendue incohérente	26
4.2	Expérience des trous d'Young avec une source étendue	26
4.3	Longueur de cohérence spatiale	28
5	Généralisation	29
5.1	Fonction de cohérence	29
5.2	Propriétés	29
5.3	Cohérence temporelle et spectre du champ	30
5.4	Cohérence spatiale et étendue de la source	31
6	Conclusion	31

3	Dispositifs interférométriques	33
1	Système stigmatique en optique ondulatoire	33
2	Classification des interféromètres	33
2.1	Interférences à deux ondes et à ondes multiples	33
2.2	Division de front d'onde et division d'amplitude	34
2.3	Localisation des franges d'interférence	36
3	Lame à faces parallèles	36
3.1	Présentation du dispositif	36
3.2	Réflexion et transmission à travers un dioptre	38
3.3	Nombre d'ondes impliquées	38
3.4	Calcul du déphasage	38
4	Lame à épaisseur variable	41
4.1	Présentation du dispositif	41
4.2	Franges d'égale épaisseur ou franges de Fizeau	42
4.3	Exemples et applications	44
5	Interféromètre de Michelson	44
5.1	Présentation du dispositif	44
5.2	Réglage en coin d'air	45
5.3	Réglage en lame d'air	46
5.4	Obtention de la teinte plate	46
5.5	Applications	47
6	Interféromètre de Fabry-Pérot	47
6.1	Présentation du dispositif	47
6.2	Calcul de la transmission	49
6.3	Caractéristiques spectrales	50
6.4	Applications	51
7	Conclusion	52
4	Polarisation de la lumière	54
1	Qu'est ce que la polarisation ?	54
1.1	Lumière polarisée rectilignement	54
1.2	Lumière polarisée elliptiquement	54
1.3	lumière polarisée circulairement	56
1.4	Modèle de lumière non polarisée	57
2	Mise en évidence expérimentale	58
2.1	Génération de lumière polarisée	58
2.2	Relation de Malus	60
2.3	Polarisation par diffusion	61
3	Milieux biréfringents	61
3.1	Origine de la réfringence	61
3.2	Origine de la biréfringence	64
3.3	Propriétés optiques des milieux biréfringents	65
3.4	Milieux biaxes et uniaxes	68
3.5	Lames d'onde	68
4	Biréfringence circulaire	70
4.1	Nature de la biréfringence circulaire	70
4.2	Pouvoir rotatoire	72
4.3	Applications	73

5	Diffraction de la lumière	74
1	Principe de Huygens-Fresnel	74
1.1	Introduction	74
1.2	Phénomène de diffraction	74
1.3	Enoncé du principe de Huygens-Fresnel	74
1.4	Intégrale de Kirchhoff	75
2	Approximation de Fresnel et de Fraunhofer	75
2.1	Approximation de Fresnel	75
2.2	Approximation de Fraunhofer et lien avec la transformée de Fourier	75
3	Quelques exemples	76
3.1	Fente rectangulaire	76
3.2	Dispositif des trous d'Young	76
3.3	Réseau de diffraction	76
3.4	Diffraction par une ouverture circulaire	76
4	Diffraction en présence d'une optique stigmatique	76
4.1	Propriétés d'une optique stigmatique	76
4.2	Réalisation expérimentale de la diffraction de Fraunhofer	76
4.3	Plan de Fourier d'une optique - Filtrage spatial	76
6	Application aux instruments d'optique	77
1	Quelques rappels d'optique géométrique	77
2	Résolution d'un instrument	77
3	Réponse impulsionnelle et fréquentielle	77
4	Optiques diffractives	78
4.1	Réseau de diffraction	78
4.2	Lentilles de Fresnel	78
5	Fabrication et caractérisation des optiques	78
5.1	Etat de surface	78
5.2	Caractérisation d'une optique	78
5.3	Principe d'un antireflet	78
5.4	Réseau de Bragg et miroirs multicouches	78
6	Aberrations, mesures et corrections actives	78
6.1	Polynômes de Zernicke	78
6.2	Senseur de front d'onde	78
6.3	Optique adaptative	78
A	Origine du principe de Huygens-Fresnel	79
1	Introduction	79
2	Notion de champ proche	79
3	Retrouvons le principe de Huygens-Fresnel	81
B	Les coefficients de Fresnel	82
1	Généralités	82
1.1	Dioptre	82
1.2	Lois de Snell-Descartes	82
1.3	Polarisation	83
2	Coefficients de Fresnel	83
2.1	Expression générale	83
2.2	Expression en incidence normale	84
3	Conséquences	84
3.1	Déphasage à la réflexion	84
3.2	Angle de Brewster	84

4	Interface diélectrique-métal	85
C	Rappels mathématiques	86
1	Calcul complexe	86
2	Formules trigonométriques	86
3	Transformées de Fourier	87
	3.1 Définition	87
	3.2 Propriétés usuelles	87
	3.3 Transformées de Fourier de fonctions usuelles	88
4	Propriétés de la fonction de Dirac	89
5	Transformée de Fourier de la fonction "cercle"	90
6	Produit de convolution	90
	6.1 Définition	90
	6.2 Lien avec la transformée de Fourier	90
7	Algèbre vectorielle	91
	7.1 Produits vectoriel et mixte	91
	7.2 Opérateurs différentiels :	91
	7.3 Coordonnées cartésiennes :	91
	7.4 Coordonnées cylindriques :	92
	7.5 Coordonnées sphériques :	93

Chapitre 1

La nature ondulatoire de la lumière

La nature ondulatoire de la lumière ne fut définitivement établie qu'au début du XIX^{ème} siècle avec la mise en évidence des phénomènes de diffraction et surtout d'interférences (Young). Les physiciens savaient donc à quelle grande classe de phénomène la lumière se rattachait. Ils avaient établi les équations régissant sa propagation avant toutefois d'en comprendre la nature. C'est une onde certes, mais une onde de quoi ? Nous savons depuis la fin du XIX^{ème} siècle que la lumière est une onde électromagnétique. L'interaction électromagnétique de la lumière avec les particules chargées constitue le cadre permettant d'expliquer la plupart des phénomènes optiques connus (la réfraction par exemple). Après avoir rappelé quelques généralités sur les ondes, nous nous intéresserons à la structure électromagnétique de la lumière. Ceci nous permettra de dégager deux caractéristiques importantes et originales de ce type d'onde :

1. La lumière est une onde transverse. Ceci se manifeste à travers la propriété de polarisation que nous aborderons au chapitre 4.
2. La puissance transportée par une onde électromagnétique est proportionnelle au carré du champ. Cette caractéristique commune aux ondes est cependant exacerbée dans le cas des ondes optiques. Les détecteurs optiques sont en effet tous sensibles aux grandeurs énergétiques. De plus, leur temps de réponse est très long par rapport à la période de l'onde optique. Le phénomène extrêmement important d'interférence (que nous aborderons ici), ainsi que les conditions pour les obtenir (chapitre 2) sont intimement liés à cette limitation.

1 Quelques rappels sur les ondes

1.1 Généralités

En mécanique, les ondes recouvrent une vaste classe de phénomènes impliquant un transport dans l'espace d'information et d'énergie sans transport de matière. Elles impliquent au moins deux "réservoirs" d'énergie couplés entre eux, à la manière des oscillateurs harmoniques. Ce couplage conduit, lorsque le système est localement perturbé, à une oscillation du système entre ces deux réservoirs et, spatialement à une propagation de proche en proche de la perturbation.

Oscillateurs harmoniques couplés

Un exemple nous permettra de nous forger une intuition du phénomène et de poser un certain nombre de définitions. Intéressons-nous à un oscillateur harmonique classique : un ressort de masse négligeable, de raideur k , dont les extrémités sont accrochées à un support fixe d'un côté et à une masse m ponctuelle de l'autre. L'ensemble est astreint à se déplacer sans frottement suivant la direction horizontale (Ox). L'équation différentielle du mouvement ne fait intervenir que l'inertie du système et la force de rappel du ressort sur la masse. $\mathbf{F} = -k(x(t) - x_0)\mathbf{e}_x = m\mathbf{a}$. On peut relier ces deux termes à deux "réservoirs" d'énergie : l'énergie cinétique de la masse et l'énergie potentielle élastique du ressort. La somme de ces deux énergies est une constante (l'énergie mécanique). L'équation générale du mouvement de la masse est une sinusoïde ($x(t) =$

$A_0 \cos(\omega t + \phi) + x_0$) dont la pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ ne dépend pas des conditions initiales. La vitesse de la masse s'obtient en dérivant la position par rapport au temps : ($v(t) = -\omega A_0 \sin(\omega t + \phi)$). Les énergies mécaniques et cinétiques évoluent également de manière sinusoïdales, mais de telle sorte que la somme des deux reste constante. L'énergie mécanique totale est ainsi $E_m = 1/2 m \omega^2 (A_0)^2 \sin^2(\omega t + \phi) + 1/2 k (A_0)^2 \cos^2(\omega t + \phi) = k(A_0)^2$. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement A_0 .

Considérons maintenant une chaîne de N oscillateurs harmoniques de ce type, identiques (même masse m , même raideur k), et couplés entre eux de la manière décrite sur la figure 1. Si nous écartons l'une des masses de sa position d'équilibre puis la lâchons sans vitesse initiale, la masse va se mettre à osciller autour de sa position initiale. De plus, elle mettra en mouvement ses voisines puis, de proche en proche, l'ensemble des masses.

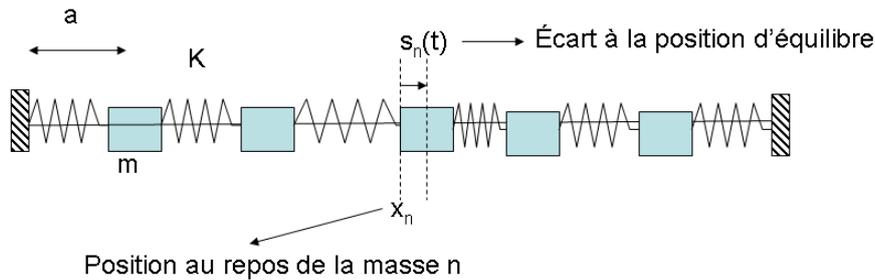


FIGURE 1.1 – Ensemble de n oscillateurs harmoniques couplés

Pour décrire l'évolution du système, nous devons nous intéresser au mouvement de chacune des masses. La position de la masse numéro n par rapport à sa position au repos est par exemple notée $s_n(t)$. Sa position au repos est notée $x_n = na$. Nous pouvons donc aussi étiqueter les positions instantanées de chaque masse par sa position initiale dans l'espace : $s_n(t) = s(x_n, t)$. Nous introduisons ainsi un **champ s** de perturbation des positions des masses. Par ailleurs, pour décrire complètement le système, nous devons nous intéresser au comportement des masses situées aux extrémités de la chaîne. Dans l'exemple de la figure 1.1 nous les supposons remplacées par des murs immobiles. Mathématiquement ceci se traduit par $s(0, t) = 0$ et $s(L = (N + 1)a, t) = 0$ quel que soit t . Nous avons ainsi défini les **conditions aux limites du problème**. L'étude du mouvement de ces N masses fait intervenir un système d'équations différentielles couplées obtenues à partir des lois de Newton. Lorsque l'on fait tendre la distance a et les masses m vers zéro afin de modéliser un système "continu", on montre que le système d'équation tend en tout point vers une équation aux dérivées partielles appelée *équation de d'Alembert*.

1.2 Ondes à une dimension

Un champ S décrit un phénomène ondulatoire lorsque celui-ci vérifie l'équation de d'Alembert.

Equation de d'Alembert à une dimension (loin des sources)

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

Le paramètre c est appelé **célérité de l'onde** ou vitesse de propagation de l'onde.

Quelques exemples :

- Les ondes mécaniques dans un solide (transverses et longitudinales),
- Les ondes acoustiques dans un gaz,
- Les ondes de gravité voire de capillarité à l'interface entre deux liquides (houle, ondes à la surface d'une mare...).

L'équation de d'Alembert est **linéaire** : La combinaison linéaire de deux solutions de cette équation est aussi une solution. On peut approcher la solution exacte à un problème complexe de propagation en décomposant l'onde solution en une somme d'ondes plus simples dont on connaît les propriétés. Cette idée est sous-jacente à tous les développements que nous mènerons en optique.

On peut par ailleurs montrer que les solutions générales de l'équation de d'Alembert à une dimension sont de la forme suivante :

$$S(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{1.2}$$

ou encore, de manière équivalente,

$$S(x, t) = F(t - x/c) + G(t + x/c) \tag{1.3}$$

Chacune des fonctions f et g (F ou G) correspond à une structure d'onde aux propriétés remarquables. Les solutions de type f (ou F) correspondent à des formes arbitraires se propageant sans se déformer, de la gauche vers la droite, à la vitesse c (voir Figure 2). Il en va de même pour les solutions de type g (ou G) mais de la droite vers la gauche. On les qualifie de solutions de type **onde progressive**.

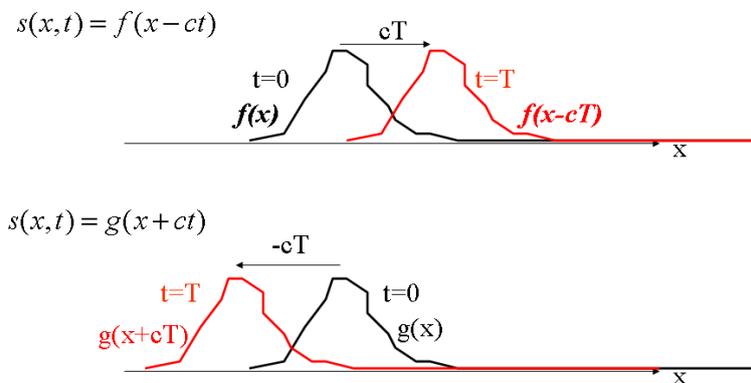


FIGURE 1.2 – Exemple d'onde progressive

Ondes sinusoïdales

Un type de solution très important est l'onde progressive sinusoïdale de pulsation ω :

$$S(x, t) = A_0 \cos(\omega(t \pm x/c) - \phi) \tag{1.4}$$

En tout point x de l'espace, le champ évolue temporellement de manière sinusoïdale avec une pulsation ω , une fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$, une période $T = 1/\nu$. De même, à un instant t fixé, le champ a une forme spatiale sinusoïdale dont la "pulsation spatiale" est $k = \omega/c$. La "période spatiale", aussi appelée **longueur d'onde** est donnée par $\lambda = 2\pi/k = c/\nu = cT$.

Un autre type de solution extrêmement important est obtenu en combinant deux ondes sinusoïdales progressives de même amplitude et même pulsation allant dans des sens opposés :

$$S(x, t) = A_0 \cos(\omega(t - x/c)) + A_0 \cos(\omega(t + x/c)) \tag{1.5}$$

En utilisant la relation $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2\cos(a)\cos(b)$, on obtient la structure dite d'**onde stationnaire**.

$$S(x, t) = 2A_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \tag{1.6}$$

En mécanique, ce type d'onde se rencontre dans les cordes vibrantes, les tuyaux d'orgue...à chaque fois que l'on impose des conditions aux limites à l'onde. N'importe quelle solution de l'équation de d'Alembert peut être exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de type sinusoïdale progressive OU stationnaire.

Notation complexe

Finalement, pour traiter de manière aisée les ondes sinusoïdales progressives, nous pouvons introduire $\underline{S}(x, t)$, la représentation complexe du champ $S(x, t)$:

$$\underline{S}(x, t) = A_0 \exp(-i(\omega t \pm kx - \phi)) \quad (1.7)$$

$$S(x, t) = \text{Re}(\underline{S}(x, t)) \quad (1.8)$$

Le terme $\underline{A} = A_0 \exp(i(\pm kx + \phi))$ est appelé *Amplitude complexe du champ*. Son argument est appelé **phase de l'onde**.

1.3 Ondes à trois dimensions

Les résultats précédents se généralisent à trois dimensions.

Equation de d'Alembert à trois dimensions (loin des sources)

Le champ de l'onde est maintenant défini dans les trois dimensions de l'espace et est noté $S(\mathbf{r}, t) = S(x, y, z, t)$.

$$\frac{\partial^2 S(r, t)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 S(r, t)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 S(r, t)}{\partial^2 z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

équation que l'on note aussi, en faisant apparaître le Laplacien :

$$\nabla^2 S(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

Comme précédemment nous pouvons nous intéresser aux solutions dont la structure temporelle est sinusoïdale. En optique on qualifie ces ondes de **monochromatiques**. A partir de maintenant, nous travaillerons, sauf exception, directement avec des amplitudes complexes.

Deux solutions monochromatiques jouent un rôle essentiel en optique. Comme nous le verrons, elles posent des problèmes physiques (énergie ou densité d'énergie infinie). Mais elles permettent de modéliser à grands traits beaucoup de situations que l'on rencontre en pratique. Par ailleurs, elles peuvent servir de base de solutions pour construire des solutions plus réalistes physiquement.

L'onde plane progressive

L'onde plane progressive est une généralisation à trois dimensions de l'onde sinusoïdale progressive rencontrée dans la section précédente.

$$\underline{S}(r, t) = A_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)) \quad (1.11)$$

La phase de l'onde dépend de la position au travers d'un produit scalaire entre le vecteur position r (position du point où l'on observe le champ) et un vecteur \mathbf{k} appelé **vecteur d'onde**. Que peut-on dire de ce vecteur ? $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$. Son module au carré est alors $|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Par ailleurs le produit scalaire $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Si l'on injecte la forme de l'onde plane dans l'équation de d'Alembert à trois dimensions, on montre que :

$$|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.12)$$

ou encore $|k| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Pour déterminer la structure spatiale de cette onde, nous allons chercher les surfaces qui, à un instant donné, ont la même phase. Ces surfaces sont appelées en optique des **fronts d'onde**. Ces surfaces sont celles pour lesquelles $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = cste$. Il s'agit de plans perpendiculaires à la direction du vecteur \mathbf{k} (voir Figure 1.8). La direction du vecteur \mathbf{k} est la **direction de propagation de l'onde plane**.

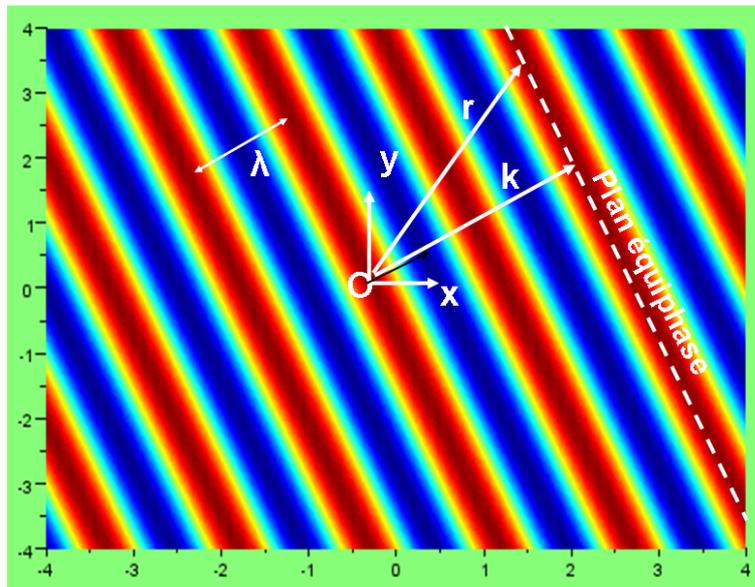


FIGURE 1.3 – Structure d'une onde plane progressive

L'onde sphérique

Le champ d'une onde sphérique centrée sur l'origine des coordonnées est de la forme suivante :

$$\underline{S}(r, t) = \frac{A_0}{r} \exp(i(\pm kr - \omega t + \phi)) \tag{1.13}$$

où $k = |k|$ et $r = |r|$. Les fronts d'onde, ou surfaces équiphasés, sont un ensemble de points situés à la même distance r de l'origine. Il s'agit bien entendu de sphères centrées sur l'origine. Le signe intervenant dans l'exponentielle complexe détermine le sens de propagation des ondes. Un signe positif correspond à des fronts d'ondes qui "divergent" de O, tandis qu'un signe négatif correspond à des fronts d'onde sphériques qui "convergent" vers O lorsque t augmente.

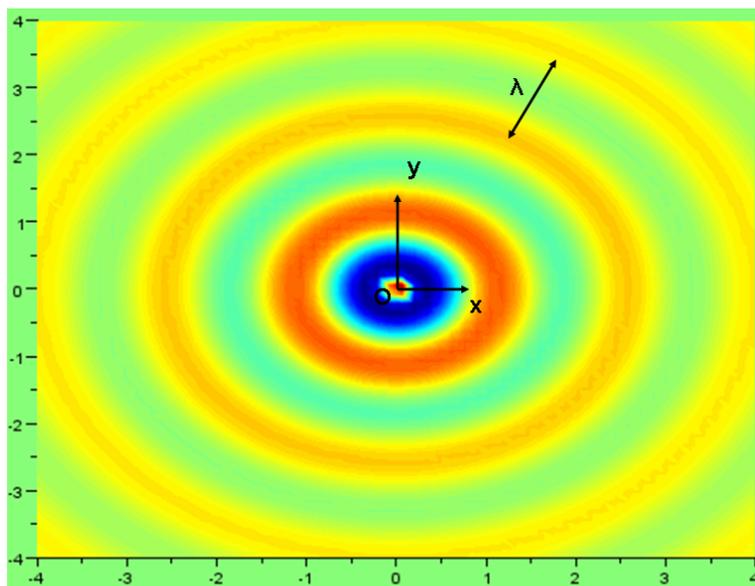


FIGURE 1.4 – Structure d'une onde sphérique

2 La lumière est une onde électromagnétique

2.1 Equations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell décrivent l'évolution couplée des champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} en présence de charges ρ et de courants \mathbf{j} . Dans le vide (et loin de ces charges et courants), $\rho = 0$ et $\mathbf{j} = 0$. Les équations de Maxwell prennent alors la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.15)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.17)$$

Combinons les deux dernières équations entre elles :

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

En utilisant le fait que $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, et la première équation de Maxwell, on obtient une équation de d'Alembert :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.19)$$

Remarquons qu'il s'agit en réalité d'un système de trois équations de d'Alembert identiques, une pour chaque composante du champ électrique. Par ailleurs, on obtient un système rigoureusement identique pour les composantes du champ magnétique. Nous venons de montrer que des ondes de champ électromagnétique sont autorisées par les lois de l'électromagnétisme. La célérité de ces ondes est donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.20)$$

La valeur de c n'est autre que la vitesse de la lumière. Historiquement, des mesures de la célérité de la lumière avaient déjà été obtenues avant les travaux de Maxwell. Le fait que les ondes électromagnétiques déduites de ces équations aient une célérité qui concordent avec la vitesse de la lumière fut un premier argument fort pour suggérer que la lumière EST une onde électromagnétique. Bien d'autres travaux expérimentaux renforceront cette idée. En particulier, la structure des ondes électromagnétiques rend compte d'une propriété originale de la lumière : la polarisation.

2.2 Structure d'une onde plane électromagnétique

Forts de notre expérience sur les ondes à trois dimensions, considérons une onde plane monochromatique de champ électrique. Sans que cela ne change rien à la généralité de notre propos, nous pouvons supposer que le vecteur d'onde \mathbf{k} est dirigé suivant (Ox). Commençons par désamorcer une difficulté inhérente à ce type d'onde. Le champ électrique est un vecteur. Or les ondes que nous avons jusqu'à présent envisagés étaient des scalaires. Généralisons la notion d'onde plane à un champ vectoriel :

$$E_x = E_{x0} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_x)) \quad (1.21)$$

$$E_y = E_{y0} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_y)) \quad (1.22)$$

$$E_z = E_{z0} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_z)) \quad (1.23)$$

Les lois de l'électromagnétisme imposent cependant de fortes contraintes sur la direction du champ.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \Rightarrow k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E} & \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dans le vide, la polarisation du champ électrique est perpendiculaire au vecteur d'onde. Puisque le champ magnétique obéit à un jeu similaire d'équations et que sa divergence est nulle, **on arrive à la même conclusion pour le champ magnétique.** On montre par un procédé analogue (voir le cours d'électromagnétisme) que les deux dernières équations de Maxwell permettent d'établir les relations suivantes :

$$-i \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (1.25)$$

$$-i \mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = i\omega/c^2 \mathbf{E} \quad (1.26)$$

On en déduit que les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires entre eux et qu'ils sont en phase. En résumé, pour une onde plane monochromatique se propageant dans le vide,

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \quad (1.27)$$

La Figure 1.5 ci-dessous donne la structure d'une onde plane dans le cas où le champ électrique est orienté suivant (Oy) et le vecteur d'onde suivant (Ox).

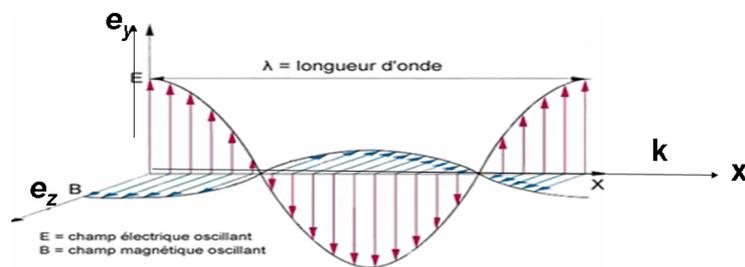


FIGURE 1.5 – Structure d'une onde électromagnétique plane monochromatique

2.3 Densité d'énergie et flux de puissance

Il faut de l'énergie pour lancer la propagation d'une onde. Inversement, une onde transporte de l'énergie. En électromagnétisme, on montre que le champ électromagnétique a, en un point, une densité d'énergie w :

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (1.28)$$

Ceci donne pour une onde plane :

$$w = \epsilon_0 E_0^2 \quad (1.29)$$

Cette énergie associée aux ondes électromagnétiques peut être mise en évidence dans la vie de tous les jours : la lumière du soleil chauffe la Terre, est convertie en énergie chimique par les plantes (photosynthèse)... Il est toutefois souvent plus commode de s'intéresser au flux de puissance transporté par l'onde électromagnétique. La puissance par unité de surface est donnée en électromagnétisme par le vecteur de Poynting π .

$$\pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (1.30)$$

Pour une onde plane dans le vide, il est aisé de montrer que ce vecteur est dirigé suivant le vecteur d'onde. **Dans le vide, la direction de propagation de l'énergie et de l'onde sont les mêmes.**

3 Interférences

3.1 Notion de détecteur quadratique

Dans le cas du vecteur de Poynting, comme dans le cas de la densité d'énergie, on constate que ces grandeurs sont en dernier ressort proportionnelles au carré du champ électrique ou magnétique. En optique, les

détecteurs dont nous disposons (y compris nos yeux !) sont sensibles aux grandeurs énergétiques et non aux grandeurs associées au champ. **Nos détecteurs optiques sont donc sensibles au carré du champ, on dit qu'ils sont quadratiques.** Ces détecteurs sont très lents par rapport à la période optique. Donnons-en un ordre de grandeur : si $\lambda=600$ nm et comme $c = 310^8 m.s^{-1}$ donc $T = 2 \times 10^{-15}$ s. La période optique est de l'ordre de la femtoseconde. Le temps de réponse T des détecteurs est, quant à lui, de l'ordre de la nanoseconde (picoseconde au mieux).

Un modèle simple mais assez général de détecteur quadratique suppose que le signal délivré par le détecteur est proportionnel à la moyenne du vecteur de Poynting sur un temps long T par rapport à la période optique $2\pi/\omega$. Cette moyenne sera appelée dans la suite du cours I intensité (ou éclairement) lumineuse. Mathématiquement ceci se traduit par l'expression suivante :

$$I(t) \propto \frac{1}{T} \int_{-T}^0 E^2(t' - t) dt' = \langle E^2(t) \rangle \quad (1.31)$$

Si le champ E est sinusoïdal, sa moyenne dans le temps est nulle. En revanche la moyenne de son carré ne l'est pas.

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2(E_0^2) \quad (1.32)$$

Ou encore en notation complexe :

$$\langle E^2 \rangle = 1/2 |\underline{E}|^2 \quad (1.33)$$

De manière analogue, on montre en électromagnétisme que la valeur moyenne du vecteur de Poynting pour des champs sinusoïdaux est donnée par :

$$\langle \pi \rangle = \frac{Re(\underline{E} \wedge \underline{B}^*)}{2\mu_0} \quad (1.34)$$

Soit pour une onde plane,

$$\langle \pi \rangle = 1/2 \epsilon_0 c |\underline{E}|^2 = c \langle w \rangle = I \quad (1.35)$$

En conclusion, le signal délivré par un détecteur optique sera proportionnel au module au carré de l'amplitude complexe du champ électrique.

L'intensité lumineuse est proportionnelle au module au carré de l'amplitude complexe du champ électrique :

$$I \propto \underline{E} \underline{E}^* \quad (1.36)$$

Afin de ne pas s'encombrer les facteurs de proportionnalité entre I et le carré du champ électrique, on associe à l'onde lumineuse une amplitude complexe S telle que :

$$I = S S^* \quad (1.37)$$

3.2 Interférence entre deux ondes de même polarisation

Le phénomène d'interférence en optique rend manifeste la nature quadratique des détecteurs. Considérons deux ondes électromagnétiques se propageant dans l'espace. Dans la suite, nous supposerons que ces ondes sont polarisées de la même manière (nous relâcherons cette contrainte dans le chapitre 4). Notons $S_1(r, t)$ et $S_2(r, t)$ les amplitudes complexes associées à leurs champs. Rappelons que ce sont des grandeurs proportionnelles aux champs électriques des ondes lumineuses. Plaçons un détecteur quadratique au point M de coordonnée \mathbf{r} . Le signal délivré sera proportionnel à l'intensité $I(r)$. Comment calculer ce dernier ?

Le champ total en M est $S(r, t) = S_1(r, t) + S_2(r, t)$. Le signal est alors proportionnel au module au carré de $S(r, t)$.

$$I(r) = |S(r, t)|^2 = S(r, t) S^*(r, t) = (S_1(r, t) + S_2(r, t))(S_1^*(r, t) + S_2^*(r, t)) \quad (1.38)$$

On développe et réorganise cette expression :

$$\begin{aligned}
I(r) &= S_1(r, t)S_1^*(r, t) + S_2(r, t)S_2^*(r, t) + S_1(r, t)S_2^*(r, t) + S_2(r, t)S_1^*(r, t) \\
&= |S_1(r, t)|^2 + |S_2(r, t)|^2 + S_1(r, t)S_2^*(r, t) + S_2(r, t)S_1^*(r, t)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Introduisons I_1 et I_2 , les intensités perçues par le détecteur si le champ 1 ou le champ 2 était seul. On obtient pour I :

$$\begin{aligned}
I(r) &= I_1(r) + I_2(r) + S_1(r, t)S_2^*(r, t) + S_2(r, t)S_1^*(r, t) \\
&\neq I_1(r) + I_2(r)
\end{aligned} \tag{1.40}$$

L'intensité résultant de la superposition des deux champs peut localement ne pas être égale à la somme des intensités produites par chacun des deux champs : c'est le phénomène d'interférence.

3.3 Exemple 1 : interférence entre deux ondes planes

Nous allons, sur deux exemples simples, poser le vocabulaire et les concepts de base des interférences que nous utiliserons tout au long de ce cours. Nous supposons dans la suite que nous avons affaire à des ondes monochromatiques de même pulsation et de même polarisation.

Interférence entre deux ondes planes

Considérons tout d'abord la superposition de deux ondes planes ayant des amplitudes et des directions de propagation différentes.

$$\begin{aligned}
S_1(r, t) &= s_1 \exp(i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_1)) = s_1 \exp(i(\psi_1(r) - \omega t)) \\
S_2(r, t) &= s_2 \exp(i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_2)) = s_2 \exp(i(\psi_2(r) - \omega t))
\end{aligned} \tag{1.41}$$

En utilisant la relation précédente :

$$\begin{aligned}
I(r) &= |S_1(r, t) + S_2(r, t)|^2 \\
&= s_1^2 + s_2^2 + s_1 s_2 [\exp(i(\psi_1(r) - \psi_2(r))) + \exp(-i(\psi_1(r) - \psi_2(r)))] \\
&= s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 \cos(\psi_1(r) - \psi_2(r)) \\
&= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\psi_1(r) - \psi_2(r))
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Le terme en cosinus est appelé terme d'interférences. La quantité $\psi_1(r) - \psi_2(r)$ est le déphasage entre les ondes 1 et 2.

