Examen de Mécanique des fluides

Mardi 7 janvier 2020, durée 3h

I. Écoulement de Poiseuille

Un écoulement de Poiseuille correspond à l'écoulement d'un fluide, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η constantes, dans une conduite **cylindrique** d'axe Ox et de rayon R. Cet écoulement est imposé par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ entre l'entrée et la sortie de la conduite de sorte qu'un écoulement unidirectionnel prenne place dans la conduite tel que $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$. On suppose que l'écoulement est stationnaire et axisymétrique et que la gravité ne joue aucun rôle dans ce problème.
Le volume de contrôle, de rayon r quelconque et de longueur L, est défini sur le schéma 1 par des pointillés et est délimité par sa surface de contrôle composée des surfaces S_1, S_2 et la surface latérale S_L. Compte tenu des hypothèses et que la quantité de mouvement est exclusivement horizontale dans ce problème, le théorème de transport de Reynolds projeté selon Ox se réduit à

$$\oiint_S \rho \vec{v}.\vec{e}_x \left(\vec{v}.\vec{dS}\right) = -\oiint_S p \, \vec{dS}.\vec{e}_x + \oiint_S \left(\vec{\vec{\sigma}}' \vec{e}_x\right).\vec{dS}. \tag{1}$$

1. Déterminer de quelle variable dépend la composante v_x de la vitesse compte tenu que le fluide est incompressible.
2. Calculer le terme $\oiint_S \rho \vec{v}.\vec{e}_x \left(\vec{v}.\vec{dS}\right)$ et justifier le résultat que vous obtenez.
3. Déterminer le produit matriciel $\vec{\vec{\sigma}}' \vec{e}_x$.
4. Par application du théorème de transport projeté dans la direction du mouvement (1) sur le volume de contrôle schématisé sur la figure 1, montrer que

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{\Delta p \, r}{2\eta L}.$$

5. Déduire du résultat de la question précédente, l'expression du profil de vitesse compte tenu de la condition sur la vitesse en $r = R$.

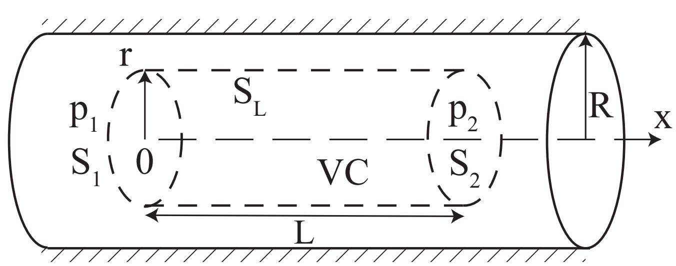

FIGURE 1 – Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de rayon R.

6. Exprimer le débit volumique dans la conduite. De quelle loi s'agit-il et préciser quel est le rôle de la viscosité dans la conduite ?
7. Calculer le débit volumique pour de l'eau ($\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pa.s) et de l'huile très visqueuse ($\eta_{huile} = 1$ Pa.s) sachant que le rayon et la longueur de la conduite sont $R = 10$ cm et $L = 10$ m, et que la différence de pression imposée est $\Delta p = 10^3$ Pa.

Données en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x}.$$

$$\textbf{div}\overrightarrow{A} = \vec{\nabla}.\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z},$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \end{bmatrix}$$

