Corrigé pour les exercices en séance de TD 9

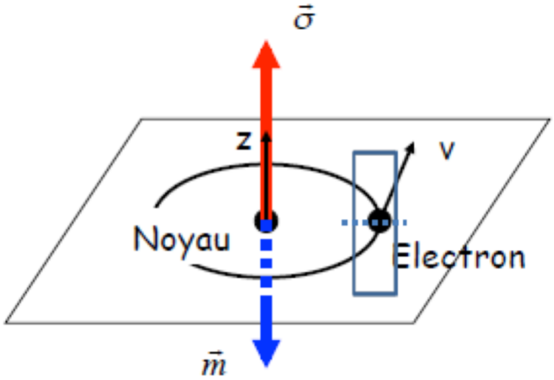
Feuille de TD6 : modèles microscopiques et diamagnétisme

8 avril 2020

1 Diamagnétisme et moment magnétique orbital

1.1 Modèle de Bohr

Le but de cet exercice est de retrouver la relation reliant le moment cinétique et le moment magnétique orbital par le PFD. Supposons, comme dans le cours, que le noyau de l'atome porte une charge Ze $(Z > 0, e > 0)$ et un électron fait un mouvement circulaire uniforme avec la vitesse angulaire ω_0 autour du noyau.



(a) La seule force subie par l'électron est la force Coulombienne par le noyau. Ici nous négligeons la gravité. Appliquons le PFD sur l'électron :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\rho^2} \vec{u}_r.$$

(b) Pour un mouvement circulaire uniforme,

$$\vec{v} = \omega_0 \rho \vec{u}_\theta.$$

Nous pouvons représenter l'accélération par la vitesse angulaire et le rayon du cercle ρ :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega_0^2 \rho \vec{u}_r$$

car la force est centripète. Nous pouvons donc en déduire ω_0 en fonction de e, m_e, ρ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_e \rho^3}}.$$

Application numérique : $\omega_0 \sim 10^{16}$ rad.s^{-1}.

(c) Nous assimilons la trajectoire de l'électron à une spire suivant à $+\vec{u}_\theta$. Sachant que, par définition, $I = \frac{q}{T}$ avec la période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, on a donc :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e\omega_0}{2\pi} \\ \vec{m} &= I\vec{S} = -\frac{e\omega_0}{2\pi}\pi\rho^2\vec{u}_z = -\frac{e}{2}\rho^2\omega_0\vec{u}_z \\ \vec{\sigma} &= m_e\rho^2\omega_0\vec{u}_z. \end{aligned}$$

(d) L'identification de la relation est directe :

$$\vec{m} = \frac{-e}{2m_e}\vec{\sigma} = \gamma\vec{\sigma}$$

où γ est le rapport gyromagnétique de l'électron.

(e) Question de cours : $g = 1$ si le spin est nul et $g = 2$ si le moment orbital est nul. μ_B est le magnéton de Bohr.

1.2 Diamagnétisme

Nous considérons l'atome précédent placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

(a) La nouvelle force subie par l'électron est la partie magnétique dans la force de Lorentz, $-e\vec{v} \times \vec{B}$, qui est selon $\vec{u}_r$.

(b) Supposons que l'électron continue à faire un mouvement circulaire de rayon ρ après avoir appliqué $\vec{B}$ mais avec une nouvelle vitesse angulaire ω. Nous écrivons le PFD selon $\vec{u}_r$ remplaçant ω_0 par la nouvelle vitesse angulaire ω :

$$-m_e\rho\omega^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{\rho^2} - eB\rho\omega$$

Avec l'expression de ω_0 dans 1.1.(b),

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{eB}{m_e}\omega = 0$$

donc $\omega_c = eB/m_e$.

(c) Application numérique avec la valeur de ω_0 : $B \sim 10^5$T ! Notons que le champ magnétique terrestre est $\sim 10^{-5}$T et le champ magnétique qu'on peut atteindre dans le laboratoire est ~ 100T avec des explosifs TNT. Mais on ne peut que maintenir cette amplitude du champ magnétique pendant même pas une seconde ! Tout pour justifier notre approximation suivante $\omega_c \ll \omega_0$.

