

**Correction des exercices traités en séance de TD 8 (programmée la semaine du 23 mars pour tous les groupes)**

**Feuille de TD5, exercice 1, question 4**

Comme vu en cours, dans un milieu LIH, l'aimantation  $\vec{M}$  est proportionnelle au champ magnétique  $\vec{H}$ . Par définition de la susceptibilité magnétique dans un milieu LHI :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Mais dans cette relation, le champ  $\vec{H}$  à considérer est le champ magnétique *total*, c'est à dire la superposition du champ magnétique  $\vec{H}_0$  appliqué (lequel est responsable de l'aimantation du milieu LIH) et du champ démagnétisant  $\vec{H}_d$  créé par l'aimantation. Il y a donc une équation (très simple) à résoudre pour exprimer  $\vec{M}$ .  $\vec{B}_d$  s'en déduit immédiatement.

On rappelle la relation générale entre champ magnétique et champ d'induction :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

On avait déjà déterminé en question 3) (séance 7) l'expression du champ magnétique démagnétisant, et on avait trouvé :

$$\vec{H}_d = -\frac{1}{3}\vec{M}$$

Pour ce qui est du champ magnétique appliqué extérieur, du fait que  $\vec{M} = \vec{0}$  à l'extérieur, on déduit :

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Le champ magnétique total étant la superposition des deux champs (démagnétisant et appliqué) :

$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}_d + \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{1}{3}\vec{M}$$

Or  $\vec{M}$  et  $\vec{H}_{tot}$  étant reliés par :  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}_{tot}$  :

$$\vec{M} = \chi_m \left( \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \frac{1}{3}\vec{M} \right) \Rightarrow \vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \frac{\chi_m}{3}} \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

On avait déjà montré (question 3, cf séance 7) que le champ d'induction (créé par les courants ampériens  $\vec{j}_S = \vec{M} \wedge \vec{n}$ ) s'écrit :  $\vec{B}_d = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$  d'où :

$$\vec{B}_d = \frac{2\chi}{3 + \chi} \vec{B}_0$$

Revoir la définition d'un matériau para ou dia-magnétique dans le cours, ainsi que le *signe* et l'*ordre de grandeur* de la susceptibilité  $\chi$  associée. L'ordre de grandeur de  $\vec{B}_d$  s'en déduit. Pour un diamagnétique  $\chi < 0$  et  $|\chi| \sim 10^{-9} - 10^{-5}$ . Pour un paramagnétique  $\chi > 0$  et  $|\chi| < 10^{-3}$ . Dans tous les cas  $|\chi| \ll 1$  et donc  $B_d \sim \frac{2}{3}\chi B_0 \Rightarrow |B_d| \ll B_0$ . Le champ d'induction démagnétisant est négligeable devant le champ appliqué.

## Feuille de TD5, exercice 2 : cylindre à aimantation axiale

1. Utiliser l'expression générale des courants d'aimantation équivalents en choisissant le vecteur  $\vec{n}$  adapté à la géométrie.

Le système de coordonnées adapté est bien sûr le système cylindrique  $(\rho, \theta, z)$  avec la direction  $\vec{u}_z$  parallèle à l'axe du cylindre. La normale extérieure à la surface cylindrique est  $\vec{n} = \vec{u}_\rho$ .

L'aimantation étant uniforme dans le cylindre, la densité volumique de courants équivalents est nulle :

$$\vec{j}_V = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \vec{0}$$

tandis que la densité surfacique de courants équivalents s'exprime :

$$\vec{j}_S = \vec{M} \wedge \vec{n} = M\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = M\vec{u}_\theta$$

2. A partir de la distribution de courants trouvée, on peut facilement déterminer la direction de l'induction  $\vec{B}_d$  créée.

Le cylindre étant infini et uniformément aimanté, tout plan  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie de la distribution de courants. L'induction  $\vec{B}_d$  créée par les courants d'aimantation équivalents lui est donc perpendiculaire c'est à dire dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

Pour établir l'expression de  $\vec{B}_d$  à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre, on peut utiliser un résultat du TD 4 précédent. On remarquera que la distribution de courants surfaciques équivalents est analogue à celle d'un solénoïde infini ; pour l'analogie, il est nécessaire d'avoir bien compris la définition d'une densité surfacique de courants  $\vec{j}_S$ .

Un solénoïde infini constitué de  $n$  spires par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité  $i$  présente une densité surfacique de courant  $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_\theta$  avec  $j_S = ni$ . Il suffit pour le justifier de considérer un élément du solénoïde de longueur  $l$  : il contient  $nl$  spires et est donc parcouru par un courant  $nli$ . Or par définition de la densité de courant surfacique,  $j_S = \frac{nli}{l} = ni$ .

On peut donc appliquer le résultat du TD précédent concernant le calcul du champ d'induction magnétique créé par un solénoïde infini, en remplaçant  $ni$  par  $j_S$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \vec{B}_d^{int} &= \mu_0 j_S \vec{u}_z \\ \vec{B}_d^{ext} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Or pour le cylindre aimanté  $j_S = M$  donc :

$$\begin{aligned} \vec{B}_d^{int} &= \mu_0 M \vec{u}_z = \mu_0 \vec{M} \\ \vec{B}_d^{ext} &= \vec{0} \end{aligned}$$

L'expression de  $\vec{H}_d$  s'en déduit ensuite, en ayant soin de distinguer les deux régions : intérieure et extérieure au cylindre.