Franges d'interférences

Le terme d'interférence et donc, l'intensité, dépendent de la position du point de mesure M.

- $I(r)$ est maximum lorsque le terme en cosinus du terme d'interférence vaut 1. Ceci correspond à $\psi_1(r) - \psi_2(r) = 2\pi p$. Il y a alors interférence constructive. Les points M(r) correspondant à un même déphasage forment une surface appelée frange brillante.
- $I(r)$ est minimum lorsque ce terme vaut -1. Ceci correspond à $\psi_1(r) - \psi_2(r) = 2\pi p + \pi$. Il y a alors interférence destructive. Les points M(r) correspondant à un même déphasage forment une surface appelée frange sombre.

Quelle est la forme des franges brillantes (ou sombres) lorsque les ondes interférentes sont des ondes planes ? Comme nous venons de l'écrire, les franges brillantes correspondent aux points pour lesquels :

$$\psi_1(r) - \psi_2(r) = 2\pi p = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2 \tag{1.43}$$

Ce sont les points pour lesquels $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} = \phi_2 - \phi_1 + 2\pi p = \text{const.}$ Ce sont les points d'un plan perpendiculaire à la bissectrice aux vecteurs \mathbf{k}_1 et $-\mathbf{k}_2$.

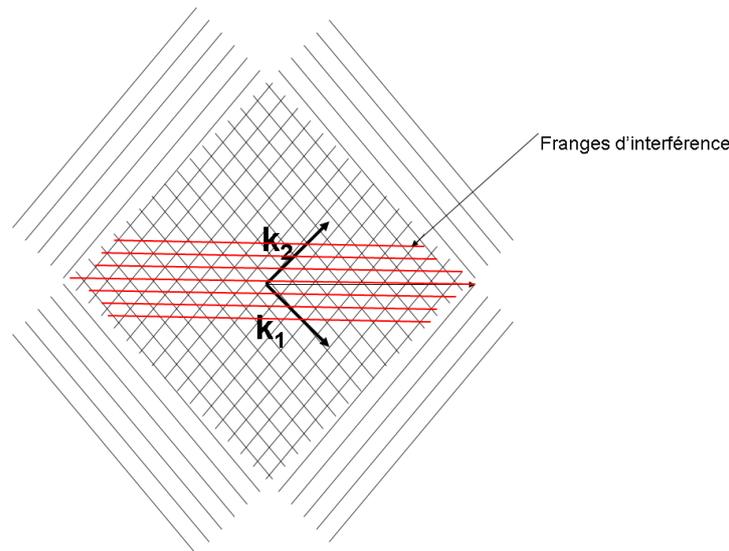


FIGURE 1.6 – Interférences entre deux ondes planes

Contraste des franges

La différence d'intensité entre les deux ondes joue un rôle important dans la visibilité des franges. Si $I_1 = 0$, il n'y a pas d'interférence (il n'y a qu'une seule onde !). Si par contre les ondes ont la même puissance, $I_1 = I_2 = I_0$, alors $I(r) = 2I_0(1 + \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2))$. Dans le cas d'une frange sombre, le terme d'interférence peut annuler totalement l'intensité.

On définit le contraste des franges à partir des intensités maximales et minimales (I_{max} et I_{min}) que peut prendre la figure d'interférence :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{1.44}$$

Dans le cas présent, on peut relier le contraste aux intensités des deux faisceaux :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \tag{1.45}$$

Le contraste chute lorsque I_1 et I_2 sont de plus en plus différents, il est maximum et vaut 1 lorsque $I_1 = I_2$.

3.4 Exemple 2 : interférence entre deux ondes sphériques

Forme des franges d'interférence

Nous allons aborder une autre situation simple mais tout aussi importante (nous pourrons très souvent nous y ramener). Considérons cette fois la superposition de deux ondes sphériques S_1 et S_2 . Les points d'émission de ces sources seront appelés O_1 et O_2 , M est le point où l'on place le détecteur quadratique. On note les distances $r_1 = O_1M$ et $r_2 = O_2M$. On rappelle que pour une onde sphérique $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

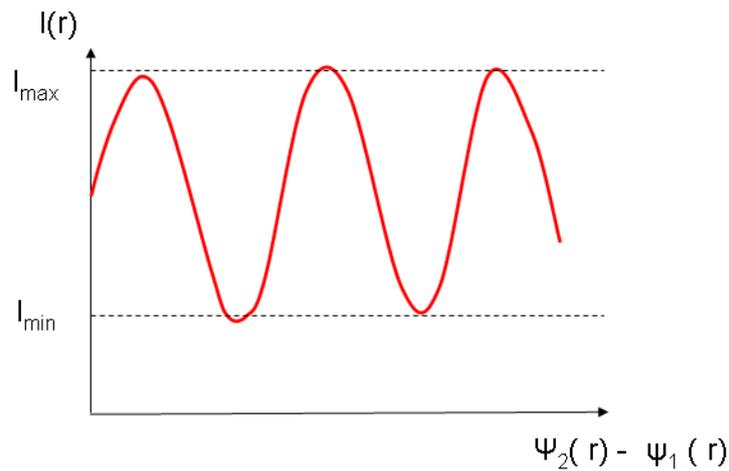


FIGURE 1.7 – Contraste des franges d’interférences

$$\begin{aligned}
 S_1(r, t) &= \frac{s_1}{r_1} \exp(i(kr_1 - \omega t + \phi_1)) \\
 &= \frac{s_1}{r_1} \exp(i(\psi_1(r) - \omega t)) \\
 S_2(r, t) &= \frac{s_2}{r_2} \exp(i(kr_2 - \omega t + \phi_2)) \\
 &= \frac{s_2}{r_2} \exp(i(\psi_2(r) - \omega t))
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

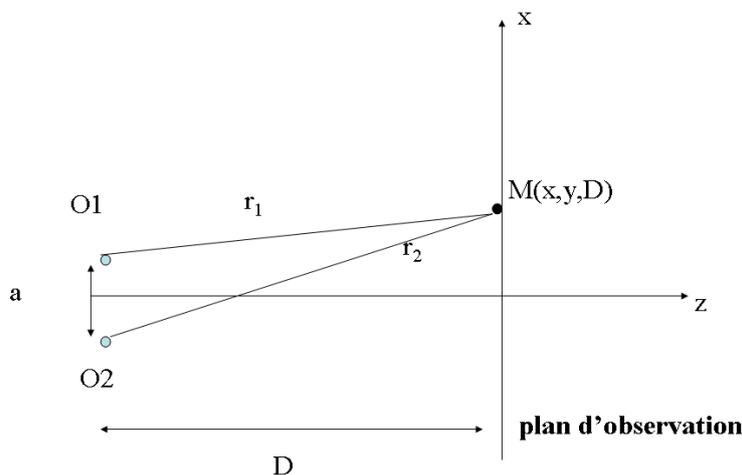


FIGURE 1.8 – Interférences entre deux sources d’ondes sphériques

Hypothèse simplificatrice mais très souvent valable : nous supposons que M est loin des sources O_1 et O_2 . De cette manière on peut supposer que $r_1 \sim r_2 \sim r_0$ dans les préfacteurs s_1/r_1 et s_2/r_2 . Par contre, on ne fera pas cette hypothèse dans les exponentielles complexes. Nous pouvons alors reprendre l’intégralité du calcul effectué dans la section précédente :

$$\begin{aligned}
I(r) &= |S_1(r, t) + S_2(r, t)|^2 \\
I(r) &= (s_1/r_0)^2 + (s_2/r_0)^2 + \frac{s_1 s_2^2}{r_0} (\exp(i(\psi_1(r) - \psi_2(r))) + \exp(-i(\psi_1(r) - \psi_2(r)))) \\
I(r) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\psi_1(r) - \psi_2(r))
\end{aligned} \tag{1.47}$$

La structure est la même que pour les ondes planes. Cette forme est similaire pour toutes les interférences à **deux ondes**. Explicitons l'expression contenue dans le cosinus afin de déterminer la forme des franges d'interférences :

$$\psi_1(r) - \psi_2(r) = k(r_1 - r_2) + \phi_1 - \phi_2 \tag{1.48}$$

La différence de phase entre les ondes en M dépend de la différence de distance $\delta = r_1 - r_2$. Cette différence est appelée **différence de marche**.

Avant d'aller plus loin, justifions notre approximation sur les distances r_1 et r_2 . Pourquoi faisons nous une différence de traitement entre les préfacteur et le terme en cosinus ? Supposons que $r_1 = 0.99m$ et $r_2 = 1.01m$. Ces deux distances diffèrent de 2 cm. Un développement limité au premier ordre montre que remplacer r_1 par la valeur moyenne $(r_1 + r_2)/2$ conduit à une différence de l'ordre du pourcent sur les préfacteurs. En revanche, dans le terme en cosinus, ce n'est pas la différence de distance qui intervient, mais cette différence multipliée par k . Si $r_2 - r_1 = 0.02$ m mais que $\lambda = 600$ nm, alors $k(r_1 - r_2) \sim 2\pi \times 33333$! En conclusion, nous avons le droit de faire des approximations sur les distances, mais dès l'instant où elles concernent le terme dans le cosinus, c'est à dire le déphasage, il faut être prudent et bien contrôler que l'erreur commise sur les distances est inférieure à la longueur d'onde λ .

Revenons à notre problème d'interférences. Les franges brillantes sont des surfaces pour lesquelles :

$$k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2) = 2\pi p \tag{1.49}$$

Ou encore,

$$r_1 - r_2 = -(\phi_1 - \phi_2) + 2\pi p / k \tag{1.50}$$

Or, les points de l'espace pour lesquels $r_1 - r_2 = \text{const}$ sont des hyperboloïdes de révolution dont les foyers sont O_1 et O_2 .

Si la distance de M aux points O_1 et O_2 est très grande, on peut simplifier l'expression de r_1 et r_2 . Supposons pour fixer les idées que les points soient placés de telle sorte que $O_1(a/2, 0, 0)$, $O_2(-a/2, 0, 0)$ et $M(x, y, D)$. Nous allons supposer que $D \gg a, x, y$. Nous pouvons exprimer explicitement les distances r_1 et r_2 puis les approcher par un développement limité à l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{D^2 + y^2 + (x - a/2)^2} \\
&\approx D + \frac{y^2 + x^2 + a^2/4 - ax}{2D} \\
r_2 &= \sqrt{D^2 + y^2 + (x + a/2)^2} \\
&\approx D + \frac{y^2 + x^2 + a^2/4 + ax}{2D}
\end{aligned} \tag{1.51}$$

La différence de marche prend alors la forme très simple :

$$\delta = r_1 - r_2 \approx -\frac{ax}{D}$$

Finalement, le signal délivré par le détecteur placé en M prend la forme :

$$I(r) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\delta + \phi_1 - \phi_2) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \phi_1 - \phi_2\right) \tag{1.52}$$

Les franges brillantes sont alors des plans tels que $\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \phi_1 - \phi_2 = 2\pi p$, c'est à dire :

$$x_p = (2\pi p + \phi_1 - \phi_2) \frac{\lambda D}{2\pi a} \quad (1.53)$$

La distance entre deux de ces franges brillantes est appelée **interfrange**. Elle s'obtient aisément en calculant $x_{p+1} - x_p$

$$x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda D}{a} \quad (1.54)$$

3.5 Interférences à deux ondes : bilan

Faisons le bilan des exemples 1 et 2.

— Lorsque DEUX ondes de même pulsation ω se superposent dans l'espace, l'intensité $I(M)$ en un point M n'est pas nécessairement la somme $I_1(M) + I_2(M)$ des intensités des ondes 1 et 2 seules. Elle est de la forme :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\psi_1(r) - \psi_2(r)) \quad (1.55)$$

— La quantité $\psi_1(r) - \psi_2(r)$ est appelée déphasage entre l'onde 2 et l'onde 1.

— Les franges brillantes sont les surfaces pour lesquelles $I(M)$ est maximum, c'est à dire pour lesquelles le déphasage est un multiple entier de 2π : $\psi_1(r) - \psi_2(r) = 2\pi p$.

— Les franges sombres sont les surfaces pour lesquelles $I(M)$ est minimum, c'est à dire pour lesquelles le déphasage vaut π modulo 2π : $\psi_1(r) - \psi_2(r) = 2\pi p + \pi$.

— Les franges sont contrastées lorsque l'écart des minima et maxima n'est pas négligeable devant l'intensité moyenne $I_1 + I_2$. Ceci est le cas si I_1 et I_2 sont proches.

— La forme des franges d'interférence est imposée par la manière dont le déphasage dépend de la position. Le déphasage peut se mettre sous la forme $\psi_1(r) - \psi_2(r) = \Delta\phi(r) + \phi_2 - \phi_1$, où ϕ_1 et ϕ_2 ne dépendent que des sources des ondes 1 et 2.

— On peut toujours ramener $\Delta\phi(r)$ sous une forme similaire à :

$$\Delta\phi(r) = \frac{\omega}{c_0} \delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{12} \quad (1.56)$$

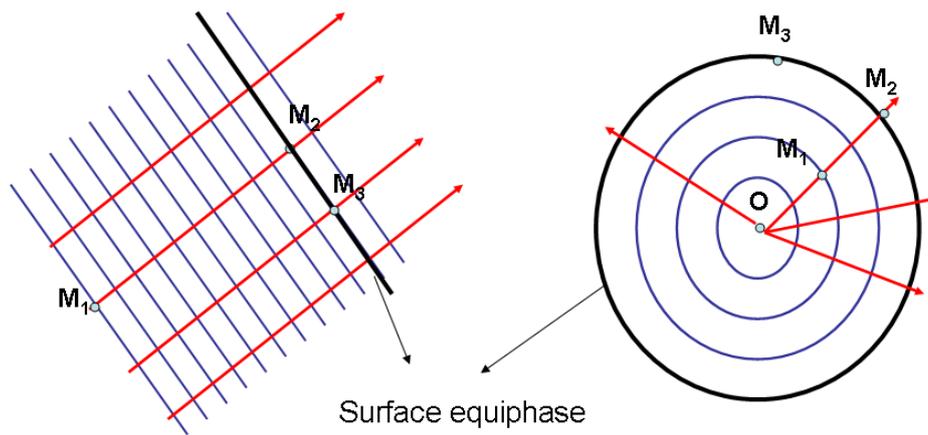
— δ_{12} est appelée **différence de marche** entre l'onde 2 et l'onde 1 en M . Elle est homogène à une longueur.

— De plus, $\tau_{12} = \delta_{12}/c_0$ est homogène à un temps. C'est le **retard** de l'onde 2 par rapport à l'onde 1.

La détermination de la différence de marche est donc la clé (et la seule difficulté !) pour traiter tout problème d'interférence. Dans le cas des ondes planes et sphériques cette différence de marche peut se calculer de manière directe comme dans les exemples 1 et 2. Une autre technique consiste à ramener le calcul de δ_{12} à une différence de chemin optique :

$$\delta_{12} = L_2 - L_1 \quad (1.57)$$

Le chemin optique est une notion provenant de l'optique géométrique. Il s'agit du temps de propagation d'un rayon multiplié par la vitesse de la lumière, ou encore $L_{AB} = nAB$. AB est la distance géométrique entre A et B , tandis que n est l'indice de réfraction dans le milieu où se trouvent A et B . Pour calculer la différence de marche à partir du chemin optique, on utilise les règles suivantes :



$$\phi_{21} = \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\omega}{c} M_1 M_2 = \frac{\omega}{c_0} (n M_1 M_2)$$

$$\phi_{31} = \phi_{21}$$

$$\phi_{21} = kr_2 - kr_1 = \frac{\omega}{c} M_1 M_2 = \frac{\omega}{c_0} (n M_1 M_2)$$

$$\phi_{31} = \phi_{21}$$

FIGURE 1.9 – Règles de calcul des déphasages pour les ondes planes et sphériques

- On associe à une onde plane une collection de rayons lumineux parallèles à la direction de propagation.
- On associe à une onde sphérique une collection de rayons lumineux partant (ou arrivant) au point source si l'onde est divergente (ou convergente).
- Le déphasage entre deux points A et B situés sur un même rayon est $2\pi/\lambda L_{AB}$.
- Deux points situés sur une même surface équiphase ont la même phase (par exemple M_2 et M_3).

En combinant ces règles et les grands principes de l'optique géométrique, il sera possible de venir à bout de la plupart des problèmes d'interférence. Quelques subtilités interviendront toutefois. La réflexion sur un dioptre ou un miroir, le passage par un point de focalisation peut introduire un déphasage supplémentaire. Enfin la structure de l'onde peut évoluer de manière plus complexe que dans le cas des ondes sphériques et planes. Ceci sera traité dans le cours sur la diffraction.

Chapitre 2

Notion de cohérence

1 Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons vu que le phénomène d'interférence en optique est directement lié au type de détecteur que l'on peut utiliser dans ce domaine de fréquence.

- Ce sont des détecteurs quadratiques, sensibles au carré du champ, c'est à dire, à des grandeurs énergétiques (densité d'énergie, flux de puissance, nombre de photons par seconde, etc...),
- ce sont des détecteurs très lents par rapport à la période optique. Le signal délivré est proportionnel à la moyenne sur un temps long (temps d'intégration) du carré du champ.

Nos yeux rentrent bien entendu dans cette catégorie et furent jusqu'à une période récente les seuls détecteurs dont nous disposions. Contrairement à ce que pourrait laisser penser le chapitre précédent, la mise en évidence du phénomène d'interférence n'est pas une chose aisée. Comme nous allons le voir, cette difficulté provient de la nature hautement complexe et chaotique des champs émis par la plupart des sources lumineuses réelles, bien plus complexes que les modèles d'ondes planes et sphériques que nous avons utilisés dans le chapitre précédent. La réalisation d'un dispositif expérimental d'interférométrie nécessite de savoir avec quel type de source on souhaitera travailler, afin de choisir la technique la plus adaptée (chapitre 3). On peut apprécier la difficulté à réaliser une expérience d'interférence avec une source en déterminant, expérimentalement ou théoriquement, son degré de **cohérence**.

Nous allons dans un premier temps établir des résultats et des modèles simples mais de portée très générale. Ils nous serviront de base pour comprendre les propriétés des dispositifs interférométriques du chapitre 3. Nous donnerons ensuite un aperçu du formalisme général de la cohérence et son lien avec les propriétés statistiques du champ lumineux.

1.1 Superposition d'ondes de fréquences différentes

Nous allons montrer que pour un détecteur ayant un temps de réponse très long, la superposition de deux ondes de fréquences différentes ne peut donner lieu à des interférences.

Supposons que deux ondes monochromatiques S_1 et S_2 se superposent en un point M où l'on place un détecteur quadratique de temps d'intégration T . Supposons de plus que ces ondes n'aient a priori pas la même pulsation : $\omega_1 \neq \omega_2$. Nous pouvons calculer l'intensité moyennée par le détecteur en calculant, 1) la somme des champs $S = S_1 + S_2$, 2) le carré de S et 3), sa valeur moyenne sur un temps long. **En notation réelle**, les champs de ces ondes sont :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= s_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ S_2(t) &= s_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Calculons le carré de la somme de ces champs :

$$\begin{aligned} S^2 &= (S_1(t) + S_2(t))^2 \\ &= s_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + s_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) \\ &\quad + 2s_1 s_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

En utilisant le fait que $\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, on obtient :

$$\begin{aligned} S^2 &= s_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + s_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) \\ &\quad + s_1 s_2 (\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Effectuons la moyenne de S^2 sur un temps T grand devant la période optique. Les termes en \cos^2 ont une moyenne égale à $1/2$. Le terme en $\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2)$ oscille très rapidement avec le temps, sa moyenne sera nulle. Quant au terme en $\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$, tout va dépendre de l'écart entre les pulsations $\omega_1 - \omega_2$.

$$\begin{aligned} I &= 1/2 s_1^2 + 1/2 s_2^2 + s_1 s_2 \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2) \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Si $\omega_1 - \omega_2 \gg 1/T$ alors $\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)$ est un terme oscillant rapidement. Sa moyenne est nulle et $I = I_1 + I_2$. **Il n'y a pas d'interférence.**
- Si $\omega_1 - \omega_2 = 0$ alors $\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2) = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ est indépendant du temps. Sa moyenne vaut $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ et $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$. **Il y a interférence.**
- Si $\omega_1 - \omega_2 \ll 1/T$ alors $\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)$ est un terme lentement variable. Sa moyenne vaut $\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)$ et I dépendra donc du temps. **On observe un phénomène de battement temporel.** Cette situation existe mais nécessite des détecteurs très rapides et des sources extrêmement monochromatiques, peu séparées spectralement. **Ce n'est pas un cas usuel.**

De manière générale, il n'y a pas d'interférence entre champs de fréquences différentes. Les intensités de champs de fréquences différentes s'additionnent.

1.2 Généralisation : superposition d'ondes dont les phases dépendent du temps

Nous pouvons pousser les conclusions de l'exemple précédent un peu plus loin. Supposons que les deux ondes qui se superposent aient la même fréquence mais que leurs phases initiales évoluent au cours du temps. Autrement dit : $\omega_1 = \omega_2$ mais $\phi_1 = \phi_1(t)$ et $\phi_2 = \phi_2(t)$. Le signal délivré par le détecteur est alors :

$$I = \langle S^2 \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \rangle \quad (2.5)$$

Nous retrouvons alors la même distinction que dans le paragraphe précédent.

- Si $\phi_1(t) - \phi_2(t) \gg 1/T$ alors la moyenne du cosinus est nulle et $I = I_1 + I_2$. **Il n'y a pas d'interférence.**
- Si $\phi_1(t) - \phi_2(t)$ évolue très lentement, alors $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t))$, la figure d'interférence évolue lentement au cours du temps.

- Si $\phi_1(t) - \phi_2(t)$ est égal à une constante $\Delta\phi$ alors la moyenne du cosinus est évidemment indépendante du temps. $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$. **Il y a interférence.** La figure d'interférence est stable au cours du temps.

Cette dernière condition implique que pour obtenir des interférences, il faut que la différence de phase soit constante. Ceci ne signifie pas nécessairement que ϕ_1 ET ϕ_2 soient constantes.

2 Source ponctuelle quasimonochromatique

Nous allons utiliser les résultats précédents pour comprendre dans quelles conditions on peut espérer obtenir des interférences avec des sources de lumière réelles. Nous commencerons par décrire le modèle de la source ponctuelle quasimonochromatique. Nous verrons que ce modèle très simple et encore éloigné des sources réelles conduit pourtant à des contraintes fortes sur la réalisation d'expériences d'interférences.

2.1 Première description du modèle

Le modèle de la source quasimonochromatique est le suivant. Une source ponctuelle émet un champ de type onde sphérique de pulsation ω avec une phase supplémentaire $\phi(t)$.

$$S(t) = s_0 \cos(\omega t + \phi(t)) \quad (2.6)$$

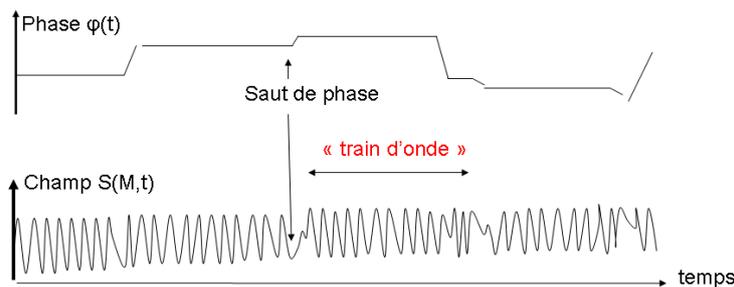


FIGURE 2.1 – Champ émis par une source quasimonochromatique.

Cette phase $\phi(t)$ varie au cours du temps de manière **aléatoire** avec une amplitude très grande (de l'ordre de 2π). On appelle τ_c le temps moyen au bout duquel $\phi(t)$ change significativement. Un modèle classique de changement aléatoire de la phase est celui du train d'onde. Il suppose que $\phi(t)$ "saute" d'une valeur à une autre à des instants aléatoires, l'amplitude des sauts étant elle-même aléatoire (mais de l'ordre de 2π). Dans ce contexte, nous appellerons τ_c le temps moyen entre deux sauts.

Insistons encore sur le caractère aléatoire de ce champ. Même si nous connaissons l'intégralité de l'évolution du champ jusqu'à l'instant présent t , il nous serait impossible de prévoir son évolution dans le futur. Ce modèle de champ n'est pas déterministe.

Nous ajouterons enfin une hypothèse de **stationnarité** : Nous supposons que les propriétés statistiques générales de la source sont indépendantes du temps, un changement de l'origine des temps n'aura aucune incidence sur la physique.

Une telle source peut modéliser une minuscule portion de lampe spectrale (volume inférieur à λ^3) où l'émission de lumière à une pulsation ω résulte de la désexcitation spontanée des atomes de la lampe d'un niveau d'énergie E_{sup} vers un niveau E_{inf} tels que $\hbar\omega = E_{sup} - E_{inf}$. Les sauts de phase modélisent aussi l'effet des collisions incessantes atome-atome ou atome-électron qui ont lieu dans la décharge, mais aussi le caractère fondamentalement aléatoire de l'émission spontanée des atomes excités.

2.2 Interférences entre deux sources quasimonochromatiques indépendantes

Considérons à présent deux sources quasimonochromatiques de même nature que celle que nous venons de décrire. Tentons de réaliser une expérience d'interférence avec leurs champs. Nous devons pour cela "choisir" des sources de même pulsation ω et de même amplitude ($s_1 = s_2$). Puisque ces sources sont distinctes, nous allons supposer dans un premier temps qu'elles sont **indépendantes**, c'est à dire que leurs phases $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ varient aléatoirement mais de manière décorrélée. Par exemple, les sauts de phase de l'une se produisent à des instants différents des sauts de phase de l'autre, avec des amplitudes sans aucun rapport. C'est ce que l'on obtiendrait si nous plaçons devant l'ampoule d'une lampe spectrale un masque percé de deux petits trous sélectionnant chacun une petite portion de la lampe à chacune de ses extrémités. Les collisions ayant lieu à un bout de la lampe sont évidemment décorrélées des collisions ayant lieu à l'autre extrémité.

D'après les résultats du début de ce chapitre, il y aura interférence si au niveau du détecteur $\phi_1(t) - \phi_2(t)$ est constant. Ce n'est pas le cas ici. Chacune des phases évolue aléatoirement et indépendamment sur une échelle de temps τ_c . La différence de phase en fera donc de même.

En conclusion, il ne peut y avoir d'interférences entre deux sources quasimonochromatiques indépendantes. On dit aussi que les deux sources sont mutuellement incohérentes.

2.3 Dispositif des trous d'Young

Comment dans ces conditions réaliser des interférences avec deux sources ponctuelles ? Il suffit de rendre les deux sources corrélées en les "alimentant" par une même source **primaire**. Elles ne sont alors plus indépendantes. Un dispositif simple permet de réaliser en pratique cette situation. Une source quasimonochromatique placée en P éclaire un masque percé de deux petits trous identiques placés en O_1 et O_2 . Comment nous le verrons dans le chapitre sur la diffraction, si la taille des petits trous est de l'ordre de quelques fois la longueur d'onde, chacun d'eux va se comporter comme une source ponctuelle émettant un champ proportionnel au champ incident. Les trous ainsi éclairés vont se comporter comme des sources ponctuelles **secondaires**.

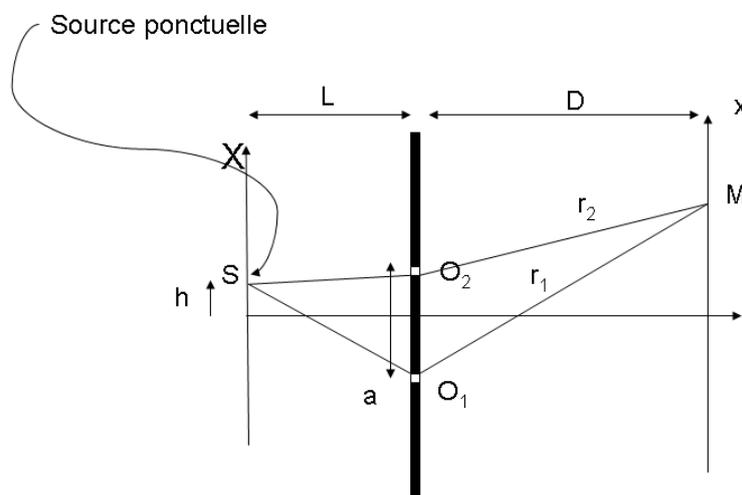


FIGURE 2.2 – Expérience des trous d'Young avec une source ponctuelle.

Nous allons décrire, pas à pas, la structure du champ depuis la source primaire jusqu'au détecteur quadratique M. Le champ émis par la source est celui d'une source ponctuelle quasi-monochromatique de pulsation ω et de phase $\phi(t)$ variant dans le temps par sauts aléatoires avec un temps moyen entre deux sauts τ_c . Le champ à l'entrée du trou O_1 est alors :

$$S(O_1, t) = \frac{s_0}{PO_1} \cos(\omega t + \phi(t)) \quad (2.7)$$

Le champ en O_2 aura exactement la même forme car il provient de la même source primaire. En particulier la phase $\phi(t)$ sera la même. Il faut toutefois tenir compte du fait que O_2 n'est pas nécessairement à la même distance de P que O_1 . Si O_2 est plus loin de P que O_1 , il voit le champ émis par la source avec un certain retard τ_{12} .

$$S(O_2, t) = \frac{s_0}{PO_2} \cos(\omega(t - \tau_{12}) + \phi(t - \tau_{12})) \quad (2.8)$$

$$\tau_{12} = (PO_2 - PO_1)/c \quad (2.9)$$

Chaque trou se comporte comme une source ponctuelle dont le champ est proportionnel au champ incident. Les champs S_{O_1} et S_{O_2} émis par chacun des trous se superposent en M.

$$S_{O_1}(M, t) = Ks_0/(PO_2) \cos(\omega(t - O_1M/c) + \phi(t - O_1M/c)) \quad (2.10)$$

$$S_{O_2}(M, t) = Ks_0/(PO_1) \cos(\omega(t - \tau_{12} - O_2M/c) + \phi(t - \tau_{12} - O_2M/c)) \quad (2.11)$$

Un changement de l'origine des temps n'a pas d'importance sur le résultat final (hypothèse de stationnarité). Les champs S_{O_1} et S_{O_2} peuvent alors s'écrire :

$$S_{O_1}(M, t') = Ks_0/(PO_2) \cos(\omega t' + \phi(t')) \quad (2.12)$$

$$S_{O_2}(M, t') = Ks_0/(PO_1) \cos(\omega(t' - \tau) + \phi(t' - \tau)) \quad (2.13)$$

$$\tau = \tau_{12} + (O_2M - O_1M)/c \quad (2.14)$$

L'intensité sur le détecteur est alors (voir section précédente) :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega\tau + \phi(t' - \tau) - \phi(t')) \rangle \quad (2.15)$$

Si $\tau \ll \tau_c$ la phase ϕ change peu entre les instants $t' - \tau$ et t' et par conséquent, $\phi(t' - \tau) - \phi(t') \sim 0$. l'intensité en M est alors :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega\tau) \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\omega\tau) \quad (2.16)$$

Il y a bien interférences.

En revanche si $\tau \gg \tau_c$, la phase ϕ change considérablement entre les instants $t' - \tau$ et t' et par conséquent, $\phi(t' - \tau) - \phi(t')$ n'est pas constant au cours du temps. La moyenne du cosinus est alors nulle. l'intensité en M est alors :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega\tau) \rangle = I_1 + I_2 \quad (2.17)$$

Il n'y a pas d'interférence.