(d) Résoudre l'équation du second degré précédent pour ω et appliquer un développement limité jusqu'au premier ordre en $\omega_c/\omega_0 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2}}{2} \\ &= \frac{\omega_c}{2} + \omega_0\sqrt{1 + (\frac{\omega_c}{2\omega_0})^2} \\ &\approx \frac{\omega_c}{2} + \omega_0 + \frac{\omega_c^2}{8\omega_0} \\ &\approx \frac{\omega_c}{2} + \omega_0 \end{aligned}$$

où nous admettons $\omega > 0$ et nous négligeons le troisième terme dans la troisième ligne car il est un terme de l'ordre 2 en ω_c/ω_0.

(e) Réponse directe avec le résultat précédent : ω est augmenté de $\Delta\omega = eB/2m_e$ (pulsation de Larmor) par l'application du champ magnétique.

(f) Reprenons les formules dans 1.1.(c) en remplaçant ω_0 par ω. Le moment magnétique induit par le champ magnétique $B\vec{u}_z$ est :

$$\vec{m}_{induit} = -e\frac{\Delta\omega}{2\pi}\pi\rho^2\vec{u}_z$$

qui est anti-parallèle par rapport au champ magnétique donc prouve le diamagnétisme.

2 Susceptibilité diamagnétique

Dans cet exercice, nous allons calculer la susceptibilité magnétique χ du matériau. Supposons ici que les atomes de ce matériau n'ont pas de moments magnétiques sans champ magnétique. L'application d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ induit un moment magnétique par le diamagnétisme discuté dans l'exercice précédent. Cela revient à considérer seulement $\vec{m}_{induit}$.

1. Les interactions entre les électrons sont négligées et les atomes sont supposés indépendant entre eux. Cela justifie que nous pouvons utiliser le résultat 1.2.(f) :

$$\begin{aligned}\vec{m}_{induit} &= -e\frac{\omega_L}{2\pi}\pi\langle\rho^2\rangle\vec{u}_z \\ &= -\frac{Ze^2}{4m}\langle\rho^2\rangle\vec{B}.\end{aligned}$$

Or par isotropie,

$$\langle\rho^2\rangle = \langle x^2+y^2\rangle = 2\langle x^2\rangle = \frac{2}{3}\langle x^2+y^2+z^2\rangle = \frac{2}{3}\langle r^2\rangle$$

où nous relions le rayon sur le plan du mouvement au rayon dans l'espace. Finalement,

$$\vec{m}_{induit} = -\frac{Ze^2}{6m}\langle r^2\rangle\vec{B}.$$

2. L'aimantation est le moment magnétique volumique :

$$\vec{M} = n\vec{m}_{induit} = -\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle\vec{B}.$$

3. Prenons la densité du gaz est $\sim 10^{25}m^{-3}$ qui est l'ordre de grandeur pour un gaz parfait sous conditions normales de température et de pression (vous la pouvez vérifier avec $p = nk_BT$). En plus, rappelons que la taille typique pour un atome est $\sim 10^{-10}m$. On obtient en projectant les vecteurs selon $\vec{u}_z$:

$$\mu_0\frac{M}{B} = -\mu_0\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle = -6\times10^{-10} \ll 1.$$

4. Par définition, $B = \mu_0(H+M)$. Nous représentons H en fonction de B en utilisant la relation précédente.

$$H = \frac{B}{\mu_0}\left(1-\frac{\mu_0 M}{B}\right) = \frac{B}{\mu_0}\left(1+\mu_0\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle\right).$$

5. Par définition, $\chi = M/H$ que nous avons noté χ_m dans le cours.

$$\chi = -\frac{\mu_0\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle}{1+\mu_0\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle} \approx -\mu_0\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle = -6\times10^{-10}.$$