II. Lévitation d'une balle de ping-pong dans un jet d'air

Une expérience bien connue de Mécanique des Fluides consiste à faire léviter une balle de ping-pong dans un jet d'air. La balle et le jet sont respectivement orientés de manière à provoquer une courbure des lignes de courant dans le jet (voir figure 2) qui engendre une diminution de la pression de l'air au contact de la balle et génère une force de portance F_p, orientée selon la bissectrice de l'angle que forme les directions du jet avant et après les points de contact. Cette expérience est une illustration de l'effet Coanda et c'est ce qu'on propose d'étudier dans ce problème.
On considère un jet d'air, supposé parfait (sans viscosité), de vitesse et d'épaisseur initiales v_0 et e respectivement. L'écoulement est stationnaire, incompressible et, pour simplifier le problème, la balle est assimilée à un cylindre de rayon R et d'axe Oz, perpendiculaire au plan de la figure, de sorte que l'écoulement soit strictement 2D. Le jet d'air est en contact avec la balle lorsque $-\theta_c < \theta < \theta_c$ et dans cette région de l'écoulement, le jet a une épaisseur e' et la vitesse du jet est supposée orthoradiale telle que $\vec{v} = v_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta$. A l'extérieur du jet, l'air est au repos à la pression atmosphérique p_0 et on admet que la gravité ne joue aucun rôle dans ce problème. On s'intéresse à l'écoulement d'air dans le jet dans la région $R \le r \le R + e'$ et $-\theta_c \le \theta \le \theta_c$ dans la suite de ce problème.

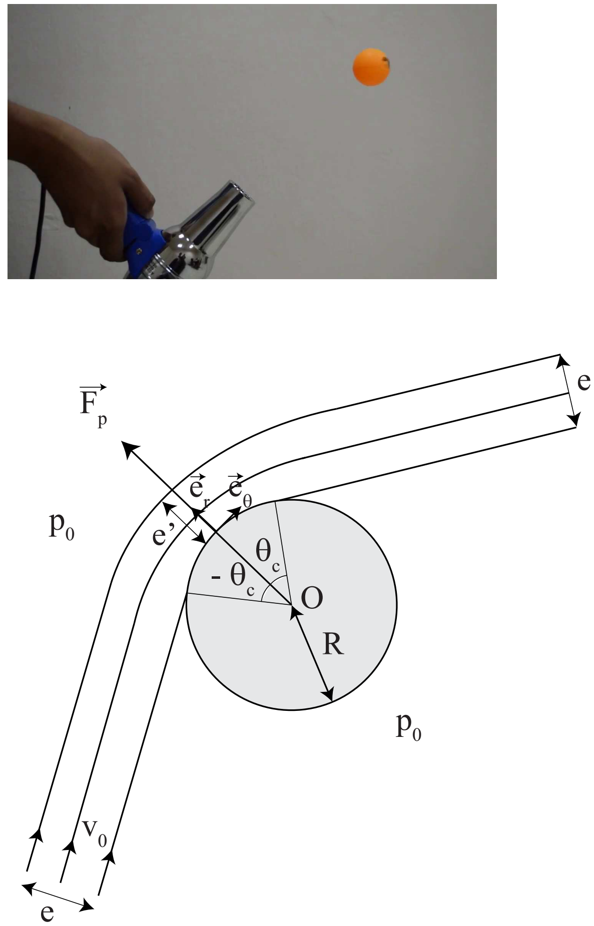

FIGURE 2 – Lévitation d'une balle de ping-pong dans un jet d'air.

1. Justifier que la vitesse orthoradiale de l'air dans le jet ne dépend que de la coordonnée radiale r. On suppose de plus que l'écoulement d'air autour de la balle est irrotationnel. En déduire l'expression de $v_\theta(r)$ en fonction de v_0, R et e'. On admettra que la vitesse du jet d'air en $r = R + e'$ est égale à v_0.
2. Appliquer la conservation du débit entre deux sections du jet d'épaisseur e et e' respectivement. En déduire l'expression de l'épaisseur e' du jet en fonction de e. On admettra que $e' \ll R$ pour simplifier.
3. Rappeler l'équation d'Euler sous forme vectorielle.
4. Montrer que le terme non-linéaire est donné par $\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{v_\theta^2}{r}\vec{e}_r$ et projeter l'équation d'Euler sur $\vec{e}_r$. Justifier pourquoi la pression augmente lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure O.
5. Préciser la condition aux limites sur la pression en $r = R + e'$ et déterminer l'expression de $p(r)$.
6. Exprimer la pression de l'air sur la face intérieure du jet en contact avec la balle, sachant que $e \ll R$ pour simplifier.
7. La force de pression élémentaire, projetée selon la bissectrice de l'angle que forme le jet, est donnée par $dF_p = -p\cos\theta dS$. Déterminer l'expression de F_p intégrée sur le contour de la balle de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$. Faire l'application numérique pour e' et F_p si $R = 4$ cm, $\rho = 1$ kg/m^3, $v = 2$ m/s, $e = 1$ cm et $\theta_c = \pi/6$ rad.