2.4 Bilan

Conclusion : il est possible d'obtenir des interférences à partir de deux sources secondaires générées à partir d'une même source primaire ponctuelle quasimonochromatique, par exemple avec le dispositif des trous d'Young. Il faut cependant que la différence de marche entre les champs qui interfèrent soit inférieure à $L_c = c\tau_c$. La longueur L_c est appelée longueur de cohérence. Le temps τ_c est le temps de cohérence.

3 Cohérence temporelle

3.1 Interférences en lumière polychromatique

Deux ondes de fréquences différentes ne peuvent interférer. Or, la plupart des sources naturelles ne sont pas monochromatiques. Examinons à présent ce que deviennent les interférences en lumière polychromatique. Reprenons l'exemple précédent des trous d'Young. Une source ponctuelle polychromatique éclaire deux trous très petits qui diffractent la lumière. Nous plaçons un détecteur en M, après les trous d'Young, à grande distance de ceux-ci. Nous supposons que le champ incident est une superposition d'ondes monochromatiques de différentes pulsations ω . L'intensité dI émise dans l'intervalle spectral $[\omega, \omega + d\omega]$ est $dI = J(\omega)d\omega$. La grandeur $J(\omega)$ associée à chaque pulsation est appelée **intensité spectrale** ou encore **spectre** du champ. Chaque champ élémentaire de pulsation ω génère après les trous d'Young une figure d'interférence. En reprenant les notations de la section précédente, l'intensité élémentaire $dI(M)$ captée par le détecteur est alors :

$$\begin{aligned} dI(M) &= (J_1(\omega) + J_2(\omega) + 2\sqrt{J_1(\omega)J_2(\omega)} \cos(\omega\tau))d\omega \\ &= 2J(\omega)(1 + \cos(\omega\tau))d\omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

On suppose ici que les trous d'Young sont identiques (et donc que $I_1 = I_2 = I$). D'après la section précédente, pour calculer le signal total délivré par le détecteur, il suffit d'additionner les intensités produites par chaque pulsation en M. L'intensité TOTALE captée par le détecteur est alors :

$$I_{tot}(M) = \int 2I(\omega)(1 + \cos(\omega\tau))d\omega \quad (2.19)$$

Examinons le cas particulier d'une source dont le spectre est "rectangulaire" :

$$\begin{aligned} J(\omega) &= J_0 \text{ si } \omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2 \\ J(\omega) &= 0; \text{ sinon} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$I_{tot} = 2I_0\Delta\omega + 2I_0(\sin((\omega_0 + \Delta\omega/2)\tau) - \sin((\omega_0 - \Delta\omega/2)\tau))/\tau \quad (2.21)$$

En utilisant le fait que $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a)$, le signal vu par le détecteur est alors :

$$I_{tot} = 2I_0\Delta\omega + 2I_0\sin(\Delta\omega/2\tau) \cos(\omega_0\tau)/\tau \quad (2.22)$$

ou encore en introduisant le sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$

$$I_{tot} = 2I_0\Delta\omega(1 + \text{sinc}(\Delta\omega/2\tau) \cos(\omega_0\tau)) \quad (2.23)$$

Cette expression ressemble à l'expression classique des interférences à deux ondes. Le premier terme correspond à l'intensité en l'absence d'interférences, tandis que le second terme correspond au phénomène d'interférence. Ce terme est cependant modulé par un sinus cardinal. Lorsque τ tend vers zéro, le sinus cardinal tend vers 1. On retrouve ainsi les interférences produites par une source monochromatique de pulsation ω_0 . En revanche lorsque τ devient grand, le terme d'interférence tend vers zéro. La modulation en $\cos(\omega_0\tau)$ disparaît. On dit que les franges d'interférence se brouillent. Quel est l'ordre de grandeur de τ au delà duquel, il y a brouillage des franges ? C'est par exemple la valeur correspondant au premier zéro du sinus cardinal : $\Delta\omega/2\tau = \pi$. Cet ordre de grandeur est donc $\tau_C = 2\pi/(\Delta\omega)$. Ainsi, pour observer des franges contrastées, il faut se placer en un point de l'espace tel que $\tau \ll \tau_C$.

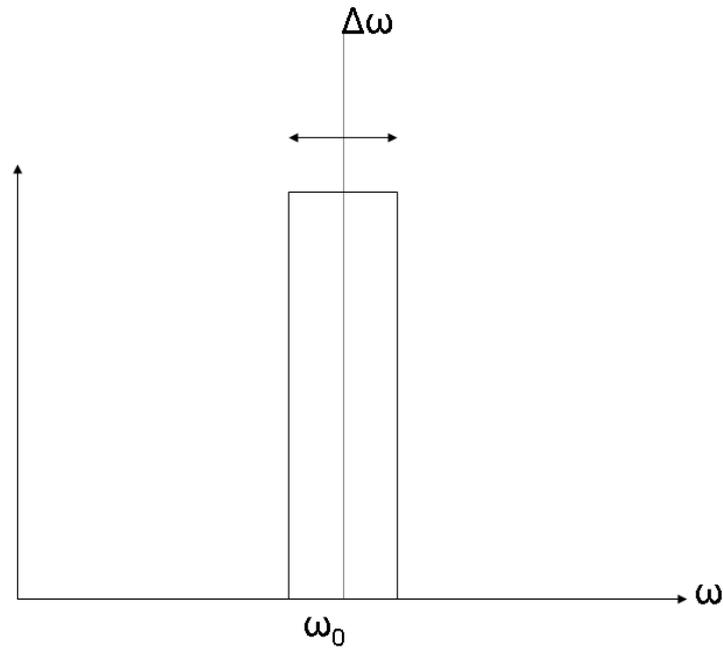


FIGURE 2.3 – Spectre rectangulaire

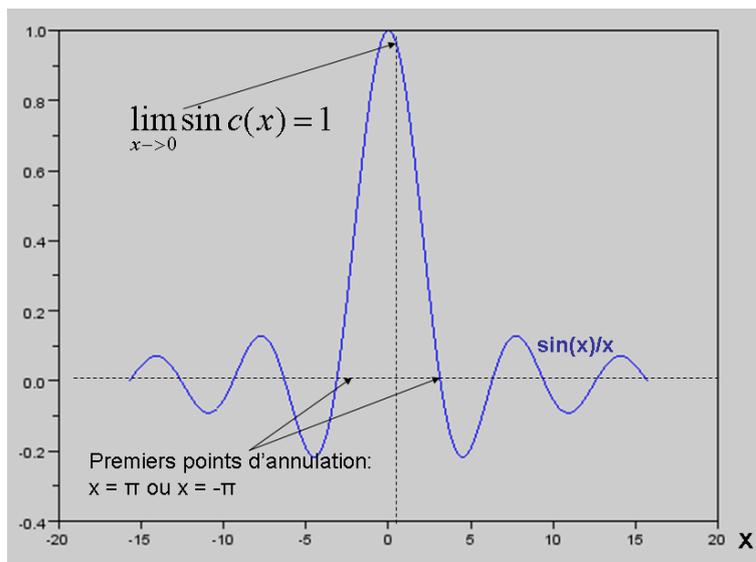


FIGURE 2.4 – Sinus cardinal

3.2 Bilan : notion de temps de cohérence

Nous voyons donc une similitude entre la source polychromatique et la source quasimonochromatique. Dans les deux cas, une expérience de type trous d'Young permet d'obtenir des franges d'interférence. Ces franges seront contrastées dans les régions de l'espace telles que $\tau < \tau_C$ ou encore pour les points de l'espace correspondant à une différence de marche δ entre les deux ondes interférentes telle que $\delta < c\tau_C$.

Ce temps caractéristique est appelé temps de cohérence de la source.

- Pour une source polychromatique, il est inversement proportionnel à la largeur spectrale de la source. Plus la source a un spectre large, plus le temps de cohérence est petit, plus les interférences sont localisées dans l'espace (τ doit être le plus petit possible).
- Pour une source quasimonochromatique, le temps de cohérence correspond au temps moyen pendant lequel la phase de la source est constante. La définition rigoureuse d'un tel temps doit faire intervenir une analyse statistique d'un signal aléatoire. Ce temps s'apparente au temps de corrélation du signal.

En réalité il n'est pas nécessaire de séparer les deux types de source. Un signal aléatoire tel que celui de la source quasimonochromatique possède un spectre (spectre de bruit) dont la largeur spectrale est inversement proportionnelle au temps de corrélation. Dans les deux cas on a :

$$\tau_c \propto \frac{1}{\Delta\nu} \quad (2.24)$$

4 Cohérence spatiale

4.1 Modèle de la source étendue incohérente

La plupart des sources naturelles ne sont pas ponctuelles mais étendues (lampe, diode, tube néon...). Pour modéliser le champ rayonné on peut décomposer ces sources en un grand nombre de sources ponctuelles ayant les propriétés mentionnées plus haut. Chaque source ponctuelle émet un champ dont la phase varie aléatoirement au cours de temps, et ce de manière totalement indépendante des autres sources. Les sources ponctuelles constituant la source étendue sont mutuellement incohérentes. Il ne peut y avoir d'interférences entre elles.

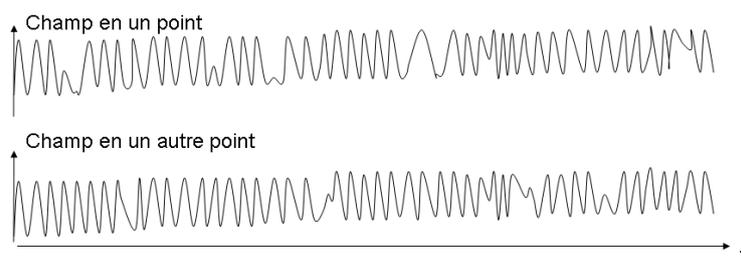


FIGURE 2.5 – Champ en deux points d'une source étendue quasimonochromatique

4.2 Expérience des trous d'Young avec une source étendue

Reprenons l'expérience des trous d'Young, et remplaçons la source ponctuelle par une source étendue (figure 2.6). Nous supposons pour simplifier que cette source est un segment de droite de hauteur h , parallèle à la direction Ox . Décomposons la source étendue en un grand nombre de sources quasi-ponctuelles identiques. La position de la source élémentaire est notée S et son abscisse est X comprise dans l'intervalle : $[-h/2, h/2]$. L'intensité émise par la source quasi ponctuelle est proportionnelle à sa longueur : $dI = I_0 dX$.

Les sources étant mutuellement incohérentes, il ne peut y avoir interférence entre leurs champs. L'intensité totale est donc la somme des intensités produites par chacune de ces sources. Dans le cadre de l'expérience des trous d'Young, la figure d'interférence sera la somme en intensité des figures d'interférences produites par chacune des sources quasi-ponctuelles.

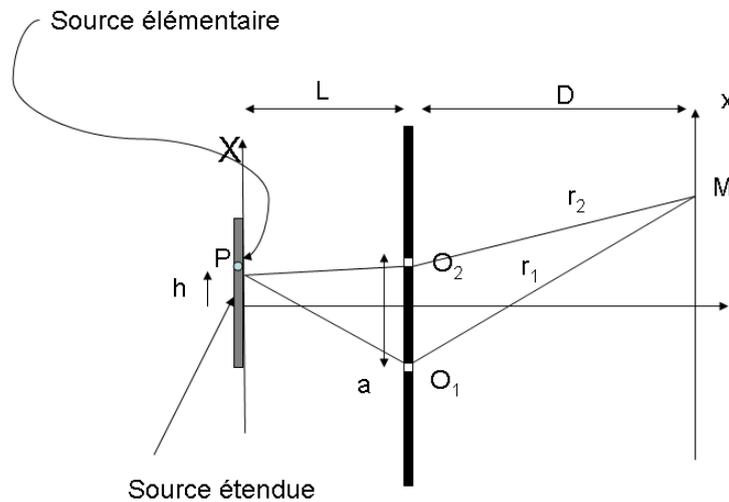


FIGURE 2.6 – Expérience des trous d'Young avec une source étendue

Déterminons la structure de la figure d'interférence produite par une source quasi-ponctuelle placée en X. Nous pouvons utiliser les résultats obtenus dans les sections précédentes.

$$dI = 2KI_0dX(1 + \cos(\omega\tau)) \tag{2.25}$$

où K est une constante de proportionnalité permettant de prendre en compte la "transmission" de chacun des trous (cette constante a peu d'importance ici). τ qui dépend de la position M du détecteur mais aussi de la position S de la source :

$$\tau = \tau_{12} + (O_2M - O_1M)/c \tag{2.26}$$

$$\tau_{12} = (SO_2 - SO_1)/c \tag{2.27}$$

Si l'on suppose que les distances source-trou d'Young et trou d'Young - détecteur sont grandes devant la taille de la source, l'écartement des trous d'Young et l'abscisse x du détecteur, nous pouvons donner des expressions approchées de $\omega(O_2M - O_1M)/c$ ainsi que de $\omega(SO_2 - SO_1)/c$ (voir chapitre 1).

$$\omega(O_2M - O_1M)/c = 2\pi ax/(\lambda D) \tag{2.28}$$

$$\omega(SO_2 - SO_1)/c = 2\pi aX/(\lambda L) \tag{2.29}$$

La figure d'interférence produite par une source élémentaire est donc de la forme suivante :

$$dI = 2KI_0dX(1 + \cos(2\pi ax/(\lambda D) + 2\pi aX/(\lambda L))) \tag{2.30}$$

Le résultat est une figure d'interférence tout à fait analogue à celle rencontrée dans les interférences à deux sources ponctuelles. Lorsque la coordonnée x augmente, on obtient une succession régulière (périodique) de maxima (franges brillantes) et minima (franges sombres) d'intensité. Si l'on décale la source S, on constate que la forme générale de la figure d'interférence ne change pas. En revanche, la figure est globalement décalée d'une quantité $\delta_x = -XD/L$.

Une source trop étendue va conduire à un brouillage des franges. Justifions le qualitativement. Si l'on juxtapose des sources ponctuelles les une à côté des autres, les figures d'interférences produites vont se superposer en intensité. Si la distance entre deux sources ponctuelles est suffisamment grande, il se peut que le décalage entre les figures d'interférence soit tel que les franges brillantes de l'une coïncident avec les franges sombres de l'autre. L'addition des intensités conduit alors à une intensité totale quasiment uniforme. Il y a brouillage des interférences.

Quantitativement nous pouvons déterminer l'intensité de la figure d'interférence produite par la source étendue en sommant les contributions de toutes les sources ponctuelles constituant la source.

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \int_{-h/2}^{h/2} 2KI_0 dX (1 + \cos(2\pi ax/(\lambda D) + 2\pi aX/(\lambda L))) \\ &= 2KI_0 h + 2KI_0 \left[\frac{\lambda L}{2\pi a} \sin(2\pi ax/(\lambda D) + 2\pi aX/(\lambda L)) \right]_{-h/2}^{h/2} \\ &= 2KI_0 h \left(1 + \frac{\lambda L}{2\pi ah} (\sin(2\pi ax/(\lambda D) + 2\pi ah/(2\lambda L)) - \sin(2\pi ax/(\lambda D) + 2\pi ah/(2\lambda L))) \right) \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le fait que $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin(b) \cos(a)$ et en introduisant le sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$, l'intensité de la figure d'interférence devient :

$$I = 2KI_0 h (1 + (\text{sinc}(\pi ah/(\lambda L)) \cos(2\pi ax/(\lambda D)))) \quad (2.31)$$

- Si l'étendue h de la source tend vers zéro, le sinus cardinal tend vers un. La figure d'interférence est alors celle produite par une source ponctuelle. La visibilité des franges vaut alors un.
- Lorsque l'étendue de la source tend vers l'infini, le sinus cardinal tend vers zéro. Le terme d'interférence tend vers zéro. L'intensité devient uniforme, il n'y a plus de franges visibles.
- Quel est l'ordre de grandeur de l'étendue à ne pas dépasser si l'on souhaite avoir des franges relativement contrastées ? Il suffit de regarder pour quelle valeur de h le sinus cardinal s'annule une première fois, ce qui donne le critère suivant :

$$\frac{\pi ah}{\lambda L} = \pi \quad (2.32)$$

4.3 Longueur de cohérence spatiale

La perte de contraste des franges avec l'augmentation de l'étendue de la source peut aussi se comprendre de la manière suivante. Lorsque h est très petit, les champs émis par les deux sources secondaires O_1 et O_2 sont peu différents de celui émis par deux sources ponctuelles quasimonochromatiques et mutuellement cohérentes. Lorsque h augmente les champs au niveau de chacun des trous ont des dépendances temporelles de plus en plus complexes et qui ont de moins en moins de rapport entre elles. Lorsque h est suffisamment grand, les champs en O_1 et O_2 n'ont plus aucun rapport entre eux : ils sont mutuellement incohérents. Les sources secondaires O_1 et O_2 ne peuvent plus produire d'interférences. Cette perte de cohérence entre O_1 et O_2 ne peut cependant pas être abrupte. Si O_1 et O_2 sont suffisamment proches l'un de l'autre ils "ressentiront" pratiquement le même champ et redeviendront mutuellement cohérent. En dessous de quelle distance faut-il les rapprocher pour retrouver une cohérence mutuelle entre les champs ? Il suffit d'utiliser le critère 2.32.

$$a < \frac{\lambda L}{h} = \Lambda_T \quad (2.33)$$

La quantité Λ_T est appelée longueur de cohérence transverse ou longueur de cohérence spatiale.

Pour obtenir des interférences dans une expérience de trous d'Young, il faut que la distance entre les trous soit inférieure à la longueur de cohérence transverse.

5 Généralisation

Nous avons dégagé les notions de cohérence temporelle et spatiale à partir de modèles simples de sources. Ceux-ci sont pertinents pour décrire une lampe ou une flamme, mais pas les sources plus modernes (laser, synchrotrons...). De plus, à y regarder de près (voir le dernier paragraphe) la cohérence n'est pas une notion concernant la source mais plutôt le champ émis. La notion de cohérence spatiale apparaît lorsque l'on compare les amplitudes d'un champ en deux points de l'espace (les positions des deux trous d'Young), tandis que la cohérence temporelle nous invite à comparer ces amplitudes en un même point mais à des instants différents (différence de marche divisée par c). L'objectif est de savoir si, en "prélevant" le champ en ces deux points ou à ces deux instants, on peut obtenir deux ondes secondaires capables d'interférer.

Les deux amplitudes complexes que l'on souhaite comparer sont dans de la quasi totalité des cas des fonctions aléatoires du temps, en particulier au niveau de leur phase. Toutefois, nous avons signalé que le phénomène d'interférence ne nécessitait pas que les phases soient fixes ou déterministes. Il faut simplement que les phases évoluent de conserve, ou, dit en langage statistique, qu'elles soient *corrélées*.

5.1 Fonction de cohérence

Considérons un champ quelconque se propageant dans l'espace et supposons que son spectre soit centré sur la pulsation ω_0 . Soient $S_1 = S(O_1, t) = A(O_1, t)e^{-i\omega_0 t}$ et $S_2 = S(O_2, t) = A(O_2, t)e^{-i\omega_0 t}$ les amplitudes complexes du champ en O_1 et O_2 au même instant t . Supposons de plus que nous soyons capables d'introduire un retard τ entre le champ en O_1 et le champ en O_2 (par exemple en regardant les franges situées loin de l'axe des trous d'Young). L'intensité totale moyenne produite par la superposition $S = S_1 + S_2$ de ces champs est alors :

$$\begin{aligned} I(O_1, O_2, t, t - \tau) &= \langle SS^* \rangle \\ &= \langle S_1 S_1^* \rangle + \langle S_2 S_2^* \rangle + 2\text{Re}(\langle A(O_1, t)A(O_2, t - \tau)^* \exp(i\omega_0 \tau) \rangle) \\ &= I_1 + I_2 + 2\text{Re}(\Gamma(O_1, O_2, t, t - \tau) \exp(i\omega_0 \tau)) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nous avons introduit la fonction :

$$\Gamma(O_1, O_2, t, t - \tau) = \langle A(O_1, t)A(O_2, t - \tau)^* \rangle \quad (2.35)$$

qui est appelée **fonction complexe de cohérence du champ**.

5.2 Propriétés

- Si le champ est stationnaire, le temps t n'intervient pas dans la fonction de cohérence : $\Gamma(O_1, O_2, t, t - \tau) = \Gamma(O_1, O_2, \tau)$.
- Cette fonction est complexe. On peut définir son module et son argument $\Psi(O_1, O_2, \tau)$. Dans ces conditions l'intensité résultant de la superposition des deux champs devient :

$$I(O_1, O_2, \tau) = I_1 + I_2 + 2|\Gamma(O_1, O_2, \tau)| \cos(\omega_0 \tau + \Psi(O_1, O_2, \tau)) \quad (2.36)$$

On reconnaît dans la partie en cosinus, le terme d'interférence. Lorsque τ varie, on a une succession de minima et de maxima. Il s'agit bien sûr des franges d'interférences.

- Le contraste des franges C est alors :

$$C = \frac{2|\Gamma(O_1, O_2, \tau)|}{I_1 + I_2} \quad (2.37)$$

- La fonction $\Gamma(O_1, O_2, 0)$ est appelée fonction complexe de cohérence spatiale.
- La fonction $\Gamma(O_1, O_1, \tau)$ est appelée fonction complexe de cohérence temporelle.
- Nous avons vu dans le chapitre 1 que le contraste des franges dépend de l'intensité relative des ondes qui interfèrent. Afin de corriger la fonction de cohérence d'un éventuel déséquilibre d'intensité entre les ondes 1 et 2, on introduit le **degré complexe de cohérence** γ :

$$\gamma(O_1, O_2, \tau) = \frac{|\Gamma(O_1, O_2, \tau)|}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.38)$$

$$I(O_1, O_2, \tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(O_1, O_2, \tau)| \cos(\omega_0 \tau + \Psi(O_1, O_2, \tau)) \quad (2.39)$$

Si $I_1 = I_2 = I_0$

$$I(O_1, O_2, \tau) = 2I_0(1 + |\gamma(O_1, O_2, \tau)| \cos(\omega_0 \tau + \Psi(O_1, O_2, \tau))) \quad (2.40)$$

$$C = |\gamma(O_1, O_2, \tau)| \quad (2.41)$$

La fonction de cohérence temporelle condense toute l'information sur la cohérence du champ. Sa connaissance permet de prévoir le contraste des franges dans une expérience d'interférence. Toutefois, ce formalisme n'aurait que peu d'intérêt s'il n'y avait de grands résultats permettant justement de calculer Γ à partir de propriétés physiques de la source.

5.3 Cohérence temporelle et spectre du champ

Considérons $S(O_1, t)$, l'amplitude du champ lumineux en O_1 . Si ce champ a une structure déterministe il est possible d'en effectuer la transformée de Fourier par rapport au temps $\widetilde{S}(O_1, \omega)$. Le spectre de S est noté $J(O_1, \omega)$ et est le module au carré de la transformée de Fourier.

$$J(O_1, \omega) = |\widetilde{S}(O_1, \omega)|^2.$$

Cette définition assez naturelle est cependant problématique si

- le champ est purement sinusoïdal
- le champ est stationnaire et aléatoire

La théorie des distributions permet de résoudre le premier cas. La théorie du signal donne par ailleurs un sens au spectre d'un signal aléatoire. On suppose que l'on effectue la TF sur un échantillon de S centré sur un instant t et sur un intervalle de temps T très grand. Elle permet ainsi une généralisation de la notion de spectre à des situations proche de la réalité expérimentale.

Connaissant $J(O_1, \omega)$, il est possible de déterminer la fonction complexe de cohérence temporelle $\Gamma(O_1, O_1, \tau)$ grâce au **théorème de Wiener-Khintchine**.

La fonction de cohérence temporelle est la transformée de Fourier du spectre.

$$\Gamma(O_1, O_1, \tau) = TF(J(O_1, \omega)) \quad (2.42)$$

5.4 Cohérence spatiale et étendue de la source

Une source étendue peut avoir une structure complexe. Comment prévoir le contraste des franges lors d'une expérience de trous d'Young employant une telle source ? Sur le principe, il faut calculer $\Gamma(O_1, O_2, 0)$ (on suppose que τ est très petit devant le temps de cohérence). Si la source est supposée composée d'une infinité de sources quasi-monochromatiques, il est possible d'obtenir la valeur de la fonction γ à l'aide du **théorème de Van-Cittert Zernicke**.

Supposons que la source soit contenue dans le plan (O, x, y) . L'intensité lumineuse dI produite par un petit élément de surface $dx dy$ centré sur un point $P(x_s, y_s)$ de la source est $dI = I_s(x_s, y_s) dx dy$ où I_s est l'intensité spatiale de la source. Le plan (O, x, y) est placé à une distance D des trous d'Young. Ceux-ci sont placés dans un plan parallèle à (O, x, y) . On note les coordonnées de $O_1 \vec{O}_2 = (a, b)$. On a alors la relation :

$$\Gamma(O_1, O_2, 0) = \int \int I_s(x_s, y_s) \exp(-i(2\pi a x_s)/(\lambda D)) \exp(-i(2\pi b y_s)/(\lambda D)) dx_s dy_s \quad (2.43)$$

En posant $u = \frac{a}{\lambda D}$ et $v = \frac{b}{\lambda D}$, on obtient :

$$\Gamma(O_1, O_2, 0) = \int \int I_s(x_s, y_s) \exp(-i2\pi u x_s) \exp(-i2\pi v y_s) dx_s dy_s \quad (2.44)$$

On reconnaît une transformée de Fourier à deux dimensions.

Pour une source étendue incohérente, la fonction complexe de cohérence spatiale est la transformée de Fourier de la distribution spatiale d'intensité

Cette forme présente, comme nous le verrons, beaucoup d'analogie avec la théorie de la diffraction.

6 Conclusion

La réalisation d'expériences d'interférence nécessite de connaître les propriétés spectrales et spatiales de la source utilisée, cela afin de déterminer le meilleur dispositif expérimental à employer et comment l'optimiser. A titre d'exemple, revenons sur le dispositif des trous d'Young.

- Il nous faut tout d'abord une source dont le spectre est relativement étroit afin d'avoir une cohérence temporelle élevée. Nous pourrions alors observer des franges assez loin de l'axe de la manipe sur l'écran d'observation. Pour cela, on peut utiliser une lampe spectrale suivie d'un filtre coloré ne gardant qu'une raie d'émission.
- Il faut que les trous d'Young soient mutuellement cohérents. ils faut donc qu'ils soient éclairés par une source ayant une grande cohérence spatiale, dont le comportement se rapproche d'une source ponctuelle. On utilise un petit trou éclairé par notre source. Si le trou est petit, il diffractera la lumière et pourra alors éclairer les deux trous d'Young.
- La source étant une source étendue, il faut que le trou soit suffisamment loin et/ou suffisamment petit pour être de taille inférieure à la longueur de cohérence transverse de la source. du rayonnement qui l'atteint. Le trou se comportera alors comme une source spatialement cohérente.
- on peut relaxer cette contrainte de distance et de taille en exigeant seulement que la distance entre les trous d'Young soit petite devant la longueur de cohérence spatiale du champ à leur niveau.

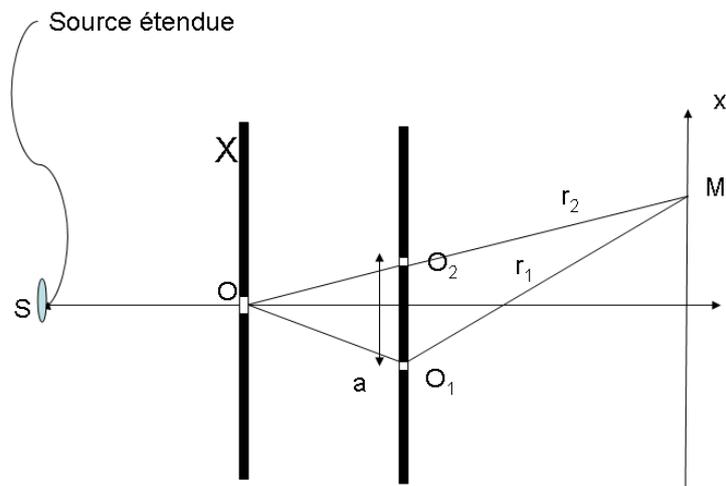


FIGURE 2.7 – Dispositif des trous d'Young : réalisation pratique

Chapitre 3

Dispositifs interférométriques

Les trous d'Young constituent un dispositif expérimental très intéressant pour comprendre les fondements du phénomène d'interférence. Ce montage est toutefois très académique et peu efficace pour des applications. Bien d'autres dispositifs interférométriques ont été développés. Nous allons étudier dans ce chapitre quelques montages classiques. Loin de représenter l'ensemble des systèmes interférométriques développés par les opticiens, ces exemples peuvent être vus comme des archétypes auxquels on peut se ramener lors de l'étude d'un interféromètre réel.

1 Système stigmatique en optique ondulatoire

Nous aurons à considérer des systèmes optiques faisant intervenir des optiques stigmatiques (lentilles, miroirs...). En optique géométrique, un système est stigmatique pour le point S, si tout rayon incident qui passe par S et par l'optique sort de l'optique en passant par un même point S'. On dit que S et S' sont conjugués, S' est l'image de S, S' a pour objet S. Par ailleurs, le chemin optique d'un rayon partant de S et arrivant en S' est indépendant du chemin suivi. Rappelons enfin que si S est à l'infini, S' est appelé foyer image de l'optique.

En optique ondulatoire, on peut modéliser de manière très simple l'effet d'une optique stigmatique sur une onde plane ou sphérique. On négligera ici le phénomène de diffraction lié à l'ouverture finie de l'optique (son diamètre) mais nous verrons plus tard comment en tenir compte. Si une source d'onde sphérique est placée en S, l'onde sortant de l'optique sera une onde sphérique convergeant vers S'. La figure 3.1 montre quelques exemples de cette modélisation.

2 Classification des interféromètres

Afin d'appréhender l'extraordinaire diversité des dispositifs interférométriques, nous pouvons tenter de les classer en fonction de leurs propriétés.

2.1 Interférences à deux ondes et à ondes multiples

Dans l'expérience des trous d'Young, nous nous sommes intéressés aux interférences produites par la superposition de deux ondes émises par un trou 1 et un trou 2. L'intensité produite en M est de la forme :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\psi_1(r) - \psi_2(r)) \quad (3.1)$$

Que se passerait-il si nous perçions d'autres trous dans la plaque, de manière à en avoir plus de deux. Si tous ces trous émettent des ondes mutuellement cohérentes (i.e sont éclairés par la même source primaire), le champ en M est la superposition (la somme) des N ondes émises par les N trous.

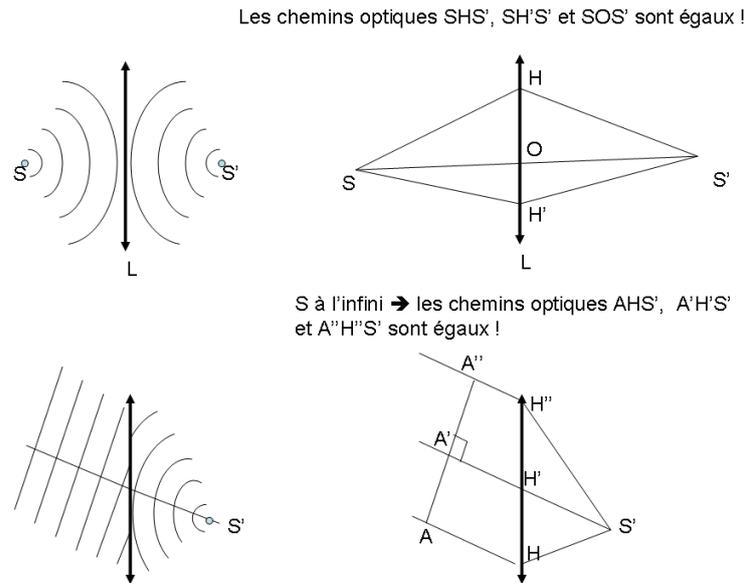


FIGURE 3.1 – Effet d'une optique stigmatique "parfaite" sur une onde plane ou sur une onde sphérique.

