COURS 1: GÉNÉRALITÉS

TRAITEMENT DU SIGNAL

PRESENTATION

- Mail: matthieu.kowalski@universite-paris-saclay.fr
- Site web: http://hebergement.universite-paris-saclay.fr/mkowalski/

INTRODUCTION

SIGNAL: DÉFINITION INTUITIVE

- On appelle signal une représentation physique qui transporte une “information” depuis une source vers un destinataire.
- C’est une grandeur physiquement mesurable par un capteur, pouvant varier avec le temps.

EXEMPLE: SIGNAL DE MUSIQUE

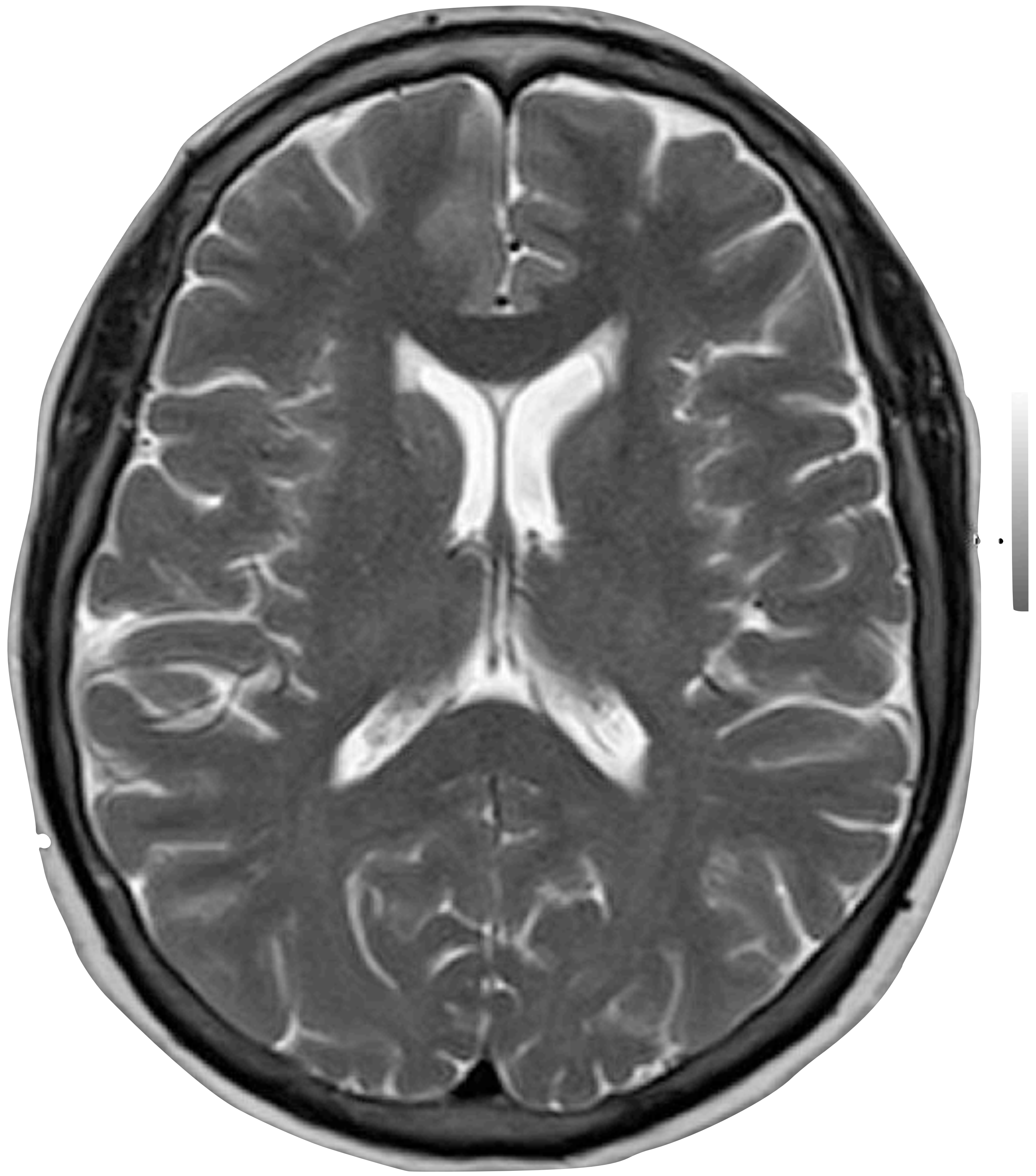
- Grandeur mesurée: variation de la pression accoustique