A l'intérieur du cylindre aimanté, l'aimantation vaut  $\vec{M}$  et l'induction magnétique  $\mu_0 \vec{M}$ , donc le champ magnétique intérieur :

$$\vec{H}_d^{int} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{0}$$

A l'extérieur du cylindre aimanté, l'aimantation vaut  $\vec{0}$  et l'induction magnétique vaut  $\vec{0}$  donc le champ magnétique extérieur :

$$\vec{H}_d^{ext} = \frac{\vec{0}}{\mu_0} - \vec{0} = \vec{0}$$

Conclusion : dans cette géométrie, le champ magnétique *démagnétisant*  $\vec{H}_d$  est nul en tout point de l'espace.

3. Utiliser la relation entre  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  dans un milieu LHI (rappel :  $\vec{H}$  est le champ magnétique *total*). Le champ magnétique total est la somme du champ démagnétisant (créé par le matériau aimanté) et du champ (uniforme) créé par le solénoïde.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}_{tot} = \chi_m (\vec{H}_0 + \vec{H}_d) = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Si le milieu est paramagnétique,  $\chi > 0$  l'aimantation dans le cylindre  $\vec{M}$  est de même sens que l'induction magnétique appliquée  $\vec{B}_0$ . Si le milieu est diamagnétique  $\chi < 0$  et  $\vec{M}$  est de sens opposé à  $\vec{B}_0$ .

4. Là encore, on utilise le résultat du TD4 et la définition de la densité surfacique de courants. A l'extérieur du solénoïde  $\vec{B}_0^{ext} = \vec{0}$  tandis qu'à l'intérieur du solénoïde (et en particulier dans le cylindre aimanté)  $\vec{B}_0^{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ . Même raisonnement que précédemment, la densité surfacique de courants sur le solénoïde s'écrit  $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_\theta$  avec :

$$j_l = nI$$

donc dans le barreau aimanté, on peut écrire que le champ créé par le solénoïde vaut  $\vec{B}_0 = \mu_0 j_l \vec{u}_z$ .

5. (a) Cette relation découle des réponses aux questions précédentes, car  $\vec{M}$  et  $\vec{B}_0$  sont liés à  $\vec{j}_S$  et  $\vec{j}_l$  respectivement.

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \chi_m \frac{\mu_0 j_l \vec{u}_z}{\mu_0} = \chi_m j_l \vec{u}_z$$

Or on avait vu (question 1) que la densité surfacique de courants d'aimantation équivalents vaut  $\vec{j}_S = M \vec{u}_\theta$  d'où la relation entre la densité de courants d'aimantation à la surface du cylindre et la densité de courants libres en surface du solénoïde :

$$j_S = \chi_m j_l$$

- (b) Noter que  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  désignent les champs totaux (resp. induction et magnétique). Leurs expressions découlent donc des réponses précédentes. Vérifier que  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  obtenus vérifient bien la relation générale attendue pour les milieux LHI :  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$ . Pour l'induction magnétique, à l'intérieur du cylindre aimanté :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_d = \mu_0 j_l \vec{u}_z + \mu_0 M \vec{u}_z = \mu_0 (j_l + j_S) \vec{u}_z = \mu_0 (1 + \chi_m) j_l \vec{u}_z$$

Pour le champ magnétique, à l'intérieur du cylindre :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + \vec{0} = j_l \vec{u}_z$$

6. La relation  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$  n'est valable rigoureusement que dans un milieu LHI. Dans un milieu ferromagnétique,  $\vec{M}$  et  $\vec{H}$  ne sont pas proportionnels (cf. la courbe d'hystérésis vue en cours). Cependant il est d'usage d'introduire pour les ferromagnétiques une perméabilité relative  $\mu_r$  définie par  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ . Dans cette relation,  $\mu_r$  est donc dépendante de l'intensité de  $\vec{H}$  ; de plus, à la différence d'un milieu LHI  $\mu_r \gg 1$ .

Pour déterminer l'auto-inductance d'un solénoïde rempli par un barreau aimanté on utilisera donc cette relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ . En effet, on rappelle que la f.e.m. est liée au flux de l'induction magnétique  $\vec{B}$ , tandis que les courants réels circulant dans le solénoïde (contrôlés par l'expérimentateur) sont reliés au seul champ  $\vec{H}$ .