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) + \dots + s_N(M)$$

$$I(M) = |s_1(M) + s_2(M) + \dots + s_N(M)|^2 \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

On parle alors d'**interférence à ondes multiples**. L'expression générale de $I(M)$ peut être très complexe, sauf dans des cas bien particuliers (voir TD).

Par la suite nous nous intéresserons essentiellement à des interférences à 2 ondes, sauf dans le cas de l'interféromètre de Fabry-Perot. Nous verrons cependant dans le chapitre 5 que la diffraction peut être formellement modélisée par une interférence entre une infinité d'ondes.

2.2 Division de front d'onde et division d'amplitude

Une autre manière de classer les interféromètres est la manière de générer à partir d'une même source primaire les différentes ondes qui interfèrent (figure 3.2). Dans le dispositif des trous d'Young, les deux ondes sont obtenues en prélevant deux portions de l'onde incidente à l'aide de deux petits trous percés dans un écran. Les trous d'Young sont ainsi classés dans la famille des **interféromètres à division de front d'onde**. Dans de tels dispositifs, le front d'onde de l'onde primaire sera séparé à l'aide de diaphragmes, de miroirs, de prismes etc...nous en présentons deux exemples dans la figure 3.3.

On oppose à ces interféromètres les interféromètres **à division d'amplitude**. En optique géométrique nous savons qu'un rayon incident sur un dioptre est séparé en un rayon transmis et un rayon réfléchi. D'un point de vue ondulatoire, l'onde incidente donne naissance à deux ondes mutuellement cohérentes mais avec des amplitudes différentes. Ce processus, et bien d'autres du même type, peut être exploité pour réaliser un interféromètre. La figure 3.4 présente un exemple d'interféromètre à division d'amplitude, l'interféromètre de Mach-Zender.

Les interféromètres à division d'amplitude sont moins sensibles à la cohérence spatiale de la source que les interféromètres à division de front d'onde. Nous avons vu dans le chapitre 2 que dans l'expérience des trous d'Young, l'augmentation de l'étendue de la source incohérente conduit à une diminution progressive du contraste des franges et ce, partout dans l'espace. Pour les interféromètres à division d'amplitude, nous verrons qu'il peut exister une région de l'espace où le contraste est conservé malgré la taille importante de la

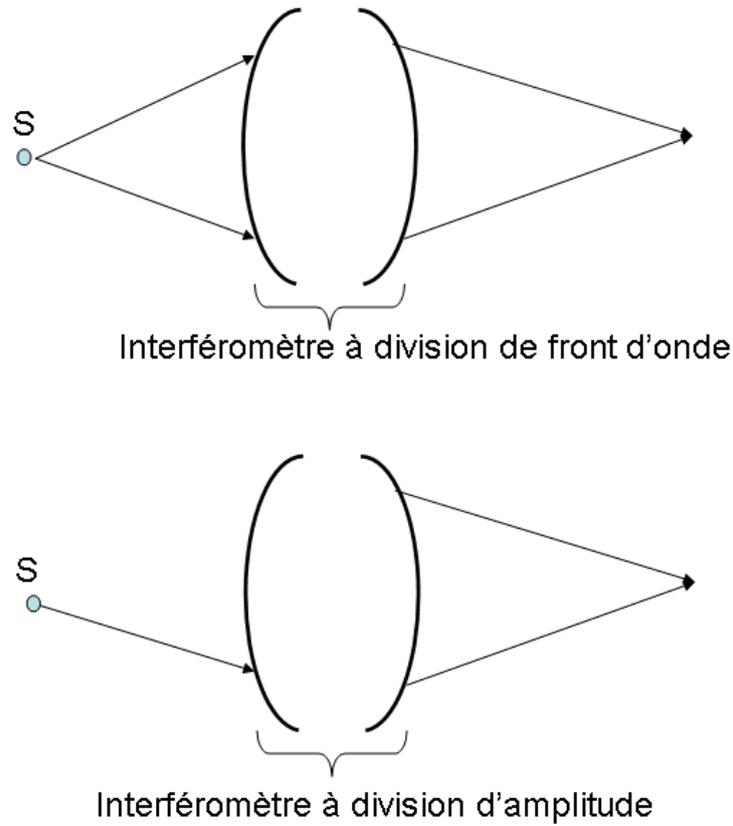


FIGURE 3.2 – Interféromètre à division de front d'onde et à division d'amplitude

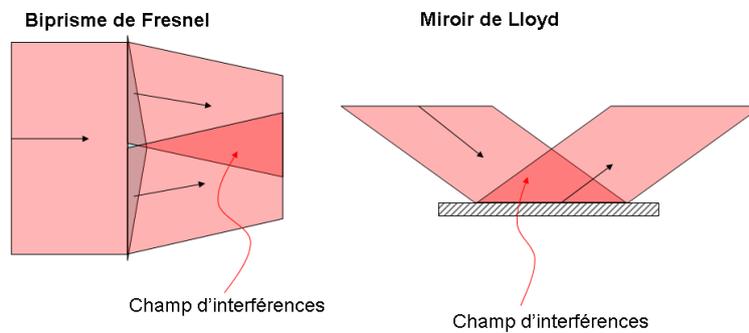


FIGURE 3.3 – Exemples d'interféromètres à division de front d'onde.

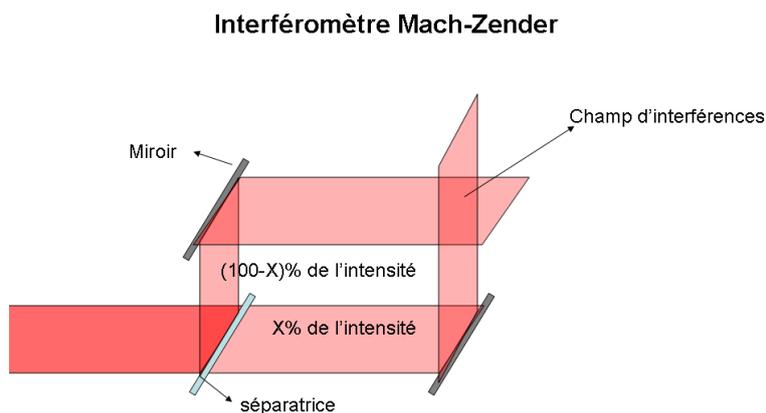


FIGURE 3.4 – Exemple d’interféromètre à division d’amplitude : l’interféromètre de Mach-Zender.

source. Cette propriété permet donc d’obtenir des franges contrastées avec une source puissante et explique le développement technologique des interféromètres à division d’amplitude. Toutefois, l’avènement de sources intenses et spatialement cohérentes comme les lasers permet de travailler avec des interféromètres à division de front d’onde de manière très aisée.

2.3 Localisation des franges d’interférence

Une caractéristique d’un interféromètre, ou d’un régime de fonctionnement d’un interféromètre, est le lieu où l’on peut observer des franges contrastées. Ceci dépend très fortement de la cohérence spatiale et temporelle de la source.

- Lorsque la source primaire est cohérente spatialement et temporellement, des franges peuvent être observées partout dans l’espace.
- Si la cohérence temporelle de la source est faible, la zone où l’on peut observer des franges est celle pour laquelle la différence de marche est proche de zéro. Pour les trous d’Young cette zone se situe sur la médiatrice des trous.
- Si la source est étendue (faible cohérence spatiale), il faut, pour voir des franges contrastées que chaque point constituant la source produise une figure d’interférence indépendante de la position du point source. Ceci est impossible avec un interféromètre à division de front d’onde. En revanche ceci peut être le cas pour un interféromètre à division d’amplitude, mais les franges ne peuvent être observées que dans une zone bien précise de l’espace. On parle à propos de ce phénomène de **localisation des franges**.
- Les franges peuvent être localisées sur une surface réelle (on peut placer en cet endroit un écran ou une caméra pour les observer), une surface virtuelle (pour les observer il faut une optique qui en face une image réelle), à l’infini (on les observe au foyer d’une lentille placée après l’interféromètre).

3 lame à faces parallèles

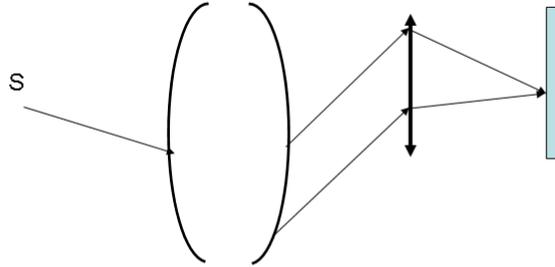
La lame à face parallèle est l’archétype de l’interféromètre à division d’amplitude donnant des franges localisées à l’infini. Beaucoup de résultats obtenus ici seront réutilisables dans d’autres situations.

3.1 Présentation du dispositif

La lame à faces parallèles est, comme son nom l’indique, une mince lame de verre (ou de n’importe quel milieu réfringent transparent) d’indice n et d’épaisseur e , dont les surfaces sont parfaitement planes et parallèles (figure 3.6).

Interférence à l'infini

→ On peut les observer au foyer d'une lentille...



Interférence virtuelles

→ On peut les observer au plan image de la lentille...

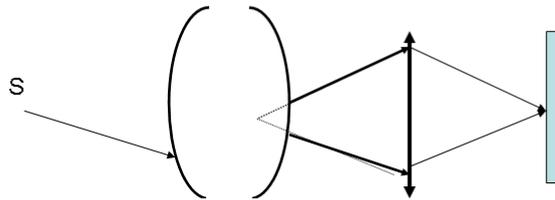


FIGURE 3.5 – Localisation des franges d'interférence

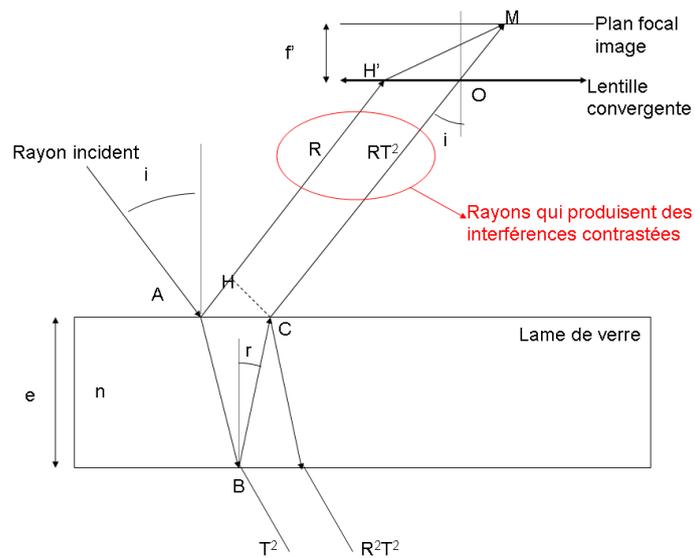


FIGURE 3.6 – lame à faces parallèles

Dans ce dispositif, une onde incidente sur le premier dioptre donne naissance à une onde réfléchie et à une onde réfractée. L'onde réfractée se propage à travers la lame et, en arrivant sur le deuxième dioptre donne à nouveau naissance à une onde réfléchie et à une onde réfractée. L'onde réfléchie repart vers le premier dioptre et ainsi de suite. Une infinité d'ondes secondaires peuvent être générées à partir de l'onde incidente. Notons que les lois de la réfraction font que toutes les ondes sortant par l'avant ou par l'arrière sont parallèles entre elles. Cependant, deux ondes parallèles consécutives sont déphasées du fait que l'une d'elles a fait un aller-retour de plus dans la lame.

Si nous plaçons une lentille avant ou après la lame, nous voyons donc que toutes les ondes émergentes convergeront en un même point dans le plan focal image de la lentille. Il s'agit donc d'un excellent moyen de forcer ces ondes à se superposer. Nous verrons un peu plus loin que cette manière d'obtenir des interférences possède un intérêt encore plus fondamental.

Ce dispositif pourrait s'apparenter à un interféromètre à ondes multiples. En l'absence de traitement particulier sur les faces de cette lame, nous allons voir qu'il n'en est rien, et que seules les interférences entre les deux premières ondes sortant du côté incident seront suffisamment contrastées pour être visibles. La lame à faces parallèles est un interféromètre à deux ondes.

3.2 Réflexion et transmission à travers un dioptre

Lorsqu'une onde est incidente sur un dioptre elle donne naissance à deux ondes : une onde réfléchie et une onde transmise (ou réfractée). Les deux ondes ont des amplitudes complexes s_r et s_t proportionnelles à l'amplitude complexe de l'onde incidente s_i : $s_r = r s_i$ et $s_t = t s_i$. **Les coefficients r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.** Ces coefficients dépendent de l'angle d'incidence et des indices de réfraction des milieux rencontrés (voir annexe 4).

Remarque : le coefficient de réflexion peut être négatif lorsque la réflexion a lieu sur un milieu plus réfringent que le milieu d'entrée ($n_2 > n_1$). Cette réflexion introduit un déphasage de π par rapport à l'onde incidente. Ainsi, sur la lame à face parallèle, la première réflexion sur le dioptre air-verre introduit un déphasage de π mais pas celle sur le dioptre verre-air.

Si nous regardons l'intensité ou la puissance transportées par chaque onde on obtient que :

$$P_r = R P_i = |r|^2 P_i \quad (3.4)$$

$$P_t = T P_i \quad (3.5)$$

$$T + R = 1 \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

3.3 Nombre d'ondes impliquées

Dans le cas de l'interface air-verre (ou verre -air), on calcule que (voir annexe 4) $T = 0.96$ et $R = 0.04$. Utilisons ces résultats pour estimer les intensités transportées par les différentes ondes sortant de la lame par l'avant (côté de l'onde incidente) ou par l'arrière. Les résultats pour les premières ondes sont résumés dans le tableau 3.1.

Nous voyons que ces ondes ont en général des intensités très différentes. Bien que mutuellement cohérentes (elles émanent de la même onde) elles ne produiront pas de franges contrastées. Il y a toutefois une exception notable : les deux premières ondes sortant par l'avant de la lame. Bien que peu intenses, elles ont des niveaux d'intensité relativement proches. Elles pourront donner lieu à des interférences contrastées.

3.4 Calcul du déphasage

Nous avons identifié les deux ondes secondaires susceptibles d'interférer. Nous souhaitons savoir l'intensité résultant de leur superposition au point M du plan focal image de la lentille. L'optique géométrique nous dit que M est le point de concours des rayons arrivant avec une incidence i sur la lentille. La position de M sur l'écran ne dépend que de l'angle i . Considérons une portion d'onde émise par la source (nous n'avons pas

Onde	Amplitude	Intensité
Avant 1	$-r$	$R = 0.04$
Arrière 1	t^2	$T^2 = 0.92$
Avant 2	rt^2	$RT^2 = 0.037$
Arrière 2	r^2t^2	$R^2T^2 = 0.0012$
Avant 3	r^3t^2	$R^3T^2 = 0.000048$
Arrière 3	r^4t^2	$R^4T^2 = 0.0000019$

TABLE 3.1 – Intensité des ondes sortant de la lame par l'avant et par l'arrière

besoin de préciser sa nature pour le moment). Supposons que cette portion d'onde suive le rayon incident en A avec l'angle i . Les ondes secondaires susceptibles d'interférer sont celles directement réfléchies (angle de réflexion i) et sortant après un aller-retour dans la lame. Elles sont parallèles entre elles et suivent les trajets des rayons $AHH'M$ et COM respectivement. Puisqu'il s'agit d'une interférence à deux ondes (voir chapitre 1), il ne nous reste plus qu'à déterminer le déphasage entre les deux ondes en fonction de la position de M, c'est à dire en fonction de i .

la différence de marche entre les ondes est $\delta = ABCOM - AH'M$. La lentille est un système stigmatique. Elle fait l'image d'un objet à l'infini dans le plan focal. Dans ces conditions (voir plus haut dans ce chapitre), les chemins optiques $HH'M$ et COM sont égaux. La différence de marche vaut donc $\delta = ABC - AH$. En utilisant la loi de Snell-Descartes ($n\sin(r) = \sin(i)$) et avec un peu de trigonométrie nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta &= ABC - AH = 2ne/\cos(r) - 2etan(r)\sin(i) \\ \delta &= 2ne/\cos(r) - 2netan(r)\sin(r) \\ \delta &= 2ne/\cos(r)(1 - \sin^2(r)) \\ \delta &= 2necos(r)\end{aligned}\tag{3.8}$$

Finalement, le déphasage entre les deux ondes en M est :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta + \pi = \frac{4\pi necos(r)}{\lambda} + \pi\tag{3.9}$$

Le déphasage de π supplémentaire est dû au déphasage qu'introduit la réflexion air-verre sur la première onde.

Anneaux d'égale inclinaison ou d'Haidinger

Nous constatons que le déphasage ne dépend que de l'angle r (et donc de l'angle i) et pas de la position du point d'impact A. Supposons que la source soit une source ponctuelle située à une distance quelconque de la lame. Elle éclaire de manière isotrope la lame. Elle émet des rayons dans toutes les directions et à chaque rayon incident correspond un point M dans le plan focal. Considérons les rayons ayant le même angle d'incidence i par rapport à la normale à la lame. Ces rayons forment un cône autour de la normale. Ils correspondent à des points M situés dans le plan focal sur un cercle de rayon $r = f'tan(i)$ centré sur l'axe optique de la lentille. Toutefois, ces points correspondent à un même déphasage puisque l'angle i reste constant. L'intensité en ces points sera égale. En particulier les franges brillantes s'organisent en cercles concentriques que l'on appelle **anneaux d'égale inclinaison ou anneaux de Haidinger** (figure 3.7).

Il est important de noter que dans cette situation où l'on observe des franges au foyer d'une lentille, et uniquement dans cette situation, le déphasage et par conséquent la figure d'interférence ne dépend pas de la position absolue de la source ponctuelle. Deux sources ponctuelles distinctes donnent la même figure d'interférence (figure 3.8). Donc une assemblée de sources ponctuelles formant une source étendue donne une

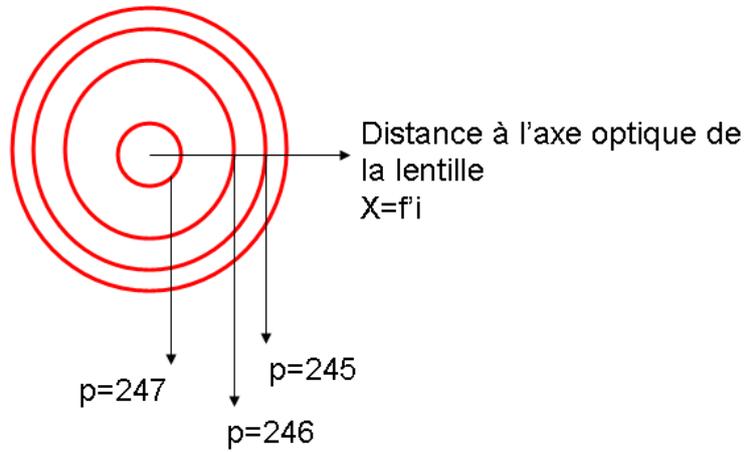


FIGURE 3.7 – Anneaux d’Haidinger (p est l’ordre d’interférence).

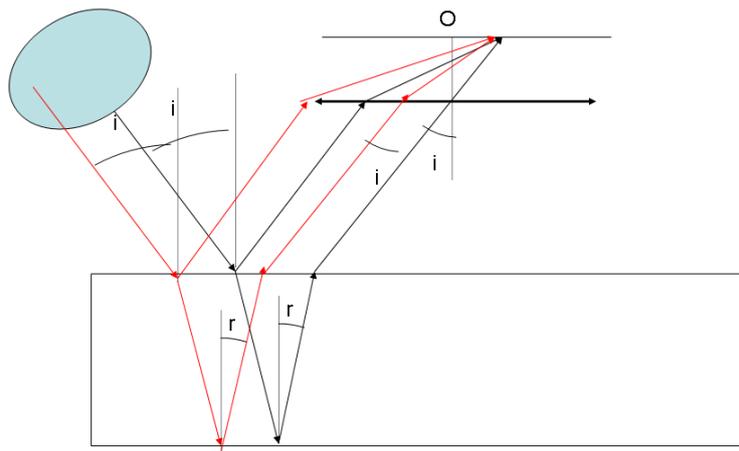


FIGURE 3.8 – lame à faces parallèles éclairée avec une source étendue.

figure d'interférence similaire à celle d'une source ponctuelle isolée...mais plus intense ! Nous avons donc un dispositif interférométrique insensible à la cohérence spatiale de la source !

Pour finir, calculons le diamètre des anneaux de Haidinger. Nous supposons que les angles que peut collecter la lentille sur le détecteur sont faibles. Nous allons chercher les angles i_p pour lesquels le déphasage entre les deux ondes vaut $2\pi p$ où p est un entier appelé **ordre d'interférence**. Nous en déduisons alors le rayon x_p de l'anneau brillant correspondant. En effet :

$$x_p = f' \tan(i_p) \approx f' i_p \quad (3.10)$$

L'angle i_p est tel que :

$$\begin{aligned} \sin(i_p) &= n \sin(r_p) \\ \Delta\phi(M) &= \frac{4\pi n e \cos(r_p)}{\lambda} + \pi = 2\pi p \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant le fait que les angles sont faibles, il vient :

$$\begin{aligned} i_p &\approx nr_p \\ \frac{4\pi n e \cos(r_p)}{\lambda} &\approx \frac{4\pi n e}{\lambda} \left(1 - \frac{r_p^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

On en déduit finalement r_p puis x_p .

$$x_p \approx f' nr_p \approx f' \sqrt{n\lambda/e} \sqrt{2en/\lambda - (p - 1/2)} \quad (3.14)$$

Nous pouvons alors en déduire les caractéristiques générales des anneaux d'Haidinger (voir figure 3.7) :

- x_p dépend de la racine carrée de l'ordre d'interférence p . L'écart entre les anneaux n'est donc pas régulier.
- x_p augmente lorsque p diminue.
- l'ordre d'interférence le plus élevé correspond à l'anneau le plus petit (le plus "central"). C'est le plus grand entier tel que : $p \leq \frac{2en}{\lambda} + 1/2$

4 lame à épaisseur variable

4.1 Présentation du dispositif

Considérons une lame de verre dont les faces ne sont plus parallèles mais dont l'épaisseur varie lentement et avec une faible amplitude (figure 3.9). Nous supposons de plus que cette lame est éclairée en incidence quasinormale par une source située à l'infini. Si la source est ponctuelle, l'onde incidente sur la lame est une onde plane.

La principale différence avec la situation de la lame à faces parallèles est que les rayons émergents ne sont plus parallèles. Toutefois, les angles entre ces deux rayons resteront faibles. Si l'onde incidente est plane il y aura des franges d'interférence dans tout l'espace. En revanche, si l'onde incidente est un bouquet d'ondes planes mutuellement incohérentes et arrivant avec des incidences légèrement différentes les franges vont se brouiller partout dans l'espace sauf dans une zone particulière de l'espace : il s'agit à nouveau d'un phénomène de localisation des franges. Les franges sont cette fois localisées au voisinage de la lame.

Nous pouvons mettre en évidence ce phénomène à l'aide d'une expérience numérique. Prenons une source S ponctuelle située loin de la lame délimitée par deux dioptrés plans (1 et 2) non parallèles. Les dioptrés forment des images S_1 et S_2 de S (Figure 3.10 A). Ces images se comportent comme des sources ponctuelles mutuellement cohérentes. La figure d'interférence produite par S_1 et S_2 est celle de deux trous d'Young : Il y a des franges contrastées partout dans l'espace (Figure 3.11 A). Supposons à présent que S soit une source

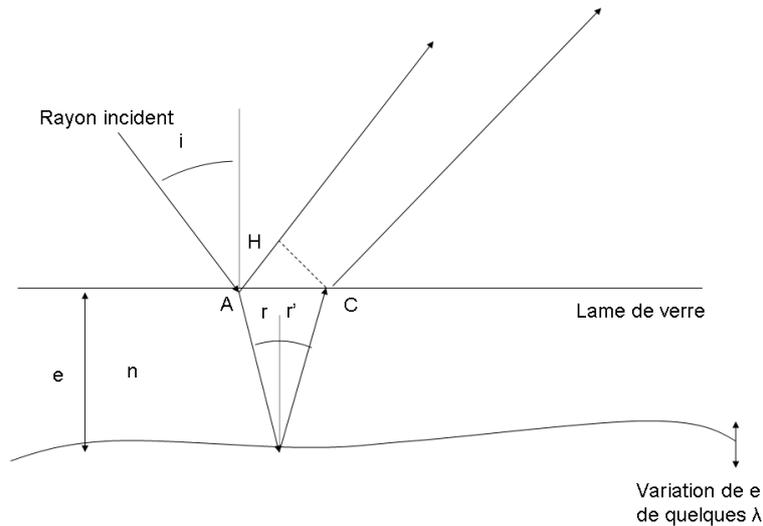


FIGURE 3.9 – lame à épaisseur variable

étendue. Nous pouvons la décomposer en une multitude de sources ponctuelles mutuellement incohérentes dont la position des images par les dioptrés 1 et 2 peut être aisément déterminée (Figure 3.10 B). A chaque source élémentaire correspond deux images et donc un système de franges d’Young avec une disposition précise dans l’espace. Un petit programme peut alors calculer puis sommer *en intensité* les différents interférogrammes produit par chaque source élémentaire de S. Le résultat est représenté dans la Figure 3.11 B). Le contraste des franges est extrêmement faible sauf autour d’une surface proche de la lame de verre. Cette zone est d’autant plus fine que la source est étendue.

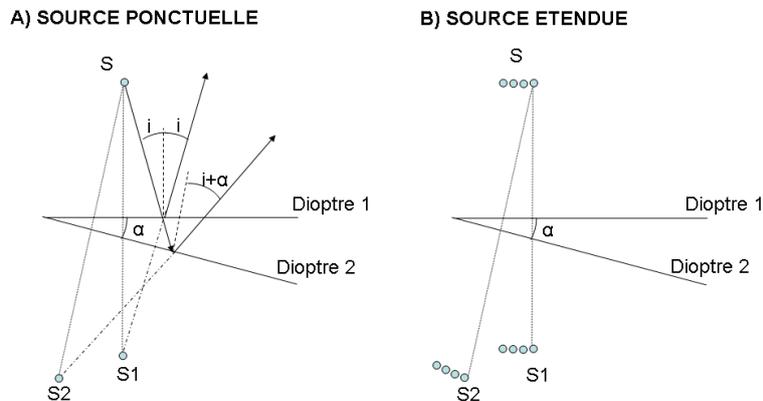


FIGURE 3.10 – lame de verre éclairée par une source ponctuelle (A) et par une source étendue (B)

Pour observer les franges on utilisera souvent un montage expérimental comme le montage de Fizeau (Figure 3.12)

4.2 Franges d’égale épaisseur ou franges de Fizeau

Si les angles d’incidence restent très faibles, le déphasage entre les deux ondes réfléchies est simplement donné par (on adapte la formule de la lame d’égale épaisseur) :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \pi = \frac{4\pi n e}{\lambda} + \pi \tag{3.15}$$

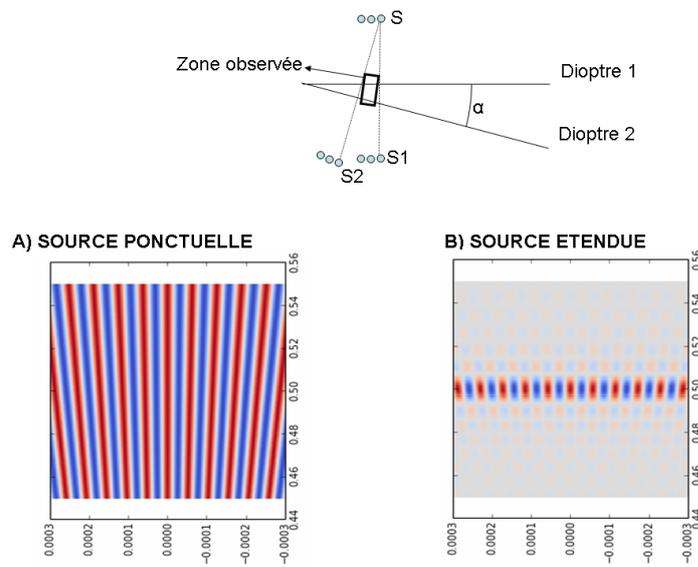


FIGURE 3.11 – Simulation des franges d’interférence au voisinage de la lame de verre (carré noir) pour une source ponctuelle (A) et une source étendue (B). Programme réalisé en langage Python.

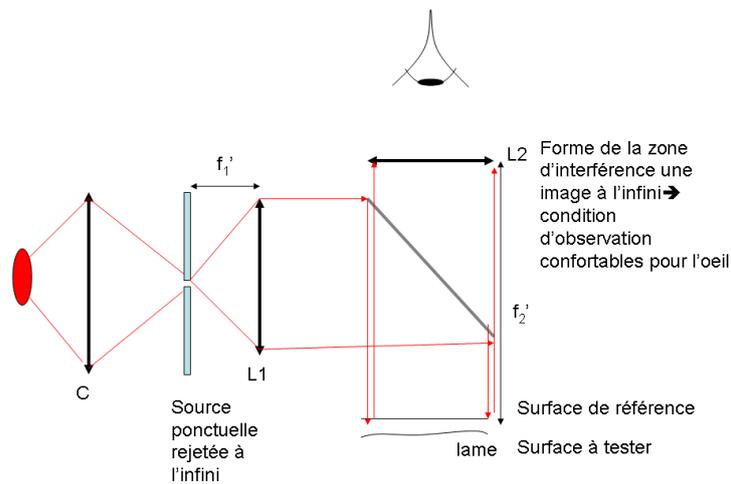


FIGURE 3.12 – Dispositif de Fizeau

où l'épaisseur e dépend de la position sur la lame.

On aura donc une frange brillante au point $A(x,y)$ de la lame si l'épaisseur en A est telle que :

$$e(x,y) = \frac{\lambda}{2n}(p - 1/2) \quad (3.16)$$

4.3 Exemples et applications

Coin de verre

Une situation très simple est celle du coin de verre. Il s'agit d'une lame de verre dont les faces font un angle α très petit entre-elles. L'épaisseur $e(x,y) = e_0 + \alpha x$.

Les franges brillantes sont obtenues lorsque $e_0 + \alpha x = \frac{\lambda}{2n}(p - 1/2)$ ou encore lorsque :

$$x_p = \left(\frac{\lambda}{2n}(p - 1/2) - e_0\right)\alpha \quad (3.17)$$

Les franges sont des droites séparées par une distance constante $i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda}{2n\alpha}$.

Anneaux de Newton

Posons un dioptre sphérique (une lentille plan convexe) sur un dioptre plan et observons la lame d'air ainsi formée à l'aide du dispositif de Fizeau. Nous observerons des franges en anneau concentriques. Ceci correspond au fait que l'épaisseur varie avec la distance au centre de la lentille (voir TD). La symétrie de révolution de la lame d'air se retrouve dans la figure d'interférence.

Observation d'une surface

De manière plus générale, le montage de Fizeau peut être utilisé pour observer et caractériser l'état d'une surface en la comparant à un dioptre de référence (un dioptre parfaitement plan par exemple). Les systèmes modernes de caractérisation de surfaces optiques reposent sur ce principe (interféromètre "Zygo"). La source collimatée monochromatique est aujourd'hui remplacée par un laser et l'oeil de l'expérimentateur par une caméra CCD couplée à un ordinateur. Un algorithme reconstruit la surface à partir de la position des franges d'interférences.

Couleurs d'une bulle de savon

Une lame de savon (par exemple la mince paroi d'une bulle de savon) peut parfaitement être employée pour observer des franges d'égal épaisseur. La divergence du rayonnement solaire direct est suffisamment faible pour procéder à une telle observation. Il y a cependant une différence considérable avec les situations considérées jusqu'à présent : le soleil est une source polychromatique (lumière blanche au spectre quasi uniforme dans le domaine visible). Si la lame est suffisamment fine, il est cependant possible d'observer des irisations colorées à la surface de la bulle. Chaque couleur correspond alors à une épaisseur de la lame.