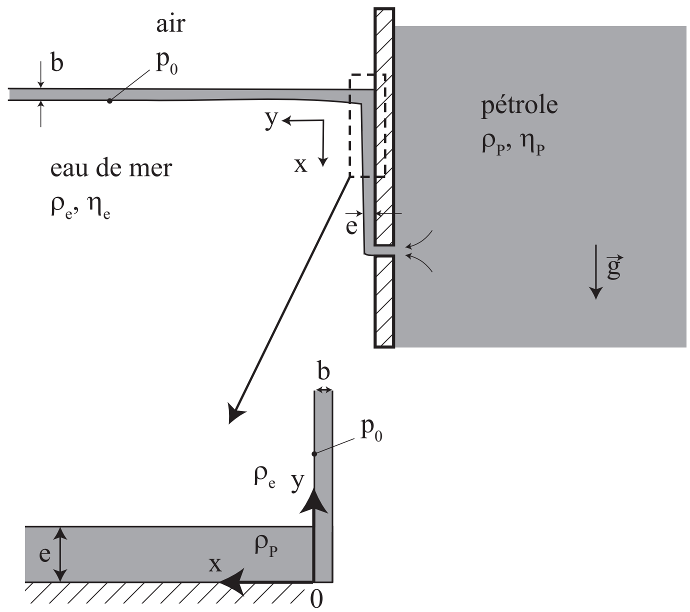

FIGURE 3 – Schématisation du problème.

III. Marée noire

Une barge pétrolière a développé une fine fissure sur son flanc, de longueur unité perpendiculaire au plan de la figure. Des fuites d'hydrocarbures s'échappent de la fissure et s'écoulent sur le côté de la barge en une couche très mince d'épaisseur e (supposée égale à la taille de la fissure). On suppose que l'écoulement de la couche de pétrole est stationnaire incompressible et unidirectionnel, $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{e}_x$, très visqueux ($\eta_P \gg \eta_e$) et que le pétrole est moins dense que l'eau ($\rho_P < \rho_e$). On néglige les effets de bords et on suppose l'écoulement 2D. Pour simplifier le problème on suppose que la fine couche de pétrole à l'air libre est d'épaisseur négligeable $b \ll 1$ et on admet que l'interface de l'eau de mer en $x = 0$ est à la pression atmosphérique p_0. L'accélération de la pesanteur g est orientée vers le bas.

1. Justifier très brièvement pourquoi le pétrole remonte à la surface de l'eau.
2. Démontrer pourquoi la composante de vitesse du pétrole selon Ox est une fonction de y uniquement.
3. Écrire l'équation de Navier-Stokes sous forme vectorielle et justifier qu'elle se réduit à l'équation de Stokes.
4. Projeter l'équation de Stokes selon Ox et Oy. En déduire que $p = p(x)$.
5. Déterminer la variation de pression hydrostatique $p(x)$ avec la profondeur dans l'eau de mer à l'interface de la couche de pétrole en $y = e$.
6. Préciser les conditions aux limites (cinématique et dynamique) qui s'applique sur le champ de vitesse, sachant que $\eta_P \gg \eta_e$.
7. Déterminer la forme du profil de vitesse $v_x(y)$. Le schématiser au propre sur votre copie.
8. Exprimer le débit volumique Q_v de pétrole qui sort par la fissure, par unité de profondeur selon Oz. Calculer le volume de pétrole libéré en mer au bout de 2h si $e = 10$ cm, $\rho_P = 800$ kg/m^3, $\rho_e = 1025$ kg/m^3 et la viscosité dynamique du pétrole est $\eta_P = 1$ Pa.s.

9. Décrire qualitativement en quoi le champ de vitesse diffère lorsque la viscosité de l'eau n'est pas négligeable par rapport à celle du pétrole.