EXEMPLE: PHOTOGRAPHIE

- Grandeur mesurée: effet photoélectrique

EXEMPLE: IRM

- Grandeur mesurée: champs magnétique



EXEMPLE: ECHOGRAPHIE

- Grandeur physique mesurée: effet doppler par ultrason

DÉTERMINISTE VS ALÉATOIRE

- **Modèle déterministe:** signaux pouvant être prédits de manière "certaine" à l'aide de descripteurs simples (sa fonction, ses fréquences…)
  Exemple: enregistrement d'un chant, photographie…
- **Modèle aléatoire:** signaux issus de "processus stochastique": chaque "réalisation" partage des grandeurs communes, mais chaque signal est différent.
  Exemple: bruit de fond
- Les deux modèles sont complémentaires
  Exemple: signal bruité

SIGNAUX DÉTERMINISTES: DÉFINITION MATHÉMATIQUE

- Un signal ***analogique*** est une fonction d'une variable continue, en général le temps "continue". Soit s un signal analogique temporel

$$\begin{aligned} s \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto s(t) \end{aligned}$$

- Un signal ***numérique*** est une fonction d'une variable discrète, en général le temps "discret", c'est à dire **une suite mathématique**. Soit s un signal numérique temporel

$$\begin{aligned} s \ : \ & \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto s[t] = s_t \end{aligned}$$

Attention ! Tels que définis, les signaux numériques ne sont pas forcément manipulable sur ordinateur, car les suites numériques peuvent être infinies. **C'est un modèle mathématique**

OBJECTIFS DU TRAITEMENT DU SIGNAL

- Modéliser
- Analyser
- Restaurer
- Transmettre (Telecom)
- Compresser
- …

OUTILS DU TRAITEMENT DU SIGNAL

- Analyse de Fourier
- Analyse harmonique: temps-fréquence, ondelettes
- Processus aléatoires (probabilités « classiques » ou « Bayessiennes »)
- Estimation statistique
- Théorie de l'information
- …

BUT DE CE COURS

- Analyse spectrale des signaux déterministes analogiques et numériques
- Opérations sur les signaux numériques (filtrage)
- Echantillonnage: comment passer du monde analogique au monde numérique
- Analyse des signaux aléatoires

SIGNAUX DÉTERMINISTES: DÉFINITIONS GÉNÉRALES

CAUSALITÉ

Un signal s est

- causal ssi $s(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- anti-causal ssi $s(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$
- a-causal ssi il n'est ni causal, ni anti-causal

STABILITÉ

Un signal s est stable ssi

- analogique: $\|s\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| s(t) \right| \mathrm{d}\, t < +\infty$

- numérique: $\|s\|_1 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| s[t] \right| < +\infty$

SIGNAL RÉALISABLE

Un signal réalisable est un signal stable et causal

ÉNERGIE

l'énergie d'un signal est donnée par

- analogique: $\|s\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| s(t) \right|^2 \mathrm{d}\ t$
- numérique: $\|s\|_2^2 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| s[t] \right|^2$