Pour une épaisseur donnée, plusieurs longueurs d'onde conduisent à des interférences destructives. Certaines de ces longueurs d'onde sont situées dans le domaine visible. Plus l'épaisseur est fine, plus l'écart entre ces longueurs d'onde est grand. Les irisations colorées apparaissent lorsqu'une portion importante du spectre visible peut être fortement atténuée par interférence destructive.

5 Interféromètre de Michelson

5.1 Présentation du dispositif

Les montages précédents souffrent de deux inconvénients. Tout d'abord, l'essentielle de la puissance lumineuse est perdue dans les ondes transmises (voir tableau 3.1). Ensuite, la géométrie est complètement fixée

(épaisseur de la lame, angle du coin de verre...). L'interféromètre de Michelson que nous allons à présent aborder est un dispositif à division d'amplitude bien plus optimisé et bien plus flexible. Toutefois, les paragraphes précédents ne sont pas sans intérêt puisque, comme nous allons le voir, l'interféromètre de Michelson permet de "simuler" à volonté une lame à face parallèle ou un coin de milieu réfringent. Tous les résultats énoncés plus haut pourront être réutilisés.

Cet interféromètre est représentatif de nombreux interféromètres modernes. Il est également célèbre en histoire des sciences. C'est avec cet instrument que Michelson et Morlay ont réalisé des expériences montrant l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel, ouvrant ainsi la voie à la relativité restreinte (Einstein 1905).

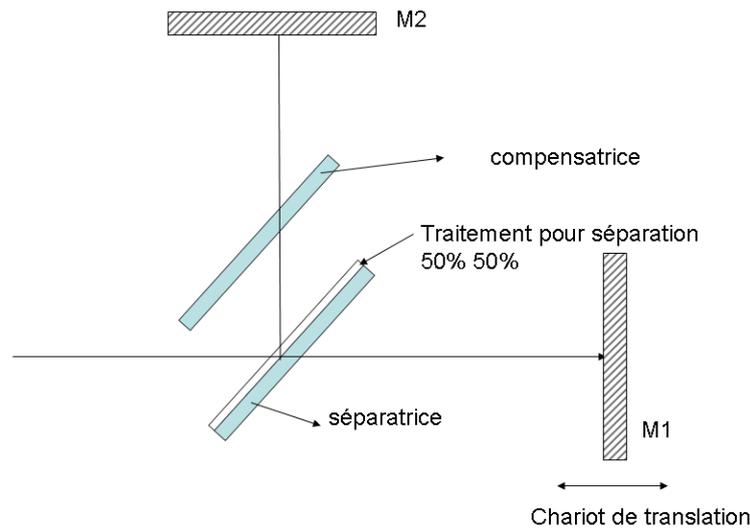


FIGURE 3.13 – L'interféromètre de Michelson

La structure de l'interféromètre de Michelson est représentée sur la figure 3.13. La lumière incidente est partiellement réfléchi et partiellement transmise par une lame semi-réfléchissante appelée **séparatrice**. Les deux faisceaux ainsi générés se propagent suivant deux voies : les deux bras de l'interféromètre. Les directions des deux bras de l'interféromètre forment un angle droit. Ils se réfléchissent sur deux miroirs plans M1 et M2 et parcourent les bras en sens inverse pour revenir sur la séparatrice. Le faisceau transmis est partiellement réfléchi par la séparatrice tandis que le faisceau réfléchi est partiellement transmis. Les faisceaux ayant parcouru les deux bras sortent ainsi du même côté de l'interféromètre, où un dispositif de visualisation des franges peut être installé. Notons qu'une partie de leur lumière repart également vers la source. Le miroir M2 est monté sur un chariot que l'on peut translater le long de l'axe du bras avec une grande précision.

En pratique, une lame supplémentaire, la **compensatrice**, est installée dans l'interféromètre de Michelson et permet d'équilibrer le nombre de passages dans du verre. Si l'ensemble est bien réglé, nous pouvons alors modéliser le couple séparatrice + compensatrice comme une lame séparatrice infiniment mince qui ne perturbe pas les trajets des faisceaux lumineux.

5.2 Réglage en coin d'air

Les miroirs M1 et M2 sont réglés de manière à être quasi-perpendiculaires aux axes des bras. La longueur des bras est supposée quelconque pour le moment. L'écart de longueur est noté e_0 . On note M'1 l'image de M1 par la séparatrice. M'1 se situe au dessus (ou au dessous) de M2 suivant le signe de e_0 . Les surfaces de M2 et M'1 forment alors un petit angle entre elles noté α (figure 3.14). Le Michelson se comporte alors comme un coin d'air dont on pourrait changer l'épaisseur et l'angle à volonté (en translantant M2 et en réglant son orientation).

Comme pour le coin de verre vu précédemment, si l'on éclaire le Michelson avec une source collimatée et monochromatique, des franges rectilignes seront visible dans une région proche de M2 et M'1. Le déphasage entre les ondes des deux bras de l'interféromètre prend une forme similaire à celle du coin d'air à deux différences prêt : (1) l'indice de réfraction vaut $n=1$, (2) les déphasages introduits par les réflexions sur la séparatrice et le miroir sont les mêmes pour les deux bras, il n'y a donc pas de déphasage de π .

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{4\pi e(x,y)}{\lambda} \tag{3.18}$$

Nous avons introduit $e(x,y)$, "l'épaisseur" locale du coin d'air au point (x,y) , c'est à dire l'écart entre M2 et M'1 au point (x,y) .

Dans la géométrie décrite dans la figure 3.14, on a $e(x,y) = e_0 + x\tan(\alpha)$.

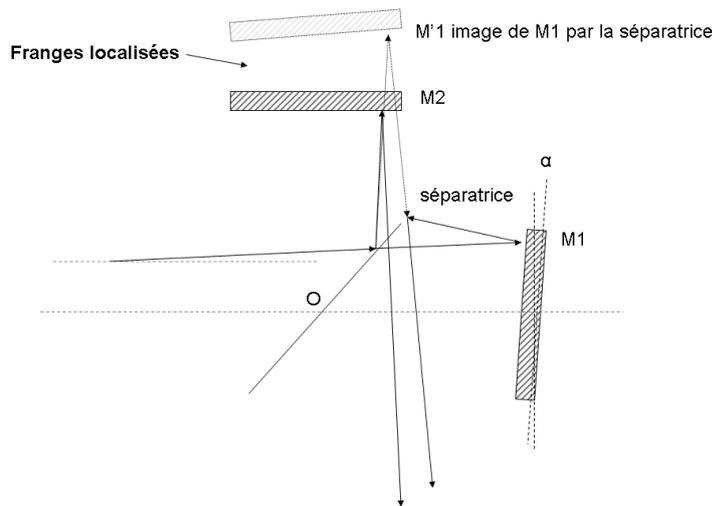


FIGURE 3.14 – L'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air

5.3 Réglage en lame d'air

Supposons à présent que l'on annule l'angle α (figure 3.15). Les surfaces M'1 et M2 sont alors parallèles. Le Michelson est alors équivalent à une lame d'air d'épaisseur e_0 . Les franges sont alors des anneaux d'égale inclinaison que l'on peut observer à l'infini (en plaçant une lentille convergente à la sortie du Michelson, ou en observant directement à l'oeil sans accommoder). Le déphasage entre les ondes sortant de l'interféromètre ne dépend plus que de l'angle d'incidence i sur l'interféromètre :

$$\Delta\phi(i) = \frac{4\pi e_0 \cos(i)}{\lambda} \tag{3.19}$$

5.4 Obtention de la teinte plate

Lorsque l'on diminue e_0 en déplaçant le chariot du miroir M2, on observe que les anneaux sont de moins serrés. Si e_0 est très faible il ne reste plus qu'un anneau dans le champ de vision. Si finalement $e_0 = 0$, le diamètre de l'anneau restant est infini, l'intensité dans le champ d'observation devient uniforme. On dit que l'interféromètre est réglé **à la teinte plate**. Lorsque l'on éclaire avec une lumière blanche l'interféromètre réglé à proximité de la teinte plate, on observe un champ uniformément blanc pour $e_0 = 0$, puis une succession d'irisations pour une valeur de e_0 légèrement différente. Lorsque e_0 devient plus important on observe à nouveau du blanc (blanc d'ordre supérieur).

En résumé, le réglage de l'interféromètre s'effectue de la manière suivante.

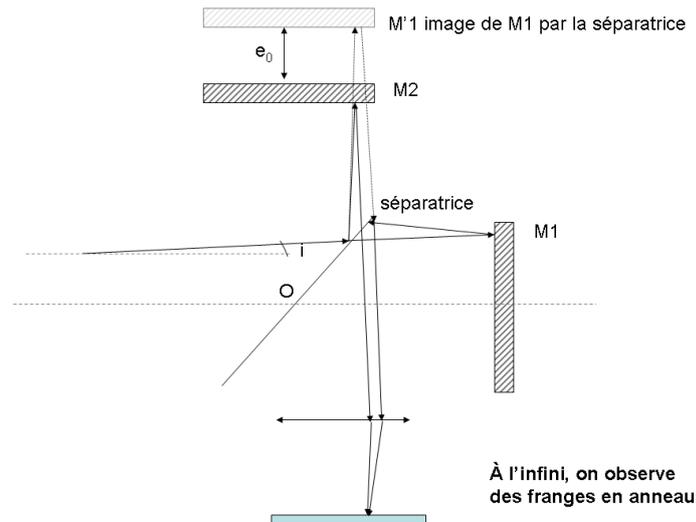


FIGURE 3.15 – L'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

1. Réglage grossier pour aligner approximativement les optiques.
2. Obtention des franges d'égal épaisseur : les miroirs forment un faible angle entre eux.
3. Obtention d'anneaux d'égal inclinaison : les miroirs sont parallèles.
4. Obtention de la teinte plate : les longueurs des bras sont identiques.
5. Affinage de la teinte plate en lumière blanche.

5.5 Applications

L'interféromètre de Michelson a connu de nombreux développements depuis sa forme originelle. Par exemple, on réalise aujourd'hui des interféromètres de Michelson en fibre optique.

Citons quelques applications de cet interféromètre.

- Contrôle des caractéristiques d'optiques (miroirs, lentilles).
- tests fondamentaux (détermination de l'invariance de la vitesse de la lumière avec le référentiel)
- mesure de position absolue en effectuant des interférences en lumière blanche. Un objet est placé sur l'un des bras de l'interféromètre et sert de miroir M2. On éclaire le dispositif en lumière blanche. Des franges contrastées sont observées uniquement si l'autre bras de l'interféromètre à une longueur égale à celle du bras "objet". On détermine de cette manière la distance de l'objet à la séparatrice. Cette idée est à la base de la tomographie par cohérence optique (Optical Coherence tomography ou OCT) qui, couplée à la microscopie et à des méthodes de balayage optique (avec des miroirs tournants) permet de reconstruire la structure 3D de tissus vivants (peau, rétine...).

6 Interféromètre de Fabry-Pérot

6.1 Présentation du dispositif

L'interféromètre Fabry-Pérot est un interféromètre à division d'amplitude et à ondes multiples. Nous présentons sa structure dans la figure 3.18. Deux lames de verre sont placées l'une en face de l'autre de manière à créer une lame d'air d'épaisseur e . Les faces en vis-à-vis sont parallèles entre elles. Elles ont été traitées de manière à présenter une réflectivité très proche de 1. Les faces extérieures sont inclinées pour ne pas créer deux

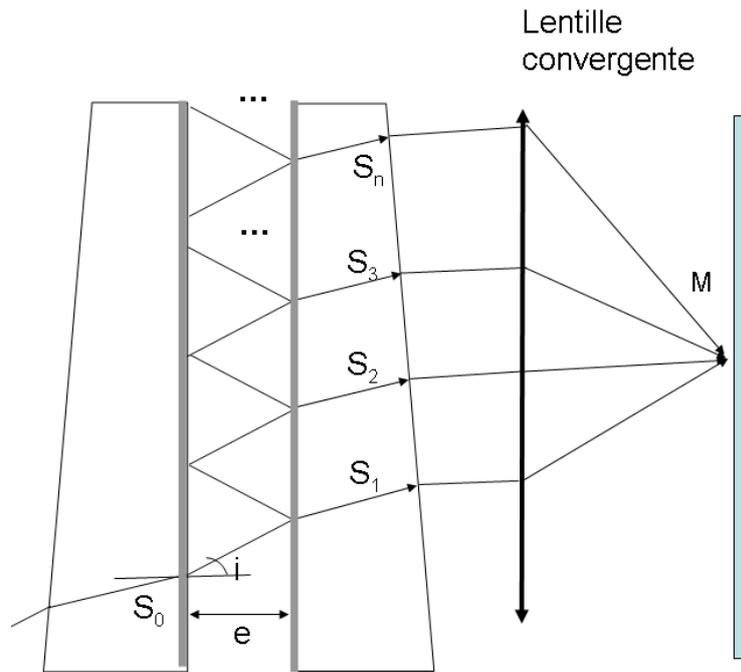


FIGURE 3.16 – Interféromètre de Fabry-Pérot

lames de verre qui viendraient perturber le fonctionnement de l’instrument. Les interférences sont observées à l’infini, par exemple au foyer d’une lentille convergente.

Formellement, son principe serait celui d’une lame à face parallèle dont la réflectivité serait très élevée. Une onde incidente crée une infinité d’ondes transmises et réfléchies. A la différence de la lame à face parallèle, les amplitudes entre deux ondes consécutives sont peu différentes. Pour déterminer la figure d’interférence il est donc nécessaire de tenir compte de la superposition des amplitudes de toutes les ondes sortant d’un côté du Fabry-Pérot (nous nous intéresserons ici aux ondes sortant par l’arrière de l’interféromètre comme dans la figure 3.18).

Notons s_0 l’amplitude d’une onde plane incidente sur la première face parallèle. Après passage du dioptre verre-air, son amplitude est notée $t_{va}s_0$, où t_{va} est la transmission à travers le dioptre verre-air. La première onde sortant de l’interféromètre a pour amplitude au niveau du détecteur $s_1 = t_{va}t_{av}e^{i\phi_1}s_0$, où t_{av} est la transmission à travers le dioptre air-verre. On néglige par ailleurs les pertes introduites par le tout dernier dioptre. Ici, ϕ_1 représente le déphasage introduit par la propagation depuis la première face jusqu’au détecteur. Nous verrons que nous n’avons pas besoin de le connaître. Pour alléger les notations nous écrirons $t^2 = t_{av}t_{va}$. Nous pouvons alors calculer s_2 , l’amplitude au niveau du détecteur de la deuxième onde sortant par l’arrière du Fabry-Pérot : $s_2 = r^2t^2e^{i\phi_1}e^{i\phi}s_0 = r^2e^{i\phi}s_1$, où ϕ est le déphasage entre l’onde 1 et l’onde 2 au niveau du détecteur. Ce déphasage se calcule de manière analogue à celui de la lame d’air du Michelson. Par ailleurs, en nous intéressant aux ondes suivantes, nous voyons qu’il est possible d’écrire une relation de récurrence entre leurs amplitudes au niveau du détecteur : $s_n = r^2e^{i\phi}s_{n-1}$. Résumons-nous :

$$s_1 = t^2e^{i\phi_1}s_0$$

$$s_n = r^2e^{i\phi}s_{n-1}$$

$$\phi = 4\pi e \cos(i)/\lambda \tag{3.20}$$

$$\tag{3.21}$$

Nous avons introduit i l’angle de propagation des ondes dans la lame d’air. L’amplitude au niveau du

détecteur est alors la somme des amplitudes des multiples ondes produites.

$$s_{tot} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

$$s_{tot} = t^2 e^{i\phi} s_0 \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{i\phi})^n \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

La dernière expression fait apparaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison $r^2 e^{i\phi}$. Le module de cette raison est inférieur à un car $r < 1$. Par conséquent, l'amplitude du champ vaut :

$$s_{tot} = t^2 e^{i\phi} s_0 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\phi}} \quad (3.24)$$

L'intensité sur le détecteur est alors :

$$I_{tot} = (1 - R)^2 I_0 \frac{1}{|1 - r^2 e^{i\phi}|^2} \quad (3.25)$$

Nous avons introduit $I_0 = |s_0|^2$, $R = r^2$ et $T = 1 - R = t^2 = t_{av} t_{va}$.

$$I_{tot} = (1 - R)^2 I_0 \frac{1}{(1 - r^2 e^{i\phi})(1 - r^2 e^{-i\phi})} \quad (3.26)$$

$$I_{tot} = (1 - R)^2 I_0 \frac{1}{(1 + R^2 - 2R \cos(\phi))} \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

Pour connaître la forme des franges dans le plan focal de la lentille, il faut regarder la dépendance spatiale de la phase ϕ . Seul l'angle i intervient ici. Pour des raisons totalement analogues à celles de la lame à faces parallèles, les franges d'interférence sont des anneaux. Nous voyons que l'intensité est maximum lorsque $\phi = 2\pi p$ et minimum lorsque $\phi = 2\pi p + \pi$. En d'autres termes, l'intensité est maximum lorsque toutes les ondes qui interfèrent sont en phase les unes par rapport aux autres, ce qui ne semble pas surprenant.

6.2 Calcul de la transmission

La transmission du Fabry-Pérot est I_{tot}/I_0 . Puisque la réflectivité R de chaque face est élevée, on s'attend à ce que la transmission soit de l'ordre de $T^2 = (1 - R)^2$, c'est à dire très faible. Un dioptre très réfléchissant suivi d'un dioptre tout aussi réfléchissant devrait constituer un système qui transmet très peu la lumière. Ceci est effectivement le cas lorsque $\phi = 2\pi p + \pi$. Pour le cas $\phi = 2\pi p$, il est cependant aisé de montrer que $I_{tot}/I_0 = 1$ et que toute la lumière incidente est transmise !

Contrairement aux interférences à deux ondes où la transition entre minima et maxima est une douce sinusoïde, les maxima sont ici très piqués. Pour prouver ce point modifions l'expression de l'intensité transmise en utilisant la formule trigonométrique $2\sin^2(\phi/2) = 1 - \cos(\phi)$.

$$I_{tot} = (1 - R)^2 I_0 \frac{1}{(1 + R^2 - 2R + 4R \sin^2(\phi/2))}$$

$$I_{tot} = (1 - R)^2 I_0 \frac{1}{((1 - R)^2 + 4R \sin^2(\phi/2))}$$

$$I_{tot} = I_0 \frac{1}{(1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\phi/2))} \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

Ce qui conduit à l'expression standard de l'intensité en sortie du Fabry-Perot

$$I_{tot} = I_0 \frac{1}{(1 + F \sin^2(\phi/2))} \quad (3.31)$$

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

Si R est proche de 1, $1-R$ est alors très petit. Dans ces conditions, le terme F est très grand. Par exemple, si $R=0.99$, le terme $F \approx 40000!$ Si $\phi = 2\pi p$, le sinus est nul et $I_{tot}=I_0$. En revanche, une infime variation de ϕ conduira à une petite variation du sinus qui sera fortement amplifiée par F . L'intensité I_{tot} chutera alors très rapidement.

6.3 Caractéristiques spectrales

Intervalle spectral libre

Les remarques précédentes ont des conséquences très intéressantes sur les propriétés spectrales de cet interféromètre. Supposons que nous ne regardions que le rayonnement émis autour de la direction $i=0$. Quelles sont les longueurs d'ondes ou les fréquences conduisant à un maximum d'intensité? Ce sont celles pour lesquelles $\phi = 2\pi p = 4\pi e/\lambda$. L'intensité est maximum si :

$$\lambda_p = \frac{2e}{p} \quad (3.34)$$

$$\nu_p = p \frac{c}{2e} \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

L'intervalle spectral entre deux fréquences ν_p est appelé **Intervalle spectral libre ou ISL** :

$$ISL = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c}{2e} \quad (3.37)$$

Dans une direction donnée, l'interféromètre sélectionne certaines fréquences optiques et en rejette d'autres, à vrai dire comme tout interféromètre. L'intérêt du Fabry Pérot réside dans l'extrême sensibilité des maxima d'intensité au déphasage ϕ . Ainsi, une infime variation de fréquence autour de ν_p conduit à une chute rapide du signal. Quelle est alors la bande passante de l'interféromètre autour de ν_p ?

Finesse spectrale

Calculons la largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\nu$ d'un maximum d'intensité. On sait que l'intensité $I_{tot}(\nu)$ est maximale si $\nu = \nu_p = pISL$ et vaut I_0 . La largeur à mi-hauteur de ce maximum est donc telle que $I_{tot}(\nu_p + \Delta\nu/2) = I_0/2$. Nous avons alors :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\phi/2)} \quad (3.38)$$

$$1/F = \sin^2(\phi/2) \quad (3.39)$$

$$1/F = \sin^2\left(\frac{2\pi e}{c}(\nu_p + \Delta\nu/2)\right) \quad (3.40)$$

$$1/F = \sin^2\left(\frac{\pi e}{c}\Delta\nu\right) \quad (3.41)$$

$$(3.42)$$

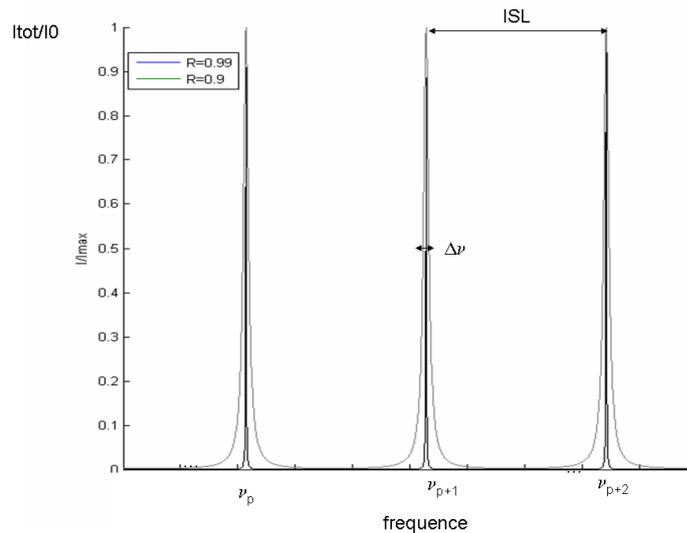


FIGURE 3.17 – transmission d’un Fabry-Pérot en fonction de la fréquence de l’onde incidente.

Nous nous attendons à ce que $\Delta\nu$ soit petit (nous pourrions le vérifier à posteriori). Nous pouvons alors linéariser le sinus.

$$1/F \approx \left(\frac{\pi e}{c} \Delta\nu\right)^2 \tag{3.43}$$

$$\Delta\nu \approx \frac{c}{\pi e \sqrt{F}} \tag{3.44}$$

$$\tag{3.45}$$

Comparons $\Delta\nu$ à l’intervalle spectral libre ISL :

$$\Delta\nu \approx ISL \frac{2}{\pi \sqrt{F}} \tag{3.46}$$

$$\tag{3.47}$$

En conclusion, plus la réflectivité est grande, plus F est grand et plus $\Delta\nu$ est petit par rapport à l’ISL. Le Fabry Perot est donc potentiellement un filtre spectral très sélectif.

6.4 Applications

Spectroscopie

La finesse spectrale de l’interféromètre de Fabry-Pérot fait de ce dernier un instrument de choix pour réaliser des expériences de spectroscopie fines sur des plages spectrales petites. La mise en évidence de l’effet Zeeman est souvent effectuée en TP avec cet instrument. Un inconvénient majeur de cet interféromètre provient du fait que c’est un excellent filtre passe-bande...ayant une multitude de bandes passantes séparées par un intervalle spectral libre. On ne peut donc étudier que des phénomènes ayant une variation spectrale $\delta\nu$ telle que $\Delta\nu < \delta\nu < ISL$.

Filtre interférentiel

L’intervalle spectral libre augmente cependant lorsque l’épaisseur e de lame d’air du Fabry-Pérot diminue. Lorsque celle-ci est extrêmement fine (de l’ordre de la longueur d’onde), il est possible d’obtenir un filtre passe bande très sélectif autour d’une longueur d’onde du spectre visible et par ailleurs capable de rejeter toutes les autres longueurs d’onde visibles. Un tel dispositif est appelé **Filtre interférentiel**.

Cavité laser

Lorsqu'un système possède une très fine bande passante autour d'une fréquence, il est souvent le siège d'un phénomène de résonance : le système échange efficacement de l'énergie avec la source excitatrice. Ceci est bien le cas ici puisque la fréquence ν_p correspond à un maximum de transmission. De plus, à la résonance, le système stocke une quantité importante de puissance. Cette quantité est d'autant plus grande que la résonance est étroite. On peut montrer que l'intensité stockée dans le Fabry Péroth est $I_{sto} = 2I_{tot}/(1 - R)$. Si R est proche de 1, on voit alors que l'intensité stockée est plusieurs ordres de grandeur supérieure à l'intensité sortante, ou, à la résonance, à l'intensité entrante. Le Fabry-Pérot est un exemple de cavité électromagnétique résonante (voir TP "hyperfréquences").

Cette propriété est mise à profit dans les LASER. Schématiquement le Fabry-Pérot est rempli d'un milieu capable d'amplifier la lumière dans une certaine plage de fréquences. Si cette plage de fréquences coïncide avec une (ou plusieurs) fréquences ν_p de l'interféromètre, l'intensité correspondant à ces fréquences sera considérablement renforcée. A la sortie de dispositif on aura émission d'une lumière à la fois intense et monochromatique. En électronique, la mise en rétroaction d'un filtre (ou résonateur) avec un amplificateur est appelée "oscillateur". Un LASER est un oscillateur optique.

7 Conclusion

Dans ce chapitre nous n'avons présenté que quelques dispositifs interférométriques classiques. De nombreux autres dispositifs existent et répondent à des besoins spécifiques. Néanmoins, les raisonnements pour comprendre et prévoir leur fonctionnement resteront analogues. Par ailleurs, l'arrivée de sources intenses et cohérentes comme les lasers simplifie considérablement le réglage et l'utilisation des interféromètres.

A titre d'exemple et de perspective nous présentons sur la dernière figure VIRGO, un interféromètre destiné à détecter des ondes gravitationnelles, de fines variations de la métrique de l'espace-temps induites par la fusion de trous noirs dans des galaxies lointaines.

- Il s'agit d'un interféromètre de Michelson dont chaque bras comporte un interféromètre de Fabry-Pérot !
- Une variation de la distance sur l'un des bras se traduira par un changement de différence de marche et donc par une variation d'intensité sur le détecteur placé en sortie de l'appareil.
- Il n'y a donc rien qui ne vous soit maintenant étranger, à quelques détails près :
- Un laser d'une grande puissance et d'une grande stabilité sert de source au dispositif.
- Les variations relatives de distance attendues sont si infimes qu'un bras de l'interféromètre (donc un Fabry Péroth) doit avoir une longueur de ...3 kilomètres !

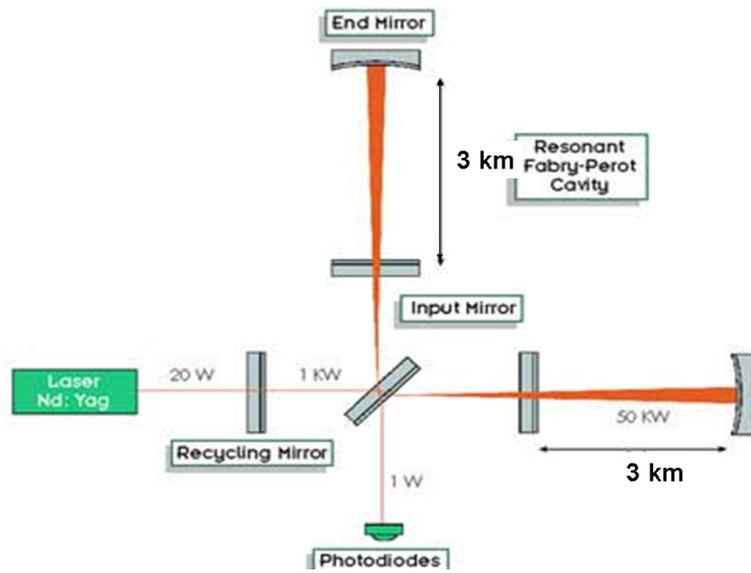


FIGURE 3.18 – Interféromètre Virgo

Chapitre 4

Polarisation de la lumière

1 Qu'est ce que la polarisation ?

La polarisation est une propriété spécifique aux ondes lumineuses et découle de la nature vectorielle des ondes électromagnétiques (voir chapitre 1). La polarisation de la lumière désigne la direction de vibration du champ électrique d'une onde électromagnétique. Cette direction peut être fixe dans le temps, évoluer dans le temps de manière prévisible et régulière ou aléatoirement au cours du temps.

1.1 Lumière polarisée rectilignement

Considérons une onde électromagnétique monochromatique plane dont le champ électrique évolue de la manière suivante :

$$E(r, t) = \mathbf{e}_u E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (4.1)$$

où \mathbf{e}_u est un vecteur unitaire de direction quelconque. La direction du champ électrique est alors fixe au cours du temps (son sens, en revanche, oscille périodiquement). On dit que cette onde est **polarisée linéairement**. Considérons un repère orthogonal (O,x,y,z) tel que la direction de z soit parallèle à celle du vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$. On peut alors décomposer \mathbf{e}_u dans la base du repère. En introduisant l'angle θ entre \mathbf{e}_u et \mathbf{e}_x on peut écrire :

$$\mathbf{e}_u = \cos(\theta)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\mathbf{e}_y \quad (4.2)$$

L'onde polarisée linéairement est donc la somme de deux ondes polarisées linéairement suivant x et y ayant la même phase :

$$\mathbf{E}(r, t) = \cos(\theta)E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\mathbf{e}_y \quad (4.3)$$

$$= (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (4.4)$$

Ou encore en notation complexe :

$$\tilde{\mathbf{E}}(r, t) = (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.5)$$

1.2 Lumière polarisée elliptiquement

Les équations de l'électromagnétisme sont linéaires. La combinaison linéaire de deux solutions est aussi solution. C'est ce que nous voyons sur l'exemple précédent : une onde polarisée linéairement peut s'exprimer comme la somme d'une onde polarisée linéairement suivant x et d'une onde polarisée suivant y de même phase. La nature autorise bien sûr des situations où ces deux ondes **ne sont pas en phase** mais déphasées de ϕ .

$$\mathbf{E}(r, t) = E_x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\mathbf{e}_x + E_y \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)\mathbf{e}_y \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

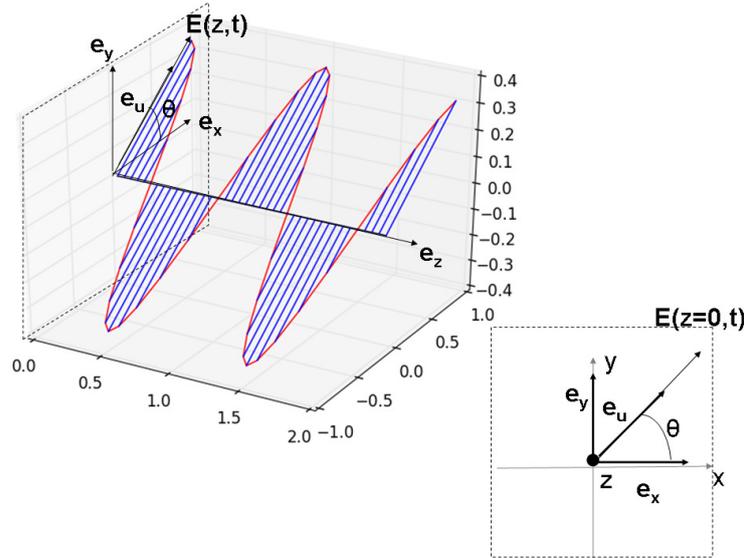


FIGURE 4.1 – Onde monochromatique polarisée linéairement.

ou encore, en notation complexe :

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = (E_x \mathbf{e}_x + E_y e^{i\phi} \mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{4.8}$$

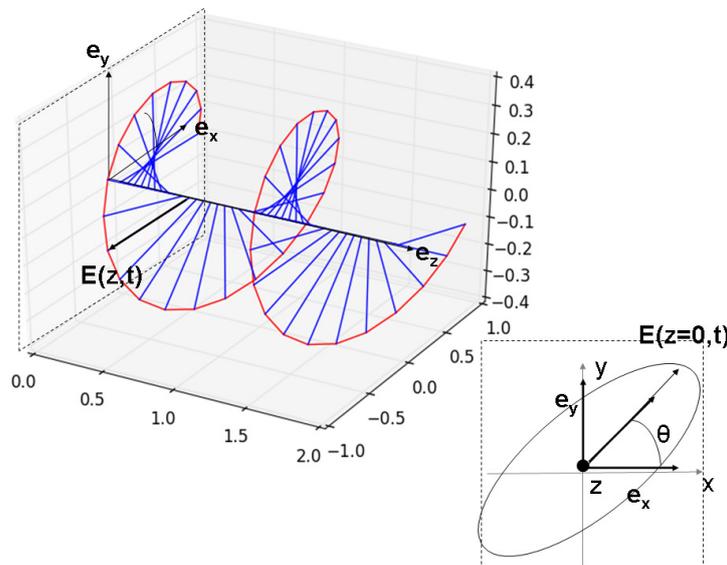


FIGURE 4.2 – Exemple d’une onde monochromatique polarisée elliptiquement.