Or rappelle la définition de l'auto-inductance (ou self)  $L$ , abordée en L2. Un circuit électrique parcouru par un courant  $I$  crée un champ magnétique, proportionnel à  $I$ . Le flux  $\phi$  de ce champ à travers le circuit lui-même est donc aussi proportionnel à  $I$  et dépend bien sûr de la géométrie du circuit. On définit alors l'auto-inductance comme le rapport :

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Il est à noter que  $I$  est le courant *réel* parcourant le circuit considéré (ici le solénoïde).  $\phi$  représente le flux de  $\vec{B}$  à travers les  $N = nl$  spires du solénoïde de longueur  $l$  et section  $S$ , soit  $\phi = BNS$ . Or si le solénoïde est entièrement rempli par un matériau ferromagnétique de perméabilité relative  $\mu_r$ , alors  $B$  et  $H$  sont liés par  $B = \mu_0\mu_r H$  et donc :

$$\phi = \mu_0\mu_r HNS$$

Or comme vu dans la question précédente,  $H$  est directement lié à la densité surfacique de courants libres,  $H = j_l = nI = \frac{N}{l}I$ . On en déduit donc l'expression de  $L$  :

$$L = \mu_0\mu_r \frac{N^2}{l} S$$

On voit que l'introduction d'un noyau ferromagnétique dans le solénoïde a pour effet de multiplier son auto-inductance  $L$  par un facteur  $\mu_r$ . En régime variable, la f.e.m. ( $= -L\frac{dI}{dt}$ ) est donc augmentée du même facteur.

### Feuille de TD5, exercice 3 : Mesure de susceptibilité magnétique

1. En cours, on a vu qu'un moment magnétique dipolaire  $\vec{m}$  placé dans une induction extérieure  $\vec{B}_e$  avait une énergie potentielle  $-\vec{m} \cdot \vec{B}_e$ . Tant que  $\vec{m}$  est indépendant de  $\vec{B}_e$  on peut exprimer la force exercée sur le dipole par :

$$\vec{F} = -\nabla E_p = +\nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}_e) \Leftrightarrow F_i = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B}_e)}{\partial x_i}$$

Dans un milieu aimanté LHI en revanche, l'aimantation dépend de  $\vec{B}$  et on doit utiliser l'expression plus générale suivante, donnant les composantes cartésiennes de la force exercée par unité de volume :

$$F_i = \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}_e}{\partial x_i}$$

Pour répondre à la question posée, il suffit ensuite d'exprimer  $\vec{M}$  en fonction de  $\vec{B}_e$  et d'utiliser le fait établi dans les exercices précédents, selon lequel l'induction  $\vec{B}_e$  créée par les courants ampériens est négligeable si  $|\chi| \ll 1$ .

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = \chi(\vec{H}_e + \vec{H}_d) = \chi \left( \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} + \frac{\vec{B}_d}{\mu_0} - \vec{M} \right) \Rightarrow \vec{M} = \frac{\chi}{1 + \chi} \left( \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} + \frac{\vec{B}_d}{\mu_0} \right)$$

Or si  $|\chi| \ll 1$  on a vu que  $B_d \ll B_e$  et donc :

$$\vec{M} \simeq \chi \frac{\vec{B}_e}{\mu_0}$$

La force magnétique exercée par unité de volume a donc pour composantes :

$$F_i = \chi \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}_e}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \chi \frac{B_e^2}{2\mu_0} \right)$$

D'où :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \left( \chi \frac{B_e^2}{2\mu_0} \right)$$

2. Il s'agit de l'exérence du tube de Quincke décrite en cours. Il faut réécrire la loi de l'hydrostatique en présence du champ magnétique. On rappelle que la loi de l'hydrostatique résulte de l'équilibre entre les forces de pression (forces de surface) et les forces de volume gravitationnelles. Ici, aux forces volumiques gravitationnelles s'ajoutent les forces volumiques magnétiques.

Si les seules forces de volume sont les forces gravitationnelles, l'équilibre mécanique entre forces de pression et forces de volume s'écrit (cf. cours mécanique des fluides) :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

où  $\rho \vec{g}$  représente la force de gravitation par unité de volume. Ici il faut tenir compte aussi de l'existence d'une force magnétique par unité de volume et la condition d'équilibre devient :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \left( \chi \frac{B_e^2}{2\mu_0} \right) = \vec{\nabla} \left( -\rho g z + \chi \frac{B_e^2}{2\mu_0} \right)$$

La loi de l'hydrostatique devient donc :

$$p + \rho g z - \chi \frac{B_e^2}{2\mu_0} = \text{Cte}$$

En l'absence de champ magnétique, la surface libre a même hauteur dans les deux branches du tube en U. En revanche si seulement l'une des branches est insérée dans l'enfer de l'électroaimant  $B_e = B$  pour cette branche, tandis que  $B_e = 0$  pour l'autre branche. A la surface libre, on a des deux côtés  $p = p_{atm}$  et donc les hauteurs seront différentes avec :

$$p_{atm} + \rho g z_B - \chi \frac{B_e^2}{2\mu_0} = p_{atm} + \rho g z_0 + 0$$

$$z_B - z_0 = \frac{\chi}{\rho g} \frac{B_e^2}{2\mu_0}$$

Donc si le liquide est diamagnétique ( $\chi < 0$ ), la surface libre est plus basse dans la branche plongée dans l'entrefer, tandis que si le liquide est paramagnétique ( $\chi > 0$ ), elle sera plus haute. A partir de la mesure du dénivellé, on peut déduire la valeur de  $\chi$ .