Cette onde est polarisée elliptiquement (ou encore, sa polarisation est elliptique). En effet, si l’on se place en un point de l’espace, l’extrémité de la flèche du vecteur champ électrique \mathbf{E} décrit au cours du temps une trajectoire en forme d’ellipse contenue dans le plan (O,x,y) .

Quelques cas particuliers (voir figure 4.3) :

- Si $\phi = 0$, on retrouve une onde polarisée linéairement suivant la direction \mathbf{e}_u (l’ellipse est aplatie !).
- Si $\phi = \pi$, on obtient une onde polarisée linéairement suivant une direction \mathbf{e}_v , symétrique de \mathbf{e}_u par rapport

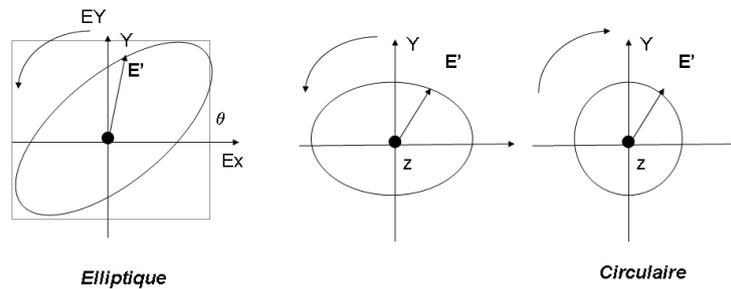


FIGURE 4.3 – Différents états de polarisation de la lumière apparentés à la polarisation elliptique.

à (0x).

- Si $\phi = \pi/2$, le cosinus de la composante suivant (Oy) devient un sinus ($\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$). La trajectoire du vecteur champ électrique est une ellipse dont les axes sont (Ox) et (Oy) et qui tourne dans le sens retrograde.
- Si $\phi = -\pi/2$, le cosinus de la composante suivant (Oy) devient un sinus ($\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$). La trajectoire du vecteur champ électrique est une ellipse dont les axes sont (Ox) et (Oy) et qui tourne dans le sens direct.

1.3 lumière polarisée circulairement

Il s’agit du cas particulier d’une polarisation elliptique pour laquelle $E_x = E_y = E_0$. On distingue les ondes circulaires droites des ondes circulaires gauche.

- Si, lorsqu’on regarde la lumière venir vers nous, le champ tourne dans le sens direct, l’onde est circulaire gauche.
- Si, lorsqu’on regarde la lumière venir vers nous, le champ tourne dans le sens retrograde, l’onde est circulaire droite.

Notation complexe ($\pm i = e^{\pm i\pi/2}$) :

$$\tilde{\mathbf{E}}(r, t) = (E_0\mathbf{e}_x \pm iE_0\mathbf{e}_y)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{4.9}$$

Théorème 1 : toute onde polarisée circulairement est la superposition de deux ondes polarisées linéairement.

Ceci est évident compte tenu de la manière dont nous avons construit ces ondes.

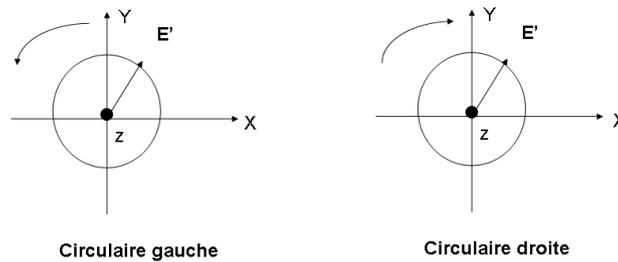


FIGURE 4.4 – Polarisation circulaire.

Théorème 2 : toute onde polarisée linéairement est la superposition de deux ondes circulaires droite et gauche.

Ce résultat est moins évident et sera particulièrement utile. Démonstration : considérons une onde polarisée linéairement suivant \mathbf{e}_u .

$$\mathbf{E}(r, t) = (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{4.10}$$

$$= (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y) E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{4.11}$$

Utilisons les formules d’Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

$$\mathbf{E}(r, t) = \left((e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \mathbf{e}_x - i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \mathbf{e}_y \right) \frac{E_0}{2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \tag{4.12}$$

$$= (\mathbf{e}_x - i \mathbf{e}_y) \frac{E_0}{2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta)} + (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) \frac{E_0}{2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \theta)} \tag{4.13}$$

CQFD ! le premier terme est une onde circulaire gauche tandis que le second est une onde circulaire droite. Les deux ondes ont le même module mais pas la même phase.

1.4 Modèle de lumière non polarisée

Dans la nature, nous sommes très souvent confrontés à des sources non polarisées, dont la direction de polarisation change de manière aléatoire au cours du temps. Cette évolution erratique est liée au caractère aléatoire de l’émission spontanée (émission d’un photon à un instant aléatoire, dans une direction aléatoire avec un état de polarisation aléatoire) des atomes formant la source. Un modèle très simple consiste à reprendre l’équation 4.7 en supposant que le déphasage ϕ varie aléatoirement au cours du temps.

Nous n’irons pas plus loin dans cette description. Notons simplement que l’intégralité des concepts développés dans le chapitre 2 (cohérence) est généralisable à un champ vectoriel. Une onde polarisée (circulairement, linéairement ou elliptiquement...) est ainsi une onde pour laquelle les composantes du champ suivant x et y sont mutuellement cohérentes. Ces idées conduisent au *formalisme de Stokes* que nous ne développerons pas ici et qui permet de traiter toute situation de polarisation (y compris la lumière partiellement polarisée).

Nous allons étudier à présent comment, à partir d’une source non polarisée, il est possible de générer des ondes polarisées linéairement puis, circulairement. Nous nous demanderons par ailleurs comment mettre en évidence le caractère polarisé de cette onde.

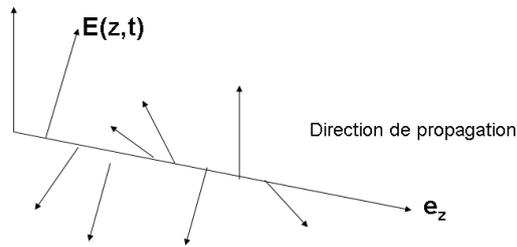


FIGURE 4.5 – Champ d'une onde non polarisée

2 Mise en évidence expérimentale

2.1 Génération de lumière polarisée

Réflexion vitreuse

Les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 dépendent non seulement de l'angle d'incidence et des valeurs des indices mais aussi de la polarisation de l'onde (voir annexe 1). On distingue deux directions de polarisation particulières. Les ondes TE dont la polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence (et parallèle au plan du dioptre) et les ondes TM dont la polarisation est contenue dans le plan d'incidence (le champ magnétique est alors perpendiculaire à ce plan). On montre que pour un angle d'incidence bien particulier appelé angle de Brewster, le coefficient de réflexion de la polarisation TM s'annule et seules les ondes TE sont réfléchies. Le faisceau réfléchi est alors polarisé.

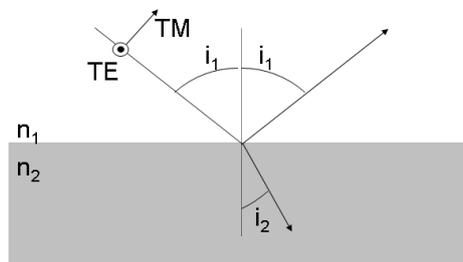


FIGURE 4.6 – Etats de polarisation pour une onde incidente sur un dioptre plan.

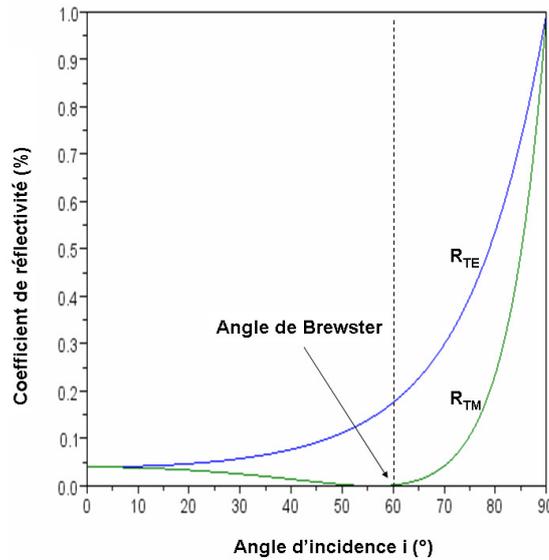


FIGURE 4.7 – Coefficients de Fresnel en réflexion.

L'angle de Brewster i_B est donné par :

$$\tan(i_B) = n_2/n_1 \tag{4.14}$$

Historiquement, cette méthode a permis de mettre en évidence la polarisation de la lumière. Un tel dispositif est cependant peu efficace : l'essentiel de la lumière incidente est transmise et ne contribue pas au faisceau polarisé.

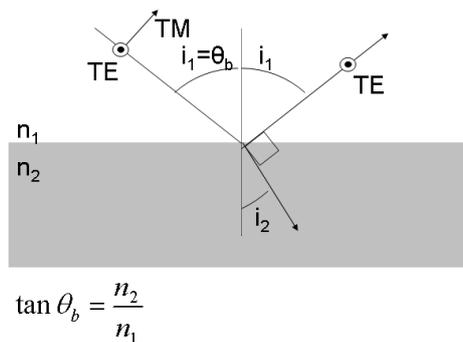


FIGURE 4.8 – Onde en incidence de Brewster.

Remarque 1 : A l'incidence de Brewster, une onde polarisée TM est intégralement transmise ($T_{TM}=1$ car $R_{TM} = 0$). Cette configuration est utilisée lorsque l'on souhaite annuler les pertes par réflexion au passage d'un dioptre. Les lasers à gaz ont pour milieu "actif" un mélange gazeux enfermé dans un tube capillaire de faible diamètre et de grande longueur. Le tube est souvent fermé par deux lames de Brewster.

Remarque 2 : la lumière solaire (non polarisée) se réfléchissant sur un dioptre (eau, glace, neige...) sera partiellement polarisée. C'est pour cette raison que certaines lunettes de soleil sont équipées de verres traités

pour absorber une polarisation.

Films polaroïdes

Il existe des milieux capables d’absorber une composante du champ électrique. Dans le domaine radiofréquence, une grille formée de tiges métalliques parallèles absorbe la composante de champ parallèle aux tiges et laisse passer l’autre composante. Dans le domaine optique, certains polymères, alignés dans une direction privilégiée, ont un comportement analogue. Cet effet peut être renforcé en piégeant dans le polymère des particules d’argent allongées.

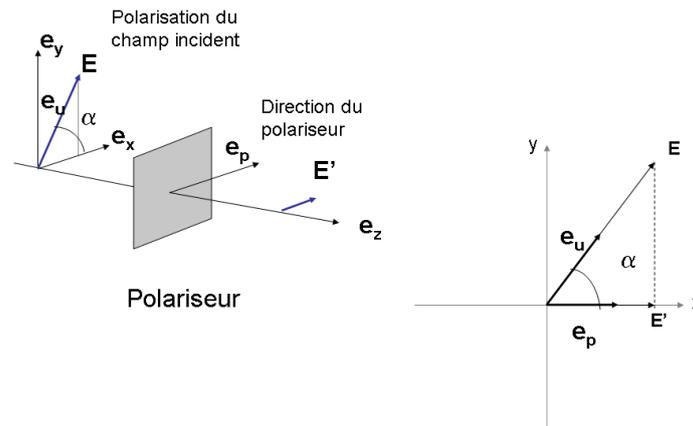


FIGURE 4.9 – Polariseur.

2.2 Relation de Malus

Nous allons décrire le comportement d’un tel polariseur. Supposons que ce dernier ne laisse passer que la composante du champ orientée suivant l’axe du polariseur dont la direction est notée e_p . Le champ après le polariseur E_p est la projection du champ incident E sur la direction du polariseur e_p , ce qui mathématiquement s’écrit :

$$E_p = (E \cdot e_p)e_p \tag{4.15}$$

Si nous introduisons α l’angle entre la direction de la polarisation du champ incident et la direction du polariseur, c’est à dire entre les vecteurs E et e_p , cette relation devient :

$$E_p = (||E|| \cos(\alpha))e_p \tag{4.16}$$

L’intensité lumineuse enregistrée par un détecteur quadratique est proportionnelle à la moyenne du carré du champ. Si I_0 est l’intensité incidente, l’intensité I_p après le polariseur est :

$$I_p = I_0 \cos^2(\alpha) \tag{4.17}$$

Cette relation est appelée **loi de Malus**.

Pour une lumière polarisée linéairement, l’intensité est inchangée si la direction du polariseur coïncide avec la direction de polarisation ($\alpha = 0$). Elle s’annule si les deux directions sont perpendiculaires ($\alpha = \pi/2$).

Qu’en est-il pour une lumière non polarisée ? La direction du champ change en permanence, et cette direction peut être quelconque. Dans la loi de Malus, la valeur du cosinus change et peut prendre toutes les valeurs

dans $[-1, 1]$ de manière équiprobable. Le cosinus au carré peut donc prendre toutes les valeurs entre $[0, 1]$ de manière équiprobable. Sa valeur moyenne sur un temps long (temps caractéristique du détecteur) est alors $1/2$.

$$I_P = I_0/2 \quad (4.18)$$

Ce résultat ne dépend pas de la direction du polariseur.

Pour une lumière polarisée circulairement, on obtient un résultat similaire. Il n'est donc pas possible de distinguer une lumière non polarisée d'une lumière polarisée circulairement avec un polariseur. En revanche, il est possible d'identifier une onde polarisée linéairement en vérifiant qu'elle suit la loi de Malus.

2.3 Polarisation par diffusion

Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, l'interaction d'une onde électromagnétique avec la matière s'effectue au premier ordre à travers son champ électrique. Lorsque cette onde traverse un milieu neutre, diélectrique (l'air ambiant par exemple), son champ électrique induit dans la matière un moment dipolaire électrique. Celui-ci oscille à la même fréquence que l'onde. On montre en électromagnétisme qu'un dipôle électrique oscillant rayonne une onde électromagnétique dans toutes les directions. Cette onde est cependant plus intense dans les directions perpendiculaires à la direction du dipôle induit que dans la direction parallèle à ce dipôle. Enfin, la puissance de cette onde dépend de la fréquence d'oscillation et ν^4 . Au niveau macroscopique, ce phénomène correspond à la diffusion Rayleigh de la lumière. Sa manifestation la plus spectaculaire et néanmoins la plus courante est...le bleu du ciel ! La lumière solaire diffusée par l'atmosphère est partiellement polarisée.

3 Milieux biréfringents

Une réflexion vitreuse ou un polariseur permettent de créer une lumière polarisée linéairement, mais comment obtenir d'autres états de polarisation, elliptiques voire circulaires ? Comme nous allons le voir, on peut créer une onde elliptique à partir d'une onde polarisée linéairement en déphasant la composante suivant x du champ par rapport à sa composante suivant y . Les milieux biréfringents que nous allons maintenant aborder sont couramment utilisés dans ce but.

Dans le chapitre 1, nous avons introduit la notion d'indice de réfraction n d'un milieu. Cet indice est une grandeur inversement proportionnelle à la vitesse de propagation c de l'onde dans ce milieu : $n \propto \frac{1}{c}$. En optique, le facteur de proportionnalité est la vitesse de la lumière dans le vide c_0 . Dans cette présentation, l'indice ne dépendait pas de la direction de propagation et encore moins de la polarisation. Ceci est vrai dans un liquide comme l'eau ou dans du verre. La structure de ces milieux n'a pas de direction privilégiée : ils sont isotropes. Le champ électrique de l'onde interagira de la même manière avec les constituants de la matière quelle que soit son orientation.

Si le milieu possède une structure anisotrope (comme dans un cristal), le champ électrique de l'onde n'aura pas le même effet sur les constituants suivant son orientation dans l'espace. L'orientation du champ électrique dépend de la direction de l'onde (vecteur k horizontal ou vertical par exemple) mais aussi de la polarisation (Si k est suivant (Oz), le champ électrique peut être suivant (Ox) ou (Oy)). Un tel milieu est dit biréfringent car son indice de réfraction va dépendre de la direction de propagation et de la polarisation de l'onde. L'anisotropie conduisant à cette biréfringence peut être liée à la structure naturelle du milieu (structure cristalline, directions privilégiées d'organisation...), mais aussi à des anisotropies provoquées par des actions extérieures ayant une direction privilégiée comme des contraintes mécaniques ou un champ électrique quasistatique. Cette dernière biréfringence provoquée sera particulièrement utile pour construire des dispositifs optoélectroniques.

3.1 Origine de la réfringence

Une onde lumineuse n'a pas besoin d'un milieu matériel pour se propager. La combinaison des équations de Maxwell dans le vide conduit à une équation de d'Alembert de célérité c_0 . Comment expliquer qu'une onde électromagnétique puisse aussi se propager dans un milieu matériel avec une vitesse différente de c_0 ?

Autrement dit, d'où provient l'indice de réfraction ? Nous ne donnerons ici que quelques idées physiques sur ce sujet très vaste (voir cours d'électromagnétisme).

En présence de charges ρ et de courants \mathbf{j} , les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \tag{4.19}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.20}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.21}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{4.22}$$

Une source d'ondes électromagnétiques peut être modélisée comme un milieu traversé par des courants dépendant du temps. Cette modélisation est complexe pour une source lumineuse (il faut déduire de l'équation de Schrödinger des grandeurs électromagnétiques moyennes) mais ne fait intervenir que de l'électrocinétique pour des antennes radios. Mais qu'en est-il d'un matériau traversé par une onde électromagnétique et placé loin de la source de l'onde ? Si le milieu est un conducteur (cuivre, argent...), le champ électrique de l'onde va mettre en mouvement les porteurs de charge du conducteur, et ainsi créer un courant (loi d'Ohm...). Ce courant crée lui-même un champ qui se superpose au champ initial et modifie alors l'action sur les porteurs et donc le courant etc... On montre en électromagnétisme que dans un conducteur soumis à un champ optique, les charges et les courants mis en mouvement par le champ vont, en régime permanent, s'organiser de manière à annuler le champ qui tente de le traverser. Les courants induits dissipent un peu la puissance du champ incident mais surtout génèrent un champ opposé au champ incident. Celui-ci annule le champ incident dans le conducteur ("écranage"). C'est pourquoi un champ optique ne traverse pas un milieu conducteur. En revanche le champ généré par le conducteur rayonne vers l'espace libre : c'est le champ réfléchi par le conducteur. Les conducteurs sont donc d'excellents réflecteurs optiques, c'est pourquoi on les utilise souvent comme revêtement pour les miroirs. Notons que si le champ incident oscille à une fréquence suffisamment grande pour que les porteurs n'aient pas le temps de "s'organiser", ceux-ci ne peuvent "écranter" le champ et par conséquent, le conducteur reste transparent à l'onde. Pour les métaux, ceci n'intervient que pour des ondes dont les fréquences sont dans le domaine extrême ultraviolet.

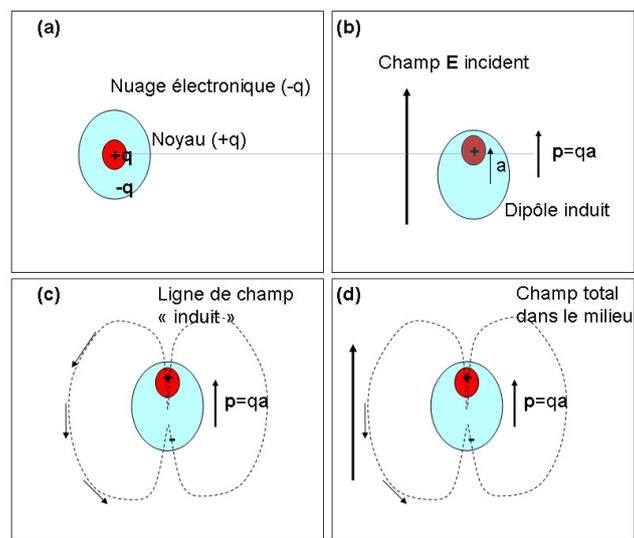


FIGURE 4.10 – Réponse d'un milieu matériel à une onde électromagnétique.

Sur cet exemple, nous voyons que la manière dont le matériau réagit au champ électromagnétique de l'onde incidente va influencer la propagation de l'onde dans ce matériau. Par ailleurs, la dynamique de cette réaction (inertie, frottements, résonances...), confère au matériau des propriétés qui dépendront de la fréquence de

l'onde. Les matériaux traversés par les ondes optiques sont des matériaux diélectriques (verres, plastiques, cristaux...). Ils ne possèdent pas de porteurs libres. Ils sont cependant constitués de particules positives et négatives liées entre elles par des interactions électrostatiques (électrons et noyaux). Un champ électrique incident peut légèrement séparer ces charges en tirant les charges positives d'un côté et en poussant les charges négatives de l'autre. Globalement le matériau restera neutre, et aucun courant continu ne pourra être obtenu. Cependant, si le champ est oscillant comme dans une onde, le déplacement des charges sera aussi dépendant du temps. Localement il y aura création d'un courant car les charges positives se déplacent dans un sens opposé aux charges négatives. La densité de courant ainsi générée, appelée densité de courant de polarisation se met sous la forme $\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ où \mathbf{P} est le **vecteur polarisation**. La polarisation est proportionnelle à l'écartement des charges positives et négatives. **Si le champ électrique est modéré, la polarisation dépend linéairement de celui-ci.**

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (4.24)$$

où χ est la susceptibilité du matériau.

On a toujours :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.25)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.26)$$

$$(4.27)$$

L'onde incidente n'est pas un champ uniforme (en particulier dans la direction de propagation). Le gradient de champ induit localement par polarisation un léger déséquilibre de charges. Ce dernier se traduit par une densité de charges de polarisation $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. On a alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_P / \epsilon_0 \quad (4.28)$$

On introduit le vecteur déplacement \mathbf{D} tel que :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.29)$$

On obtient alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.30)$$

Finalement, l'introduction du courant de polarisation dans les équations de Maxwell conduit à :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.31)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.32)$$

En posant $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$, et en combinant les équations de Maxwell (voir chapitre 1), on obtient une équation de d'Alembert sur le champ \mathbf{D} et sur le champ \mathbf{B} .

$$\nabla^2 \mathbf{D} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.33)$$

La célérité de l'onde est maintenant :

$$c' = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \mu_0}} \quad (4.34)$$

dans le cas où χ est petit devant 1 (ce qui sera toujours le cas), l'indice de réfraction est alors :

$$n = \sqrt{1 + \chi} \approx (1 + \chi/2) \quad (4.35)$$

Il est donc très facile de modéliser un milieu réfringent en électromagnétisme. Le lien entre le macroscopique (la propagation de l'onde) et le microscopique (les constituants du milieu) s'effectue au travers de χ . Le calcul théorique de cette grandeur est en revanche très complexe et fait intervenir la mécanique quantique (déformation des fonctions d'onde électroniques sous l'effet d'un champ extérieur), la cristallographie et la physique statistique (réponse moyenne d'un ensemble de molécules en agitation thermique).

3.2 Origine de la biréfringence

Il est possible de généraliser le modèle précédent pour faire apparaître la biréfringence. L'anisotropie du milieu peut se traduire par une relation matricielle entre les composantes de P et de E (relation *tensorielle*).

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \bar{\chi} \mathbf{E} \quad (4.36)$$

$\bar{\chi}$ est une matrice dont les composantes sont dans le référentiel usuel (Oxyz) :

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Non seulement \mathbf{P} dépend de la direction de \mathbf{E} , mais ces deux vecteurs ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.

Le comportement des milieux biréfringents est relativement complexe et il n'est pas question dans ce cours introductif de les traiter en détail. Nous donnerons simplement quelques propriétés importantes. D'un point de vue formel tout d'abord, la matrice $\bar{\epsilon} = \epsilon_0(1 + \bar{\chi})$ est diagonalisable. Il est donc possible de trouver trois axes privilégiés (OX), (OY) et (OZ) appelés **axes principaux du cristal** tels que :

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Lorsque les susceptibilités des axes principaux sont telles que $\epsilon_{XX} = \epsilon_{ZZ} = \epsilon_{YY}$ on a affaire à un milieu isotrope.

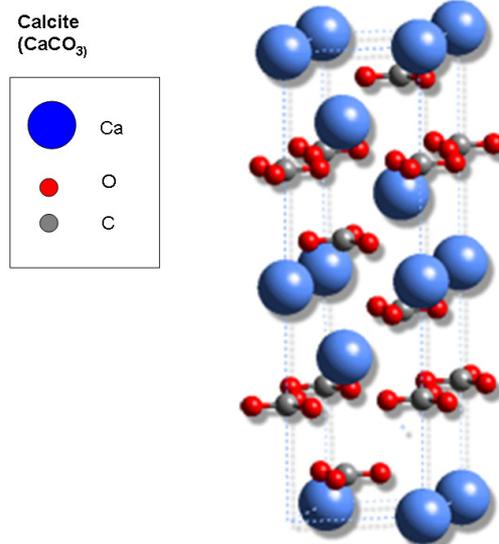


FIGURE 4.11 – Exemple d'un milieu anisotrope et biréfringent : la calcite ($CaCO_3$).

3.3 Propriétés optiques des milieux biréfringents

Nous admettons qu'un milieu biréfringent présente les propriétés optiques suivantes :

Existence de deux modes de propagation

- le vecteur \mathbf{D} représente la direction de polarisation de l'onde dans le milieu.
- Le vecteur déplacement \mathbf{D} , le vecteur \mathbf{B} et le vecteur k sont perpendiculaires.
- Dans un milieu biréfringent, deux types d'onde peuvent se propager dans la direction $\mathbf{u} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$. Elles sont polarisées linéairement, leurs polarisations sont orthogonales et chacune se propage avec son propre indice de réfraction (n' et n''). C'est à cause de l'existence de ces deux modes de propagation que l'on parle de biréfringence.
- les indices de réfraction n' et n'' dépendent, de la direction de propagation \mathbf{u} .
- les deux directions de polarisation sont appelées **lignes neutres**.

Vocabulaire

- **Ellipsoïde des indices**. C'est la surface donnant l'indice de réfraction en fonction de la direction de polarisation de l'onde, ou direction de \mathbf{D} .
- **Surface des indices**. C'est une surface donnant la valeur de l'indice de réfraction n en fonction de la direction de propagation dans le matériau \mathbf{u} . Cette surface possède deux nappes car, comme nous l'avons vu, à chaque direction correspond deux modes de vibration (deux polarisations) ayant chacun un indice différent.
- Les directions pour lesquelles les deux nappes se croisent sont appelées axes optiques du matériau (à ne pas confondre avec l'axe optique du dispositif expérimental!).

Direction de propagation de la phase et de la puissance

- En général, le champ E n'est pas perpendiculaire au vecteur d'onde k .
- Dans ces conditions, le vecteur d'onde k et le vecteur de Poynting $\pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$ ne sont pas parallèles. **La puissance et la phase ne se propagent pas dans la même direction!!!**

Ce dernier point, le moins simple à comprendre, est pourtant le plus facile à observer expérimentalement. Prenons un cristal biréfringent taillé de telle sorte que ces axes principaux ne soient pas tous parallèles aux faces du cristal (voir figure 4.13). L'axe principal Ox est parallèle à la face d'entrée (parallèle à (Ox)). Une onde incidente sur la face d'entrée avec une polarisation suivant Ox et un vecteur d'onde suivant (Oz) se propagera dans le milieu avec une structure similaire. Le cristal a alors le même comportement qu'une lame de verre. En revanche, si la polarisation est suivant (Oy) , le vecteur d'onde sera aussi suivant k mais le champ électrique dans le milieu ne sera pas perpendiculaire à k . La puissance lumineuse se propagera dans une direction différente de k . Cette onde qui "avance en crabe" est appelée "onde extraordinaire". Expérimentalement, si l'on envoie un mince faisceau non polarisé sur le cristal, on obtiendra à la sortie deux faisceaux parallèles, polarisés orthogonalement et séparés spatialement d'une distance appelée "walk-off". C'est ce phénomène que l'on nomme double réfringence. Si l'on observe au travers de ce cristal une scène éclairée en lumière naturelle on aura l'impression que cette scène apparaît dédoublée.

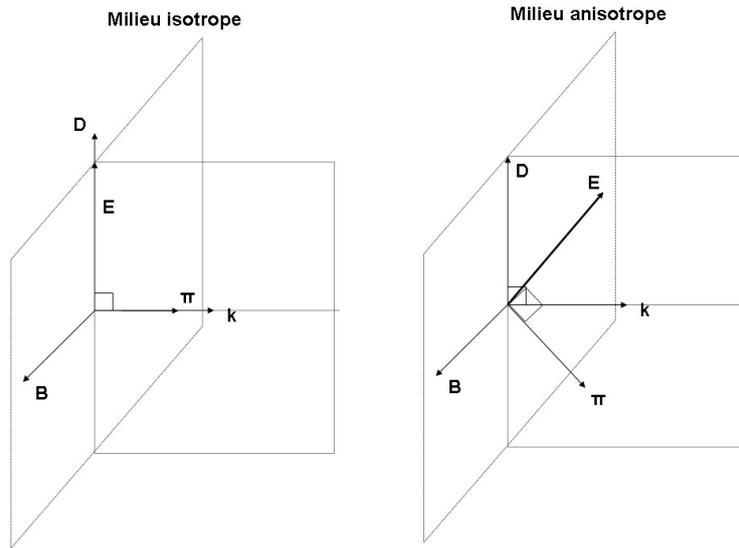


FIGURE 4.12 – Structure d’une onde électromagnétique dans un milieu isotrope (gauche) et dans un milieu anisotrope.

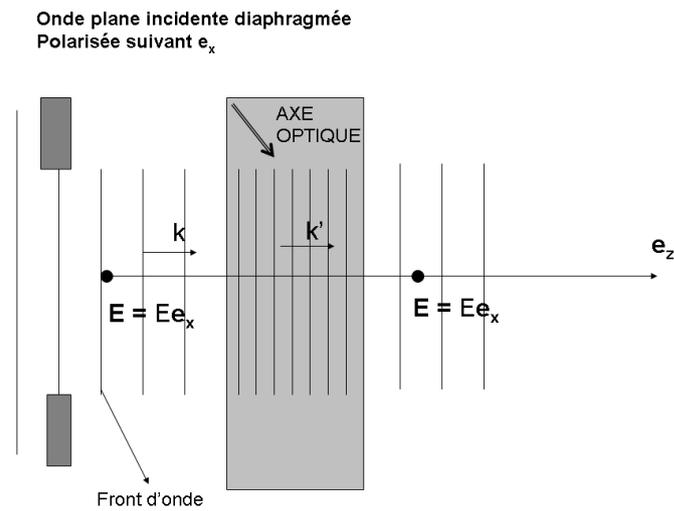


FIGURE 4.13 – Propagation dans un milieu anisotrope : réfraction ordinaire.

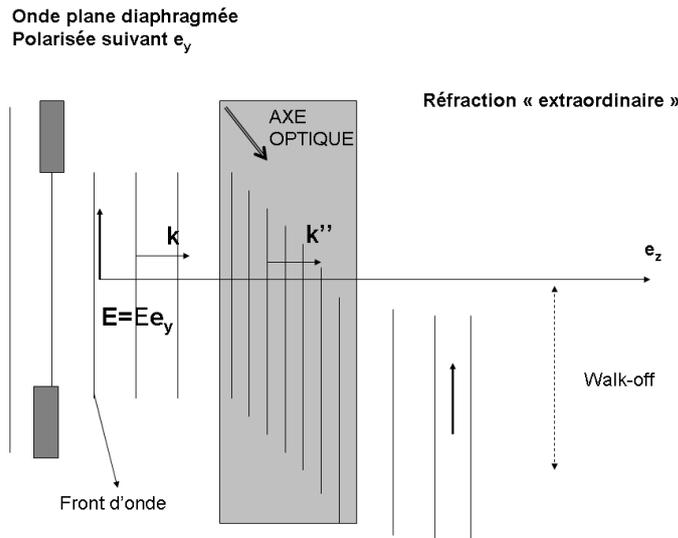


FIGURE 4.14 – Propagation dans un milieu anisotrope : réfraction extraordinaire.

Application : séparateurs de faisceaux par polarisation

Nous retiendrons pour conclure, que cet effet de double réfraction permet de séparer spatialement les états de polarisation de la lumière. De nombreux dispositifs utilisent ce phénomène de manière optimisée, pour réaliser des séparateurs de faisceau, des polariseurs sans absorption d'énergie, etc... Certains reposent sur cet effet de Walk-Off, d'autres plus simplement s'inspire du prisme qui dévie d'autant plus la lumière que l'indice du matériau est grand : à deux états de polarisation correspondent deux indices et donc deux angles de déviation. Certains dispositifs sont conçu pour maximiser cette séparation en obtenant une réflexion totale sur une des polarisations et pas sur l'autre (Prisme de Nicol, prisme de Glan).

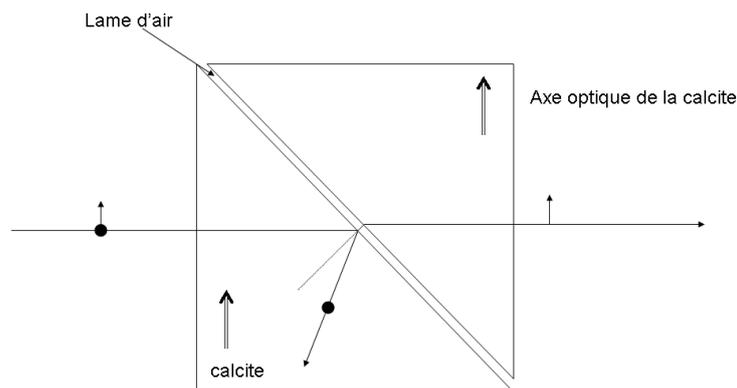


FIGURE 4.15 – Exemple de séparateur de faisceau utilisant la biréfringence : le polariseur de Glan.

Ces systèmes peuvent être utilisés comme des polariseurs si on ne récupère qu'un seul des faisceaux produits. Les utilisateurs de lasers intenses mettent en oeuvre ce type de systèmes pour polariser ou analyser un faisceau. La polarisation rejetée n'est pas absorbée par le polariseur lui-même mais par un dispositif adéquat

(céramique supportant le flux très intense du laser) située loin du dispositif (sécurité). Ils peuvent par ailleurs être utilisés pour générer deux faisceaux différents à partir d'un même faisceau ou comme système de recombinaison de faisceau.

3.4 Milieux biaxes et uniaxes

Lorsque les permittivité des axes principaux sont telles que $\epsilon_{XX} \neq \epsilon_{YY} \neq \epsilon_{ZZ}$ on a affaire à un milieu biaxe. Les surfaces des indices $n'(\mathbf{u})$ et $n''(\mathbf{u})$ se coupent en des valeurs de \mathbf{u} correspondant à deux directions appelées axes optiques. Pour ces directions l'indice ne dépend pas de la polarisation.

Lorsque les susceptibilités des axes principaux sont telles que $\epsilon_{YY} \neq \epsilon_{XX} = \epsilon_{ZZ}$ on a affaire à un milieu uniaxe. La surfaces d'indice $n'(\mathbf{u})$ est une sphère, tandis que $n''(\mathbf{k})$ est un ellipsoïde. La première surface correspond à des ondes dont l'indice ne dépend pas de la direction. Pour cette raison on les nomme "ondes ordinaires". A contrario, l'autre mode de propagation est appelé onde extraordinaire. L'ellipsoïde et la sphère sont tangents en deux points qui forment le seul axe optique du milieu (d'où la désignation de milieu uniaxe).

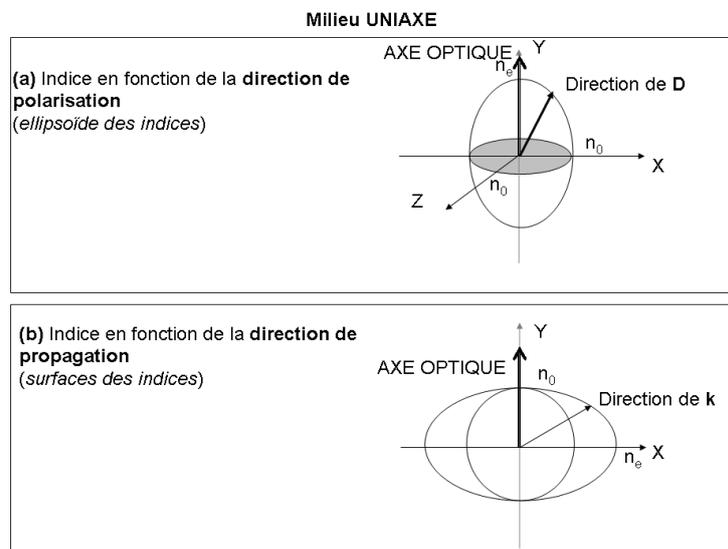


FIGURE 4.16 – Indice de réfraction d'un milieu uniaxe en fonction de la direction de polarisation (en haut) et en fonction de la direction de propagation (en bas).

3.5 Lames d'onde

Les lames d'onde sont des dispositifs très utiles pour changer l'état de polarisation d'une onde. Il s'agit de fines lames taillées dans un milieu uniaxe. Leurs faces sont parallèles à l'axe optique du milieu. Elles sont utilisées en incidence normale. L'axe d'incidence, perpendiculaire aux faces, est noté (Oz). L'axe optique du cristal est supposé orienté suivant la direction (Oy). Une onde se propageant suivant (Oz) avec une polarisation suivant (Oy) se propagera dans la lame sans changement de structure (même polarisation et direction de propagation) avec un indice de réfraction n_o (**indice ordinaire**). Par conséquent, l'axe (Oy) est une ligne neutre de la lame. Il en sera de même pour l'axe (Ox). Une onde ayant une polarisation suivant (Ox) et se propageant suivant (Oz) verra sa polarisation inchangée. L'indice correspondant sera n_e (**indice extraordinaire**).

Qu'en est-il d'une onde arrivant avec une polarisation quelconque ? Supposons que l'origine du repère soit placé sur la face d'entrée de la lame. Dans le cas le plus général, le champ incident sur la face d'entrée peut s'exprimer comme la superposition de deux champs polarisés suivant (Ox) et (Oy) :

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = (E_x e^{i\phi_x} \mathbf{e}_x + E_y e^{i\phi_y} \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t} \tag{4.39}$$

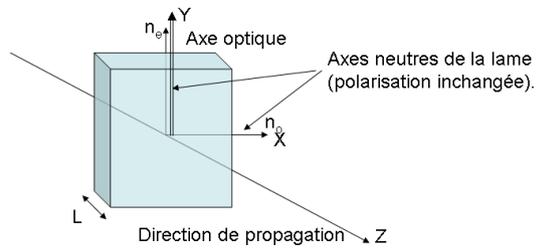


FIGURE 4.17 – Principe d'une lame d'onde.

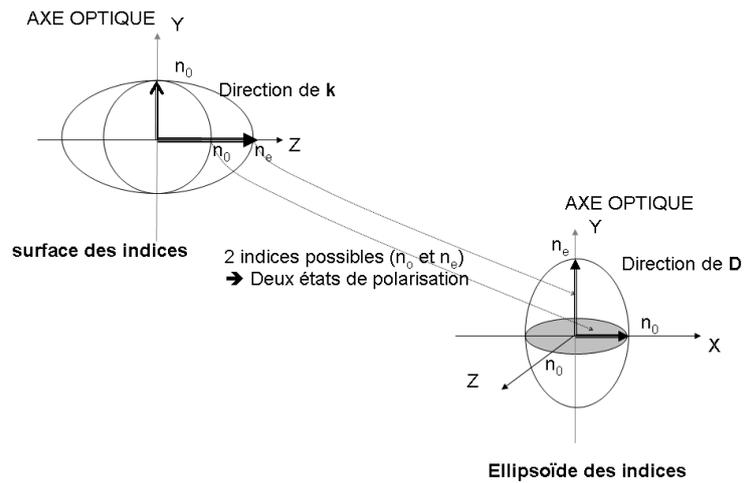


FIGURE 4.18 – Ondes se propageant dans une lame d'onde.

Exprimons le champ total après que celui-ci se soit propagé de z dans la lame. Pour cela il suffit d'écrire que les champs suivant O_x et O_y se sont propagés sans changement de leur polarisation, chacun avec une vitesse différente. Le champ suivant (O_x) voit un indice n_e tandis que celui en O_y voit un indice n_o .

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_x e^{i(\phi_x + k_x z)} \mathbf{e}_x + E_y e^{i(\phi_y + k_y z)} \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_x e^{i(\phi_x + 2\pi n_e z/\lambda)} \mathbf{e}_x + E_y e^{i(\phi_y + 2\pi n_o z/\lambda)} \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t} \quad (4.41)$$

$$(4.42)$$

La propagation introduit une phase supplémentaire qui n'est pas la même pour la composante suivant x et pour la composante suivant y . La lame introduit donc un déphasage supplémentaire $\delta\phi$ entre les deux composantes.

$$\phi_x(z) = \phi_x + 2\pi n_e z/\lambda \quad (4.43)$$

$$\phi_y(z) = \phi_y + 2\pi n_o z/\lambda \quad (4.44)$$

$$\delta\phi = \phi_x(z) - \phi_y(z) = 2\pi(n_e - n_o)z/\lambda \quad (4.45)$$

Lame demi-onde

Une lame demi-onde est une lame d'onde conçue de telle sorte que $(n_e - n_o)z = \lambda/2$, c'est à dire que $\delta\phi = \pi$.

Propriété :

Une lame demi onde transforme une onde polarisée linéairement en une onde polarisée linéairement symétrique de la précédente par rapport à (O_x).

Lame quart d'onde

Une lame quart-d'onde est une lame d'onde conçue de telle sorte que $(n_e - n_o)z = \lambda/4$, c'est à dire que $\delta\phi = \pi/2$.

Propriétés :

- Une lame quart d'onde transforme une polarisation linéaire en polarisation elliptique.
- Application : si la polarisation linéaire est à 45° des axes de la lame quart d'onde, la polarisation en sortie est alors circulaire.

4 Biréfringence circulaire

4.1 Nature de la biréfringence circulaire

Dans la section précédente, nous avons vu que l'anisotropie d'un milieu avaient des conséquences importantes sur la propagation de la lumière. Il existe dans la nature des anisotropies plus subtiles qui concernent les rotations autour d'un axe. Partons d'une constatation triviale. De nombreux objets dans notre environnement n'ont pas le même comportement selon qu'on les fait tourner dans le sens direct ou dans le sens rétrograde : escalier en colimaçon, tire-bouchon, vis... Ces objets ont pour point commun de ne pas être superposables à leur image dans un miroir. Le symétrique d'une vis usuelle vous réservera quelques surprises lors du montage d'un meuble en kit, quant au symétrique du tire bouchon, il vous obligera à une certaine gymnastique d'esprit... Nos mains gauche et droite sont symétriques l'une par rapport à l'autre mais ne sont pas superposables. Tout objet ayant cette propriété est dit **chiral**.

La nature nous fournit de nombreux exemples d'objets chiraux tant au niveau macroscopique que microscopique. De nombreuses molécules organiques (double hélice d'ADN, protéines, sucres, acides aminés...) sont chirales. Les deux versions symétriques de ces molécules sont appelées "énantiomères". Si la synthèse chimique en laboratoire de petites molécules chirales conduit aux mêmes quantités d'énantiomères (autant de molécules

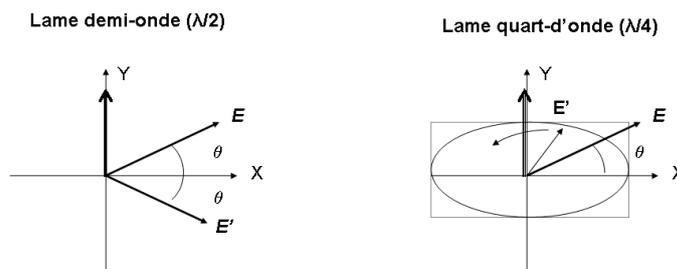


FIGURE 4.19 – Effet d’une lame demi-onde et d’une lame quart d’onde sur une onde polarisée rectilignement.

"gauches" que de molécules "droites"), il n’en va pas de même dans la nature : toutes les hélices d’ADN tournent dans le même sens ! Un énantiomère d’une molécule peut être un médicament, l’autre énantiomère un poison ! Dans certains systèmes comme les cristaux liquides, la chiralité ne se situe pas au niveau moléculaire mais au niveau de la disposition des molécules les unes par rapport aux autres (niveau supramoléculaire).

La chiralité existe aussi pour la lumière : une onde circulaire droite et une onde circulaire gauche sont deux solutions symétriques mais distinctes des équations de Maxwell.

Un milieu chiral transparent comme une solution contenant un seul énantiomère d’une molécule chirale (que des molécules "gauches" par exemple) interagira de manière différente avec des ondes circulaires droite ou gauche. En particulier, les indices de réfraction associés à ces deux modes de propagation seront différents. Par la suite nous noterons n_g et n_d les indices de réfraction associés aux ondes circulaires gauche et droite.

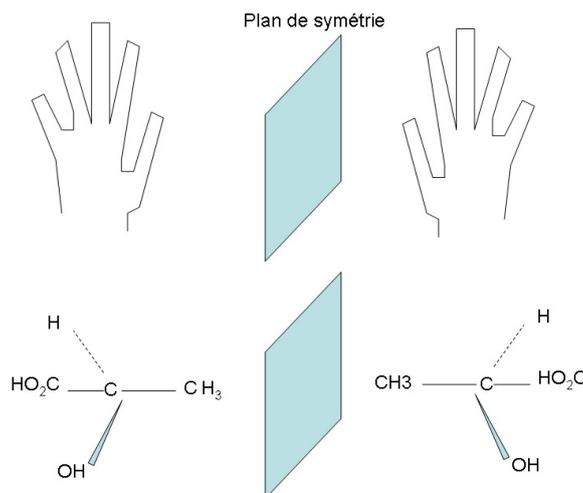


FIGURE 4.20 – Exemples d’objets chiraux.

4.2 Pouvoir rotatoire

La biréfringence circulaire est mise en évidence expérimentalement en envoyant dans un milieu chiral une lumière polarisée linéairement. A sa sortie, la polarisation reste linéaire mais sa direction fait un angle θ par rapport à la direction initiale de polarisation. Cet angle est proportionnel à la distance parcourue dans le milieu L et à la différence d'indice $n_g - n_d$. On attribue de ce fait au milieu un **pouvoir rotatoire** α tel que $\theta = \alpha L$.

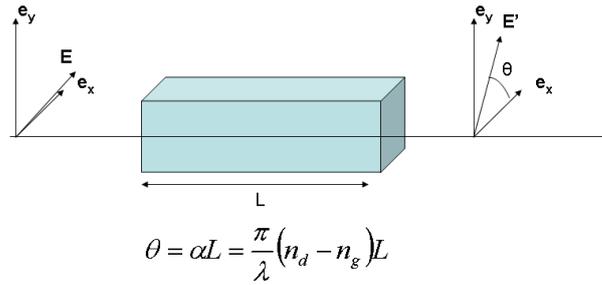


FIGURE 4.21 – Pouvoir rotatoire d'un milieu présentant de la biréfringence circulaire.

Montrons qu'une biréfringence circulaire est effectivement capable de tourner la direction de polarisation d'une onde incidente polarisée linéairement. Nous supposons que la polarisation initiale est orientée suivant la direction (Ox).

Nous avons montré au début de ce chapitre qu'une polarisée linéairement était la superposition de deux ondes circulaires. L'onde incidente se décompose donc en deux contributions circulaires gauche et droite :

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = E_x \mathbf{e}_x e^{-i\omega t} \quad (4.46)$$

$$= E_x/2(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t} + E_x/2(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t} \quad (4.47)$$

Après propagation jusqu'en $z = L$ le champ devient :

$$\mathbf{E}(z = L, t) = E_x/2(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{i(2\pi n_g L/\lambda - \omega t)} + E_x/2(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{i(2\pi n_d L/\lambda - \omega t)} \quad (4.48)$$

$$= E_x/2e^{i(\Phi - \omega t)}(\mathbf{e}_x e^{i\theta} + i\mathbf{e}_y e^{i\theta}) + E_x/2(\mathbf{e}_x e^{-i\theta} - i\mathbf{e}_y e^{-i\theta}) \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

Avec $\Phi = \pi(n_g + n_d)L/\lambda$ et $\theta = \pi(n_g - n_d)L/\lambda$

La dernière équation se simplifie en :

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = E_x(\mathbf{e}_x \cos(\theta) + \mathbf{e}_y \sin(\theta))e^{i(\Phi - \omega t)} \quad (4.51)$$

L'onde en sortie du milieu est une onde polarisée linéairement dans une direction formant un angle θ par rapport à la direction initiale. Un milieu présentant de la biréfringence circulaire possède bien un pouvoir rotatoire $\alpha = \pi(n_g - n_d)/\lambda$.

4.3 Applications

La polarisation est une propriété essentielle et originale de la lumière qui découle de sa nature électromagnétique. La modification de la polarisation de la lumière par une surface ou un matériau est un excellent moyen de caractérisation.

- En géochimie, on observe au microscope des lames de roche éclairées en lumière polarisée. Lorsqu'un deuxième polariseur (analyseur) est placé entre la lame et l'observateur, les inclusions cristallines prennent une couleur caractéristique de l'épaisseur (connue) et de leurs propriétés de biréfringence. On peut alors les identifier.
- Une surface recouverte de fines couches de matériaux réfléchit une onde incidente polarisée linéairement en déphasant l'état de polarisation linéaire TE par rapport à l'état TM. L'onde réfléchie est alors polarisée elliptiquement. La caractérisation spectrale de ce déphasage fournit des informations sur les propriétés des couches, leur rugosité... Cette méthode est appelée **ellipsométrie**. Elle est couramment employée en microélectronique, dans l'industrie photovoltaïque, le contrôle qualité des écrans de smartphones...

De nombreux dispositifs destinés à manipuler la lumière, à transférer de l'information sur un faisceau lumineux, ou d'affichage... reposent sur l'utilisation d'effets de biréfringence induite par des champs électriques (Effet Pockels, cristaux liquides...).

Chapitre 5

Diffraction de la lumière

1 Principe de Huygens-Fresnel

1.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons travaillé avec des ondes ayant des structures spatiales relativement simples et qui étaient données a priori : une onde plane ou une onde sphérique. Très utiles pour comprendre le principe des interféromètres, ces formes d'onde sont physiquement peu réalistes. De même, nous avons considéré jusqu'à présent que les seules conditions aux limites susceptibles de modifier leur propagation étaient des objets simples. Les miroirs, les optiques étaient suffisamment grands pour ne pas se préoccuper des bords ; les diaphragmes étaient percés de trous suffisamment petits pour considérer que l'onde traversant ces derniers se transforme en une onde quasi-sphérique.

Nous allons dans ce chapitre énoncer un principe central en physique des ondes : le principe de Huygens-Fresnel. Il nous permettra d'étudier la propagation des ondes dans des situations beaucoup plus complexes. Nous traiterons ainsi de manière plus rigoureuse l'expérience des trous d'Young où nous pourrons tenir compte de la forme des trous. Plus généralement, le principe de Huygens-Fresnel permet de décrire avec une grande précision le phénomène de diffraction. Ce dernier est à la base de nombreux dispositifs optiques (réseaux de diffraction, lentilles diffractives...) et permet de comprendre ce qui limite ultimement les performances d'un instrument d'optique. D'un point de vue historique, l'étude de la diffraction a joué un rôle important car c'est après l'expérience de Fresnel et d'Arago sur la diffraction par des trous circulaires et des disques (1815) que la nature ondulatoire de la lumière fut reconnue.

De même que le "principe" d'incertitude de Heisenberg découle en réalité des axiomes de la théorie quantique, le "principe" de Huygens Fresnel est une conséquence de l'équation de d'Alembert (voir Annexe A). Il ne s'agit donc pas d'un principe physique nouveau mais d'une formulation des propriétés d'une onde très commode pour étudier de nombreux problèmes.

1.2 Phénomène de diffraction

Posé pour la première fois en 1690 par Huygens, le principe d'Huygens-Fresnel a permis d'expliquer les expériences de diffraction de Fresnel à la fin des années 1810. Depuis ce principe s'est révélé particulièrement efficace pour décrire le phénomène de diffraction et plus généralement la propagation d'une onde lumineuse dans un montage d'optique.

1.3 Énoncé du principe de Huygens-Fresnel

Tout point de l'espace atteint par une onde se met à vibrer et rayonne une ondelette sphérique secondaire de même fréquence et de même phase que l'onde initiale. La propagation de la surface d'onde de même que l'effet d'obstacles interposés se décrit par superposition (ou interférence) de ces ondelettes secondaires.

1.4 Intégrale de Kirchhoff

De façon générale, un montage ou un instrument d'optique va changer les propriétés de l'onde incidente en (i) limitant ou en obstruant la surface d'onde incidente et (ii) en introduisant des déphasages. Localement on pourra modéliser le montage optique par une ouverture d'aire \mathcal{A} contenue dans le plan xOy . L'onde résultante observée dans le plan image XOY est alors obtenue par une superposition des ondes secondaires qui fait intervenir l'intégrale de Kirchhoff :

$$S(X, Y) = \int_{\mathcal{A}} s(x, y) K(M) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy \tag{5.1}$$

où $s(x, y)$ et $S(X, Y)$ sont les amplitudes des ondes incidente (juste avant \mathcal{A}) et diffractée respectivement et

$$PM = \|\mathbf{PM}\| = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + z^2}.$$

L'axe optique du montage est Oz , perpendiculaire aux plans de \mathcal{A} et au plan image. La fonction $K(M)$ est appelée facteur de Kirchhoff et traduit l'effet de l'inclinaison relative de \mathbf{PM} et Oz . On montre que $K = \frac{-i}{\lambda}$ ⁽¹⁾.

2 Approximation de Fresnel et de Fraunhofer

L'intégrale de Kirchhoff est estimée dans deux cas complémentaires qui ont été définis par Fresnel et Fraunhofer peu avant 1820.

2.1 Approximation de Fresnel

C'est une approximation de champ proche pour la diffraction. On suppose alors que $D \gg (x, y, X, Y) > \lambda$ autrement dit les distances transverses sont très petites devant la distance entre l'ouverture qui diffracte et l'écran d'observation. On écrit alors

$$PM \simeq z + \frac{1}{2z} [(X - x)^2 + (Y - y)^2]$$

L'intégrale 5.1 devient alors :

$$S(X, Y) \simeq \int_{\mathcal{A}} s(x, y) \Psi_z(X - x, Y - y) dx dy = s(P) \otimes \Psi_z(M)$$

avec $\Psi_z(x, y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$ le terme ou noyau de Fresnel. En explicitant PM on a :

$$S(X, Y) \simeq \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \int_{\mathcal{A}} s(x, y) e^{ik \frac{x^2+y^2}{2z}} e^{-ik \frac{xX+yY}{R}} dx dy \tag{5.2}$$

avec $R = OM$.

2.2 Approximation de Fraunhofer et lien avec la transformée de Fourier

C'est le cas où le terme de Fresnel devient proche de 1 ce qui impose que $\frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \ll 1$. L'intégrale (5.2) devient alors

$$S(X, Y) \simeq \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR}}{z} \int_{\mathcal{A}} s(x, y) e^{-ik \frac{xX+yY}{R}} dx dy. \tag{5.3}$$

1. On a $K \sim \lambda^{-1}$ car la longueur d'onde est la seule distance caractéristique indépendante de la position de P de M et de la source. L'intégrale de Kirchhoff portant sur les ondelettes secondaires, le déphasage $-i$ apparaît pour les ondes se propageant vers M. Une démonstration se trouve dans le livre de Françon.

La diffraction de Fraunhofer correspond donc à des valeurs de z très grandes : c'est pour cela qu'on parle de *diffraction à l'infini*. Il est alors plus pertinent de discuter l'amplitude du champ diffracté de façon angulaire : on introduit alors

$$u = \frac{X}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \text{ et } v = \frac{Y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda}$$

où θ_x et θ_y sont les angles sous lesquels on voit M depuis O : u et v sont donc des nombres d'onde dans le front d'onde diffracté, appelées *fréquences spatiales*. L'amplitude diffractée devient alors :

$$S(u, v) = \frac{i e^{ikR}}{\lambda z} \int_{\mathcal{A}} s(x, y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dx dy$$

où l'intégrale représente la transformée de Fourier de $s(x, y)$: l'amplitude du champ diffracté est donc la transformée de Fourier de la distribution d'amplitude sur l'ouverture diffractante \mathcal{A} . C'est pour cette raison qu'on parle d'*optique de Fourier*.

3 Quelques exemples

Voir les Travaux Dirigés

3.1 Fente rectangulaire

3.2 Dispositif des trous d'Young

3.3 Réseau de diffraction

3.4 Diffraction par une ouverture circulaire

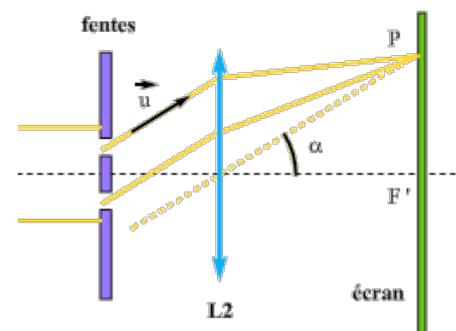
4 Diffraction en présence d'une optique stigmatique

4.1 Propriétés d'une optique stigmatique

Dans une optique stigmatique, l'image d'un point est un point. Ou encore les rayons issus d'une seule direction convergent en un point unique. Le stigmatisme est en général une approximation, en particulier il n'est jamais vérifié sur l'axe optique à cause des aberrations.

4.2 Réalisation expérimentale de la diffraction de Fraunhofer

Si on suppose l'onde incidente plane (source ponctuelle à l'infini) et que l'on met une lentille juste après la surface diffractante, alors au foyer image de la lentille chaque rayon diffracté dans la direction (u, v) sera focalisé à une position particulière. Autrement dit, on obtient une image de la figure de diffraction à l'infini. La distribution de champ au foyer de la lentille est donc donnée par l'expression de la diffraction de Fraunhofer. C'est ce que l'on appelle la propriété de transformation de Fourier de la lentille. Une lentille effectue une transformée de Fourier spatiale de l'ouverture diffractante.



4.3 Plan de Fourier d'une optique - Filtrage spatial

Le plan de Fourier d'un système optique est le plan dans lequel on obtient par diffraction la transformée de Fourier de l'ouverture du système. Dans la figure précédente c'est le plan focal de la lentille. On pourra alors bloquer ou *filtrer* certaines directions de faisceau (u, v) en plaçant un masque dans le plan de Fourier. Si l'on place alors une seconde lentille après le plan de Fourier et qu'on observe l'image dans le plan focal de cette lentille, on obtiendra alors une image filtrée de l'objet : c'est le principe du *filtrage spatial*.

Chapitre 6

Application aux instruments d'optique

En général, un instrument ou système optique sert à analyser ou à conditionner la lumière d'une source. On peut ainsi chercher à voir les détails de la source dans l'espace ou bien à en connaître le spectre. Dans la mesure où le front d'onde de la lumière incidente est limité, déformé ou déphasé par l'instrument, il est indispensable de prendre en compte les phénomènes de diffraction.

1 Quelques rappels d'optique géométrique

2 Résolution d'un instrument

3 Réponse impulsionnelle et fréquentielle

Pour comprendre la propagation de la lumière dans un instrument, on commence par étudier l'intensité en sortie d'instrument dans le cas simple d'une source ponctuelle : c'est ce qu'on appelle la *réponse impulsionnelle* de l'instrument. Dans la mesure où les équations de Maxwell sont linéaires et en supposant une réponse linéaire du milieu de propagation la réponse d'un instrument d'optique à une excitation impulsionnelle (par une source ponctuelle) sera supposée linéaire, c'est-à-dire qu'on suppose que la réponse d'un instrument ou d'un milieu à la présence d'un champ exciteur est proportionnelle à ce champ. La fréquence de la réponse sera donc la même que celle de l'excitation¹. On écrit alors

$$S(X, Y) = T [s(x, y)]$$

où S est l'amplitude de sortie (la réponse) et s l'amplitude d'entrée (l'excitation) avec T un opérateur décrivant l'action du système optique. Grâce à la fonction de Dirac on peut toujours décomposer s en une somme de sources ponctuelles ou *impulsions* excitant le système optique

$$S(X, Y) = T \left[\int_A s(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right] = \int_A s(\alpha, \beta) T [\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta.$$

Ce résultat est appelé théorème de superposition et $T [\delta]$ est la réponse impulsionnelle du système, c'est-à-dire la réponse à l'excitation par une source ponctuelle.

Si la réponse impulsionnelle est invariante par translation alors $T [\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(X - \alpha, Y - \beta)$ et une seule fonction h décrit complètement le système linéaire

$$S(X, Y) = s(x, y) \otimes h(X - x, Y - y) \text{ soit dans l'espace de Fourier } \widetilde{S} = \widetilde{s} \cdot \widetilde{h}$$

cette dernière relation correspond à une opération de filtrage de l'entrée par la fonction de transfert \widetilde{h} du système.

1. Il existe aussi des milieux non-linéaires où des fréquences double voire triple sont générées à l'aide d'une lumière intense (laser). Dans ces milieux l'amplitude du champ de sortie S est proportionnelle à une puissance du champ d'entrée s soit $S \sim s^\alpha$ avec $\alpha > 1$.

4 Optiques diffractives

4.1 Réseau de diffraction

4.2 Lentilles de Fresnel

5 Fabrication et caractérisation des optiques

5.1 Etat de surface

5.2 Caractérisation d'une optique

5.3 Principe d'un antireflet

5.4 Réseau de Bragg et miroirs multicouches

6 Aberrations, mesures et corrections actives

6.1 Polynômes de Zernicke

6.2 Senseur de front d'onde

6.3 Optique adaptative

Annexe A

Origine du principe de Huygens-Fresnel

1 Introduction

Le principe de Huygens-Fresnel n'en est pas un. Il découle directement de la nature ondulatoire de la lumière. Plusieurs manières permettent de montrer que l'intégrale de Kirschoff-Fresnel est un moyen de calculer des solutions approchées de l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert).

La première démonstration, que nous ne décrivons pas ici, est détaillée dans l'ouvrage de référence *Principle of optics* de M. Born et E. Wolf. Elle repose sur l'utilisation du théorème de Green. Suggérons-en simplement la saveur en nous replongeant dans nos souvenirs d'électrostatique. Une foultitude d'énoncés scolaires nous demandaient de trouver le champ électrique en un point de l'espace M créé par une distribution de charge. Nous avons à notre disposition deux approches :

La loi de Coulomb

$$\mathbf{E}(M) = \int \int \int_V \frac{\rho(S)\mathbf{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} d^3\mathbf{r} \quad (\text{A.1})$$

et le théorème de Gauss

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{E}(S) \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int \frac{\rho(S)}{\epsilon_0} d^3\mathbf{r} \quad (\text{A.2})$$

Par ailleurs nous avons également appris la relation différentielle suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(S)}{\epsilon_0} \quad (\text{A.3})$$

Cette relation est le pendant différentiel du théorème de Gauss. La relation entre les deux s'effectue grâce au théorème de Green-Ostrogradski.

De manière analogue (mais plus difficile) si on suppose qu'un champ scalaire monochromatique $E(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ vérifie l'équation de d'Alembert-Helmholtz $\nabla^2 U(x, y, z) + \frac{\omega^2}{c^2} U(x, y, z) = 0$, alors il est possible de construire une relation intégrale faisant intervenir ce champ et ces dérivées sur une surface. Après quelques mathématiques on trouve alors la formule de Kirchoff du chapitre 5.

Dans la présente annexe, nous présenterons une autre démonstration dont le démarrage, très naturel permet de faire apparaître la notion importante de *champ proche* et de comprendre l'origine physique de la diffraction. Avec un peu de mathématiques (et un résultat admis) nous retrouverons l'intégrale de Kirschoff.

2 Notion de champ proche

Considérons un champ scalaire monochromatique $E(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ vérifiant l'équation de d'Alembert-Helmholtz $\nabla^2 U(x, y, z) + \frac{\omega^2}{c^2} U(x, y, z) = 0$.

Effectuons la transformée de Fourier de $U(x, y, z)$ suivant les directions x et y ,

$$U(x, y, z) = \int \int U(u, v, z) \exp(i(ux + vy)) du dv \quad (\text{A.4})$$

puis injectons cette formulation dans l'équation de d'Alembert-Helmholz :

$$\int \int \left(\frac{\partial^2 U(u, v, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - u^2 - v^2 \right) U(u, v, z) \right) \exp(i(ux + vy)) dudv = 0 \quad (\text{A.5})$$

Il vient alors pour chacun des couples (u, v) :

$$\frac{\partial^2 U(u, v, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - u^2 - v^2 \right) U(u, v, z) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons résoudre cette équation différentielle :

$$U(u, v, z) = A(u, v) \exp(iwz) + B(u, v) \exp(-iwz) \quad (\text{A.7})$$

Si nous supposons que le champ se propage de la gauche vers la droite, nous pouvons poser que $B(u, v) = 0$
Nous avons par ailleurs posé :

$$w = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - u^2 - v^2} \quad \frac{\omega^2}{c^2} > u^2 + v^2 \quad (\text{A.8})$$

$$w = i \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \frac{\omega^2}{c^2} < u^2 + v^2 \quad (\text{A.9})$$

Nous voyons donc apparaître deux types de solutions : des combinaisons linéaires d'ondes planes (premier cas) et des combinaisons d'ondes exponentiellement amorties ou ondes évanescentes dans le second cas.

Nous voyons par ailleurs que le champ dans le plan $z=0$ s'exprime de la manière suivante :

$$U(x, y, 0) = \int \int U(u, v, 0) \exp(i(ux + vy)) dudv = \int \int A(u, v) \exp(i(ux + vy)) dudv \quad (\text{A.10})$$

Le champ à la distance z s'exprime maintenant en fonction du champ en $z=0$ ainsi :

$$U(x, y, z) = \int \int U(u, v, z) \exp(i(ux + vy)) dudv = \int \int U(u, v, 0) \exp(i(ux + vy + wz)) dudv \quad (\text{A.11})$$

Notons que jusqu'à présent *nous n'avons fait aucune approximation !*

Interprétons cette formule et donnons une idée physique de la diffraction. Partons d'un champ en $z=0$ qui en passant à travers un diaphragme (collection de fentes, de petits trous...) est modulé spatialement. Les fréquences spatiales élevées correspondent à u et v grands. La transformée de Fourier de ce champ va permettre de connaître le taux de modulation initial à chacune des fréquences spatiales u, v . Nous regardons ensuite comment les ondes planes produites par chacune de ces modulations se propagent dans le vide jusqu'à la distance z . Le point important ici est que le terme $\exp(iwz)$ n'est pas nécessairement complexe. Pour des fréquences spatiales suffisamment élevées $u^2 + v^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$ ce terme devient une exponentielle réelle décroissante (onde évanescente). L'onde associée à une modulation de fréquence spatiale élevée va s'atténuer avec la distance et ce d'autant plus vite que la fréquence spatiale est élevée. La transition entre ondes planes et ondes évanescentes (w réel ou imaginaire pur) correspond à des périodes spatiales respectivement plus grandes ou plus petites que la longueur d'onde λ .

Autrement dit, les détails plus fins que la longueur d'onde imprimés dans le faisceau par le diaphragme en $z=0$ vont très rapidement disparaître lorsque z augmente. La propagation agit comme un filtre passe bande. A l'infini, il ne reste que les ondes planes complexes (w réel), on retrouve alors la forme de la diffraction de Fraunhofer. La région située très près du diaphragme, où des structures plus petites que la longueur d'onde peuvent être décelées dans le champ est appelée *zone de champ proche*. Des techniques modernes dites de microscopie en champ proche permettent de sonder cette région et de déceler du champ même après un diaphragme plus petit que la longueur d'onde. On place juste après le diaphragme une pointe transparente très fine reliée à une fibre optique. Cette pointe convertit l'onde évanescente en une onde plane "classique". Ce phénomène est mathématiquement totalement analogue à l'effet tunnel que vous avez vu en mécanique quantique.

3 Retrouvons le principe de Huygens-Fresnel

Pour une distance z quelconque nous allons exprimer le terme $\exp(i(ux + vy + wz))$ sous une forme qui permettra de faire apparaître le noyau d'onde sphérique de l'intégrale de Kirschoff.

On admet le développement de Weyl d'une onde sphérique :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \int \int \frac{1}{w} \exp(i(ux + vy + w|z|)) dudv \quad (\text{A.12})$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $w = w(u, v)$. Pour simplifier la discussion nous supposons que $z > 0$ pour pouvoir ôter la valeur absolue.

On montre alors que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikr)}{r} = -\frac{1}{2\pi} \int \int \exp(i(ux + vy + w(u, v)|z|)) dudv \quad (\text{A.13})$$

Combinons cette expression à celles obtenues dans la section précédente.

$$U(x, y, z) = \int \int U(u, v, 0) \exp(i(ux + vy + wz)) dudv \quad (\text{A.14})$$

$$U(x, y, z) = \int \int \exp(i(ux + vy + wz)) dudv \int \int U(x', y', 0) \exp(-i(ux' + vy')) dx' dy' \quad (\text{A.15})$$

soit en permutant les intégrales :

$$U(x, y, z) = \int \int dx' dy' U(x', y', 0) \int \int \exp(i(u(x - x') + v(y - y') + wz)) dudv \quad (\text{A.16})$$

$$U(x, y, z) = \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \int \int dx' dy' U(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\exp(ikR)}{R} \right) \quad (\text{A.17})$$

avec $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$.

Explicitons la dérivée partielle.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\exp(ikR)}{R} \right) = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R} z/R \quad (\text{A.18})$$

Le rapport z/R est aussi le cosinus de l'angle θ entre l'axe z et l'axe reliant le point source $S(x', y', 0)$ au point d'observation $M(x, y, z)$: $z/R = \cos(\theta)$. Si l'on suppose enfin que $R \gg \lambda$ alors $k \gg 1/R$.

On trouve finalement une relation entre le champ en z et le champ en $z=0$ de la forme :

$$U(x, y, z) = \frac{-i}{\lambda} \int \int dx' dy' U(x', y', 0) \cos(\theta) \frac{\exp(ikR)}{R} \quad (\text{A.19})$$

On retrouve bien l'intégrale de Kirschoff.

Remarquons pour finir que le calcul exacte du champ très près du diaphragme peut s'avérer très complexe. Il faut tenir compte de son épaisseur, du matériau et de la polarisation. Des programmes informatiques résolvant les équations de Maxwell (ou l'équation de Helmholtz) sont maintenant couramment utilisés pour résoudre ce type de problème qui interviennent en nanophotonique, plasmonique etc...

Annexe B

Les coefficients de Fresnel

1 Généralités

1.1 Dioptre

On s'intéresse au passage d'une onde électromagnétique plane monochromatique d'un milieu diélectrique d'indice de réfraction n_1 à un milieu d'indice n_2 . L'onde incidente arrive par le milieu d'indice n_1 . Cette transition entre les deux milieux est supposée abrupte. Le dioptre est la surface séparant les deux milieux. Cette surface est le lieu d'une discontinuité spatiale des propriétés électromagnétiques. Elle peut avoir une forme quelconque. Néanmoins, nous la supposerons suffisamment "douce" pour que, localement, elle puisse être approchée par un plan. Un axe de référence naturel est alors la normale à ce plan. En physique des ondes, le comportement d'une onde au passage d'un dioptre est abordé en regardant quelles grandeurs restent continues d'un côté et de l'autre de l'interface. On montre que ces relations de continuité impliquent :

- l'existence d'une onde transmise : elle se déplace du dioptre vers le milieu 2 avec une célérité c_2 qui est celle du milieu 2,
- l'existence d'une onde réfléchie dans le milieu 1 (en plus de l'onde incidente), cette onde se propage du dioptre vers le milieu 1 avec une célérité c_1 (celle du milieu 1),
- ces trois ondes (incidente, réfléchie et transmise) ont la même pulsation ω
- la puissance transportée par les ondes se conserve : $P_{\text{incidente}} = P_{\text{transmise}} + P_{\text{réfléchie}}$,
- les directions des vecteurs d'onde vérifient les trois lois de Snell-Descartes.

1.2 Lois de Snell-Descartes

Rappelons brièvement les trois lois de Descartes. Les angles sont repérés par rapport à la normale au dioptre (voir la Figure 1 pour la désignation des angles).

- Première loi : les directions de propagation sont contenues dans le plan d'incidence formé par le rayon incident et la normale au dioptre.
- Deuxième loi : l'angle d'incidence i et l'angle de réflexion r sont égaux.
- Troisième loi : l'angle de l'onde transmise t et l'angle d'incidence i vérifient la relation :

$$\frac{\sin(i)}{c_1} = \frac{\sin(t)}{c_2} \quad (\text{B.1})$$

ou encore, si $n_1 = c_{\text{vide}}/c_1$ et $n_2 = c_{\text{vide}}/c_2$,

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(t) \quad (\text{B.2})$$

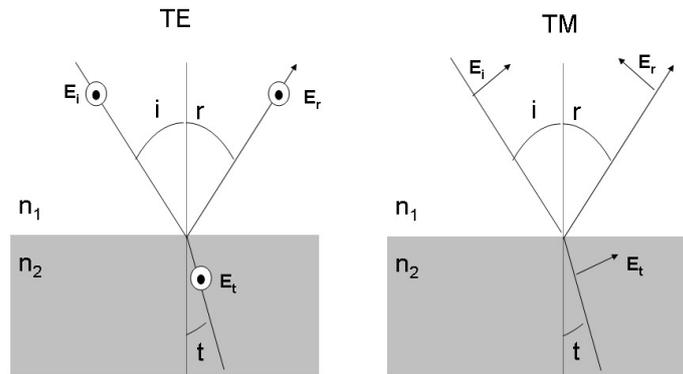


FIGURE B.1 – Orientation et polarisation des ondes incidente, transmise et réfléchi par un dioptre plan.

Polarisation	TE	TM
Coefficients en amplitude		
Réflexion	$r_{TE} = \frac{n_1 \cos(i) - n_2 \cos(t)}{n_1 \cos(i) + n_2 \cos(t)}$	$r_{TM} = \frac{n_1 \cos(t) - n_2 \cos(i)}{n_1 \cos(t) + n_2 \cos(i)}$
Transmission	$t_{TE} = \frac{2n_1 \cos(i)}{n_1 \cos(i) + n_2 \cos(t)}$	$t_{TM} = \frac{2n_2 \cos(i)}{n_1 \cos(t) + n_2 \cos(i)}$
Coefficients en intensité		
Réflexion	$R_{TE} = r_{TE}^2$	$R_{TM} = r_{TM}^2$
Transmission	$T_{TE} = 1 - R_{TE}$	$T_{TM} = 1 - R_{TM}$

TABLE B.1 – Coefficients de Fresnel

1.3 Polarisation

En électromagnétisme, on montre que certaines composantes du champ sont continues au passage du dioptre et d'autres non. L'étude détaillée de ces différentes relations de passage nous permettra de déterminer quelle proportion de la puissance incidente est réfléchi ou transmise (voir plus loin). Nous pouvons d'ors et déjà présenter que la polarisation jouera un grand rôle. Il est commode de projeter l'état de polarisation de la lumière suivant deux directions définies par le dioptre. On distingue ainsi les composantes de polarisation P contenues dans le plan d'incidence et les composantes S perpendiculaires au plan d'incidence (et ainsi parallèles au dioptre). Si l'onde incidente a son champ électrique suivant S, elle est dite transverse électrique (TE). Si au contraire, son champ électrique n'a qu'une composante P, elle est dite transverse magnétique (TM) car son champ magnétique est nécessairement suivant S.

2 Coefficients de Fresnel

2.1 Expression générale

Nous donnons sans démonstration les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude puis en puissance d'une onde lumineuse incidente sur un dioptre. **Ce sont les coefficients de Fresnel.**

2.2 Expression en incidence normale

En incidence normale, $i = r = t = 0$. Les coefficients sont indépendants de la polarisation.

$$r_{TE} = r_{TM} = r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (\text{B.3})$$

$$t_{TE} = t_{TM} = t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (\text{B.4})$$

$$R_{TE} = R_{TM} = R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (\text{B.5})$$

$$T_{TE} = T_{TM} = T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

Application numérique pour un dioptre air-verre, $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$. Dans ses conditions, $r = -0.2$ et $t = 0.8$. De plus $R = 0.04$ et $T = 0.96$. Seulement quatre pourcent de la puissance lumineuse incidente est réfléchi.

3 Conséquences

3.1 Déphasage à la réflexion

Considérons le cas d'une incidence proche de la normale de telle sorte que $\cos i \sim \cos t \sim 1$. On constate que **le signe de r dépend de la différence $n_1 - n_2$** .

- Si le premier milieu est moins réfringent que le second ($n_1 < n_2$), l'onde réfléchi est déphasée de π par rapport à l'onde incidente.
- Si le premier milieu est plus réfringent que le second ($n_1 > n_2$), l'onde réfléchi n'est pas déphasée par rapport à l'onde incidente.

3.2 Angle de Brewster

Nous voyons dans le tableau 1 que les coefficients de réflexion et de transmission dépendent de la polarisation de la lumière. Nous présentons dans la Figure 2 l'évolution des coefficients de transmission et réflexion en amplitude pour les deux états de polarisation (rappelons que les angles t et i sont liés par la relation de Snell-Descartes).

On constate que pour un angle d'incidence bien précis i_B , le coefficient de réflexion en intensité s'annule pour la polarisation TM. Cet angle d'incidence i_B est appelé **Angle de Brewster**. Un peu de manipulation trigonométrique permet d'établir sa valeur :

$$\tan(i_B) = n_2/n_1 \quad (\text{B.8})$$

Il est aussi possible de montrer (toujours avec un peu de trigonométrie...) que dans cette configuration le rayon réfléchi et le rayon transmis forment un angle droit.

Conséquence pratique : à l'angle de Brewster, le faisceau réfléchi est polarisé. Il est purement TE, le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, il est parallèle au dioptre. Il s'agit d'un moyen simple, bien que peu efficace, d'obtenir un rayonnement polarisé.

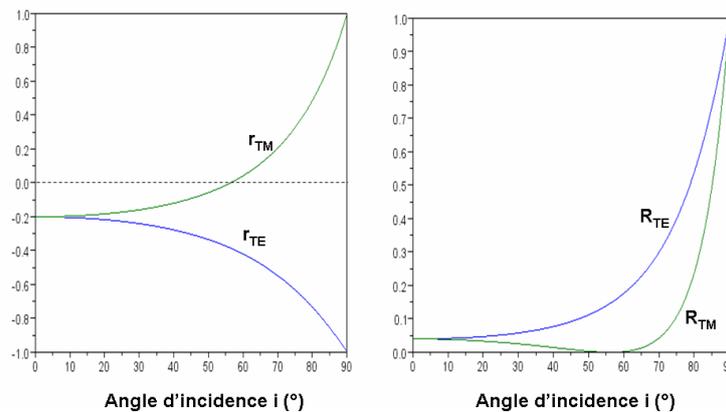


FIGURE B.2 – Coefficients de Fresnel en réflexion pour les polarisations TE et TM.

4 Interface diélectrique-métal

La différence essentielle entre un métal et un diélectrique tient à la présence dans le premier de charges libres. Il est possible de modéliser l'indice de réfraction d'un métal en faisant intervenir sa conductivité. On obtient alors un indice de réfraction complexe. Les ondes transmises pourront alors être évanescentes (vecteur d'onde k imaginaire) ou atténuées (vecteur d'onde k complexe).

Pour un conducteur parfait (conductivité infinie), le champ est nul dans le métal, il n'y a pas d'onde transmise). Les relations de continuité du champ dans ce cas limite impliquent que le coefficient de réflectivité en intensité vaut $R = 1$ et que l'onde réfléchie est déphasée de π par rapport à l'onde incidente.

Annexe C

Rappels mathématiques

1 Calcul complexe

Il sera toujours pratique d'écrire une onde sinusoïdale sous forme complexe

$$\underline{S}(x, t) = A_0 \exp(-i(\omega t \pm kx + \phi)) \quad (\text{C.1})$$

On retrouve alors l'expression de l'onde en prenant la partie réelle $S(x, t) = \text{Re}(\underline{S}(x, t))$. On mène alors des calculs dans le plan complexe et nous rappelons ici les résultats utiles dans le cadre de ce cours.

Formule de Moivre $z = a + ib = u e^{i\theta}$ et complexe conjugué (c.c.) $z^* = a - ib = u e^{-i\theta}$

Module $|z| = z z^* = u = \sqrt{a^2 + b^2}$ et argument (ou phase) $\theta = \arctan(b/a)$

Propriétés $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

La moyenne temporelle d'une fonction $f(t)$ de période $T = 2\pi/\omega$ est définie par

$$\langle f \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Dans le cas où $f = S_1 S_2$ est un produit de fonctions oscillantes de type eq. C.1 alors le calcul complexe s'écrit

$$\langle f \rangle = \langle S_1 S_2 \rangle_t = \frac{1}{2} \underline{S}_1 \underline{S}_2^*$$

2 Formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos 2p &= \cos^2 p - \sin^2 q & \sin 2p &= 2 \sin p \cos p & (\text{C.2}) \\ \cos(p + q) &= \cos p \cos q - \sin p \sin q & \sin(p + q) &= \sin p \cos q + \sin q \cos p \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sin p + \sin q &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & \sin p - \sin q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(p + p) &= \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q} & t = \tan(p/2) & \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} & (\text{C.3}) \\ & & & \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ & & & \tan x &= \frac{2t}{1 - t^2} \end{aligned}$$

3 Transformées de Fourier

3.1 Définition

Transformée de Fourier de la fonction $f : x \rightarrow f(x)$ de R dans C .

$$F(u) = TF(f) \tag{C.4}$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i2\pi ux) dx$$

Transformée de Fourier inverse de la fonction $F : u \rightarrow F(u)$ de R dans C .

$$f(x) = TF^{-1}(F) \tag{C.5}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \exp(i2\pi ux) du$$

Transformée de Fourier à deux dimensions de la fonction $f : x, y \rightarrow f(x, y)$:

$$F(u, v) = TF(f) \tag{C.6}$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-i(2\pi ux + 2\pi vy)) dx dy$$

3.2 Propriétés usuelles

La transformée de Fourier inverse est l'opération réciproque de la transformée de Fourier.

$$TF^{-1}(TF(f)) = f \tag{C.7}$$

La transformée de Fourier est linéaire :

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \tag{C.8}$$

$$F(u) = TF(f)(u) = a_1 TF(f_1)(u) + a_2 TF(f_2)(u)$$

Si f est réelle et paire, alors $TF(f)$ est réelle et paire, de plus :

$$F(u) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi ux) dx \tag{C.9}$$

Cette relation est utile pour la spectroscopie par transformée de Fourier.

Si f est réelle et impaire, alors $TF(f)$ est imaginaire pure et impaire, de plus :

$$F(u) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi ux) dx \tag{C.10}$$

Conjugaison :

$$TF(\bar{f})(u) = \overline{TF(f)(-u)} \tag{C.11}$$

Transformée de Fourier de transformée de Fourier (utile pour la physique des images et le filtrage spatial)

$$TF(TF(f))(x) = f(-x) \quad (C.12)$$

Transformée de Fourier à deux dimensions de $f(x, y) = g(x)h(y)$ (utile pour la diffraction par un diaphragme à deux dimensions) :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(x)h(y) & (C.13) \\ G &= TF(g) \\ H &= TF(h) \\ F(u, v) &= TF(f)(u, v) = G(u)H(v) \end{aligned}$$

Translation suivant x :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x - a) & (C.14) \\ G(u) &= TF(g)(u) = \exp(-i2\pi au)F(u) \end{aligned}$$

Modulation suivant x :

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp(i2\pi u_0 x)f(x) & (C.15) \\ G(u) &= TF(g)(u) = F(u - u_0) \end{aligned}$$

Dilatation suivant x :

$$\begin{aligned} F &= TF(f) & (C.16) \\ g(x) &= f(ax) \\ G(u) &= TF(g)(u) = 1/|a| F(u/a) \end{aligned}$$

Interprétation : Une dilatation de f conduit à une contraction de F et inversement. Plus f est "étroite" plus F est "large".

Dérivation :

$$\begin{aligned} F &= TF(f) & (C.17) \\ g(x) &= f'(x) \\ G(u) &= TF(g)(u) = 2i\pi u F(u) \end{aligned}$$

3.3 Transformées de Fourier de fonctions usuelles

Définition de la fonction "porte" ou "rectangle" de largeur 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{rect}(x) & (C.18) \\ f(x) &= 1 & -1/2 < x < 1/2 \\ f(x) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Définition de la fonction "porte" ou "rectangle" de largeur a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{rect}(x/a) & (C.19) \\ f(x) &= 1 & -a/2 < x < a/2 \\ f(x) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Transformée de Fourier de la fonction "rectangle" $\text{rect}(x/a)$:

$$f(x) = \text{rect}(x/a) \quad (\text{C.20})$$

$$F(u) = TF(f)(u) = \text{asinc}(\pi au) = \text{asin}(\pi au)/(\pi au)$$

Transformée de Fourier d'une exponentielle complexe :

$$f(x) = \exp(i2\pi u_0 x) \quad (\text{C.21})$$

$$F(u) = TF(f)(u) = \delta(u - u_0)$$

où δ est la distribution de Dirac.

Transformée de Fourier d'une Gaussienne (utile en spectroscopie et en diffraction) :

$$f(x) = \exp(-b^2 x^2) \quad (\text{C.22})$$

$$F(u) = TF(f)(u) = (\sqrt{\pi}/b)\exp(-\pi^2 u^2 / b^2)$$

La TF d'une gaussienne est une gaussienne !

Transformée de Fourier d'une Lorentzienne (utile en spectroscopie) :

$$f(x) = \frac{1}{b^2 + x^2} \quad (\text{C.23})$$

$$F(u) = TF(f)(u) = \frac{\pi}{b}\exp(-b|u|)$$

4 Propriétés de la fonction de Dirac

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \quad (\text{C.24})$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - y) dx \quad (\text{C.25})$$

Transformée de Fourier de la distribution de Dirac :

$$f(x) = \delta(x - a) \quad (\text{C.26})$$

$$F(u) = TF(f)(u) = \exp(-i2\pi ua)$$

Peigne de Dirac (*comb en anglais*), succession infinie de distributions de Dirac séparées de 1.

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n) \quad (\text{C.27})$$

$$F(u) = TF(f)(u) = \text{comb}(u)$$

Utile pour traiter rapidement un problème de diffraction faisant intervenir un nombre infini de motifs identiques.

5 Transformée de Fourier de la fonction "cercle"

On se place dans le plan (xOy) . Soit M un point du plan de coordonnées $M(x,y)$. On note $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La fonction "cercle" $cercle(r/R)$ vaut 1 si le point $M(x,y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon R , elle vaut 0 dans le cas contraire.

La transformée de Fourier 2D de cette fonction est alors :

$$A(\rho, R) = TF(cercle(r/R)) = \frac{2J_1(2\pi R\rho)}{2\pi R\rho} \quad (C.28)$$

Avec $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ et J_1 la fonction de Bessel d'ordre 1.

La fonction $A(\rho, R)$ s'annule pour certaines valeurs de ρ (non périodiques). Le premier point d'annulation est $\rho_0 = \frac{1,22}{2R}$.

6 Produit de convolution

6.1 Définition

On construit à partir de deux fonctions f et g la fonction $h = f * g$ telle que

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (C.29)$$

$$(C.30)$$

$$f * g = g * f$$

6.2 Lien avec la transformée de Fourier

$$h(x) = (f * g)(x) \quad (C.31)$$

$$H(u) = TF(h)(u) = TF(f)(u)TF(g)(u) = F(u)G(u)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit de leurs transformées de Fourier.

7 Algèbre vectorielle

7.1 Produits vectoriel et mixte

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}, \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \text{ et permutation circulaire}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] \text{ pour les échanges 2 à 2}$$

Vecteur surface d'un losange de côtés (a, b) : $\vec{S} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Volume d'un parallélépipède de côtés (a, b, c) : $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

7.2 Opérateurs différentiels :

Relations locales :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \Delta U$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\nabla}(UW) = U(\vec{\nabla} W) + W(\vec{\nabla} U)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (U\vec{A}) = (\vec{\nabla} U) \cdot \vec{A} + U(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \wedge (U\vec{A}) = \vec{\nabla} U \wedge \vec{A} + U \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B}$$

En coordonnées cylindriques et sphériques la divergence, le rotationnel et les opérations déduites ne s'obtiennent pas simplement en manipulant $\vec{\nabla}$ comme un vecteur (contrairement au gradient) (voir plus loin).

Relations intégrales :

Théorème de Stokes : soit \mathcal{S} une surface s'appuyant sur le contour fermé \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{et} \quad \oint_{\mathcal{C}} U d\vec{l} = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} U \wedge d\vec{S}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky : soit \mathcal{V} le volume délimité par la surface fermée \mathcal{S}

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau \quad \text{et} \quad \oiint_{\mathcal{S}} U d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} U d\tau$$

7.3 Coordonnées cartésiennes :

le point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Les coordonnées sont dans \mathbb{R} .

Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$. Les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes.

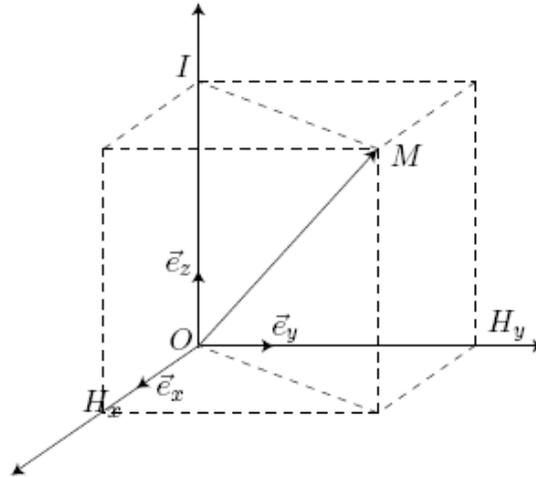
Élément de volume : $d\tau = dx dy dz$

et de surface : $dS = dy dz$ (x fixé par exemple)

$$\text{Gradient : } \vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\text{Divergence : } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

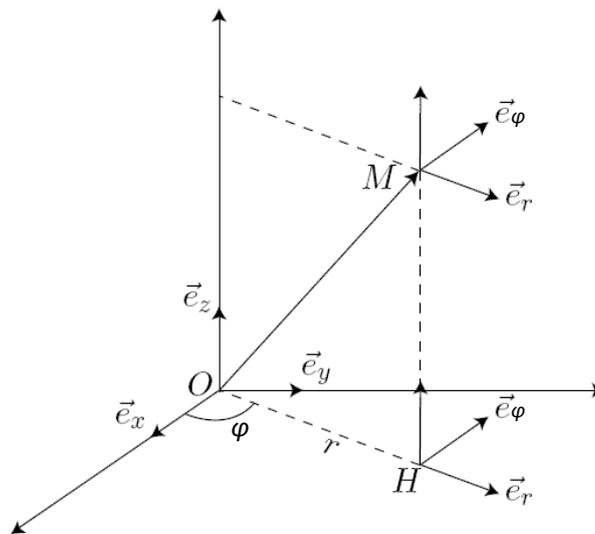
$$\text{Rotationnel : } \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$



Laplacien : $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ et $\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$.

7.4 Coordonnées cylindriques :

le point M est repéré par ses coordonnées (r, φ, z) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ avec $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$. Les coordonnées vérifient $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$.



Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$

Différentielles : la direction de \vec{e}_r et \vec{e}_φ dépend de φ . Au cours d'un déplacement élémentaire, la variation de ces vecteurs est $d\vec{e}_r = d\varphi \vec{e}_\varphi$, $d\vec{e}_\varphi = -d\varphi \vec{e}_r$.

Elément de volume : $d\tau = dr r d\varphi dz = r dr d\varphi dz$

et de surface : $dS = r d\varphi dz$ (r fixé) ou bien $dS = r dr d\varphi$ (z fixé)

Gradient : $\vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$

Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right)$

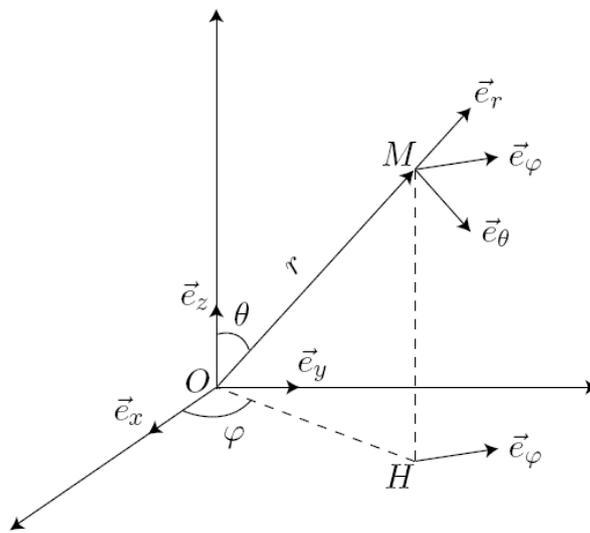
Laplacien scalaire : $\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(\frac{A_r}{2} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta A_\varphi - \frac{2}{r^2} \left(-\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{2} \right) \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

7.5 Coordonnées sphériques :

le point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ avec avec $\vec{OM} = r \vec{e}_r$. Les coordonnées vérifient $r \geq 0, \theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.



Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

Différentielles : la direction de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et \vec{e}_φ dépend de θ et φ . Au cours d'un déplacement élémentaire, la variation de ces vecteurs est

$$d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi, \quad d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r - \cos \theta d\varphi \vec{e}_\varphi, \quad d\vec{e}_\varphi = -\sin \theta d\varphi \vec{e}_r - \cos \theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

Elément de volume : $d\tau = dr r d\theta r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$

et de surface : $dS = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ (r fixé)

Gradient : $\vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$

Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right)$

Rotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right)$

Laplacien scalaire : $\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta A_r + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(-\sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta A_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(-\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \end{pmatrix}$$