EXEMPLES ET EXERCICES

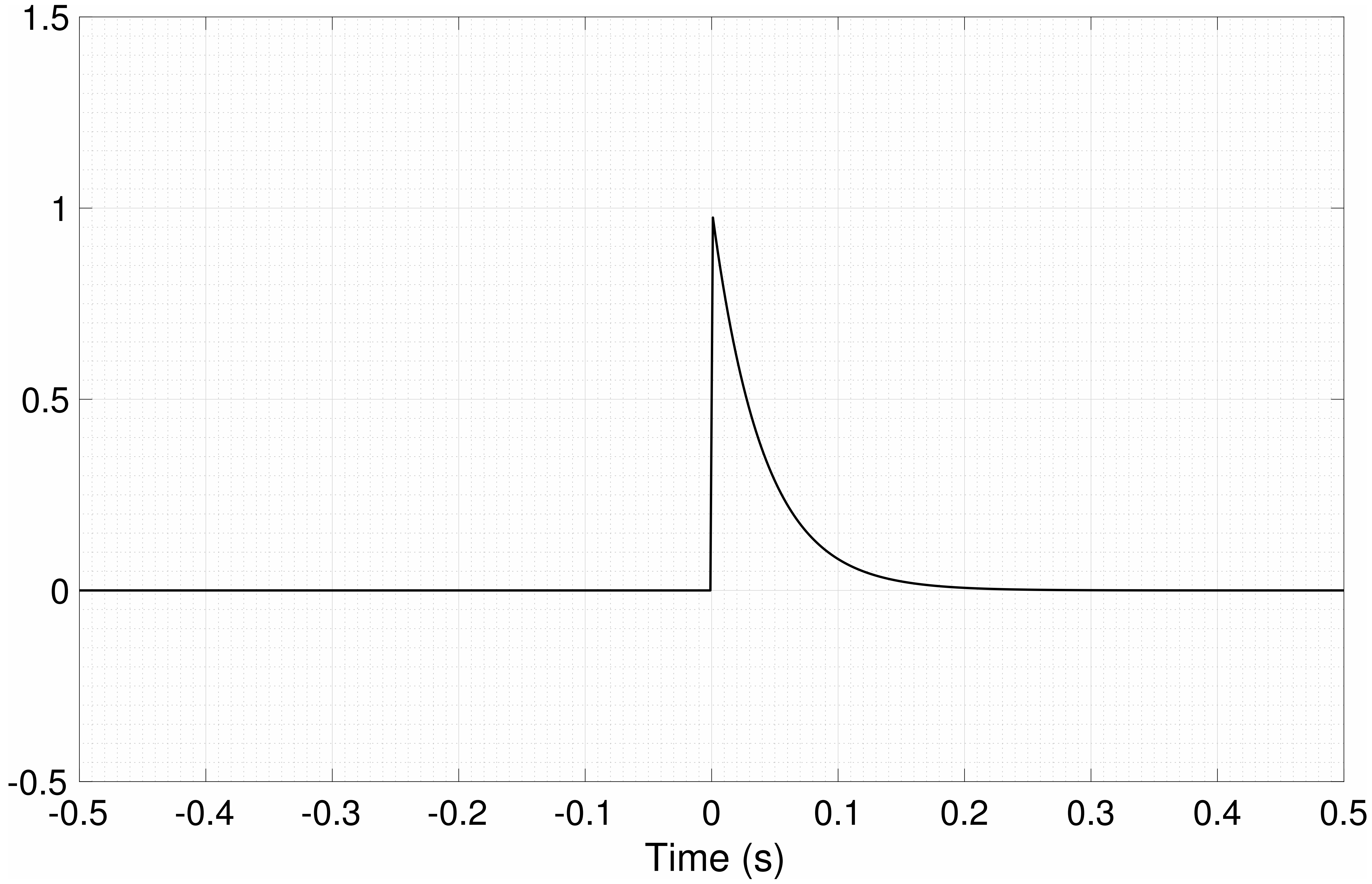
Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable

EXERCICE 1

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

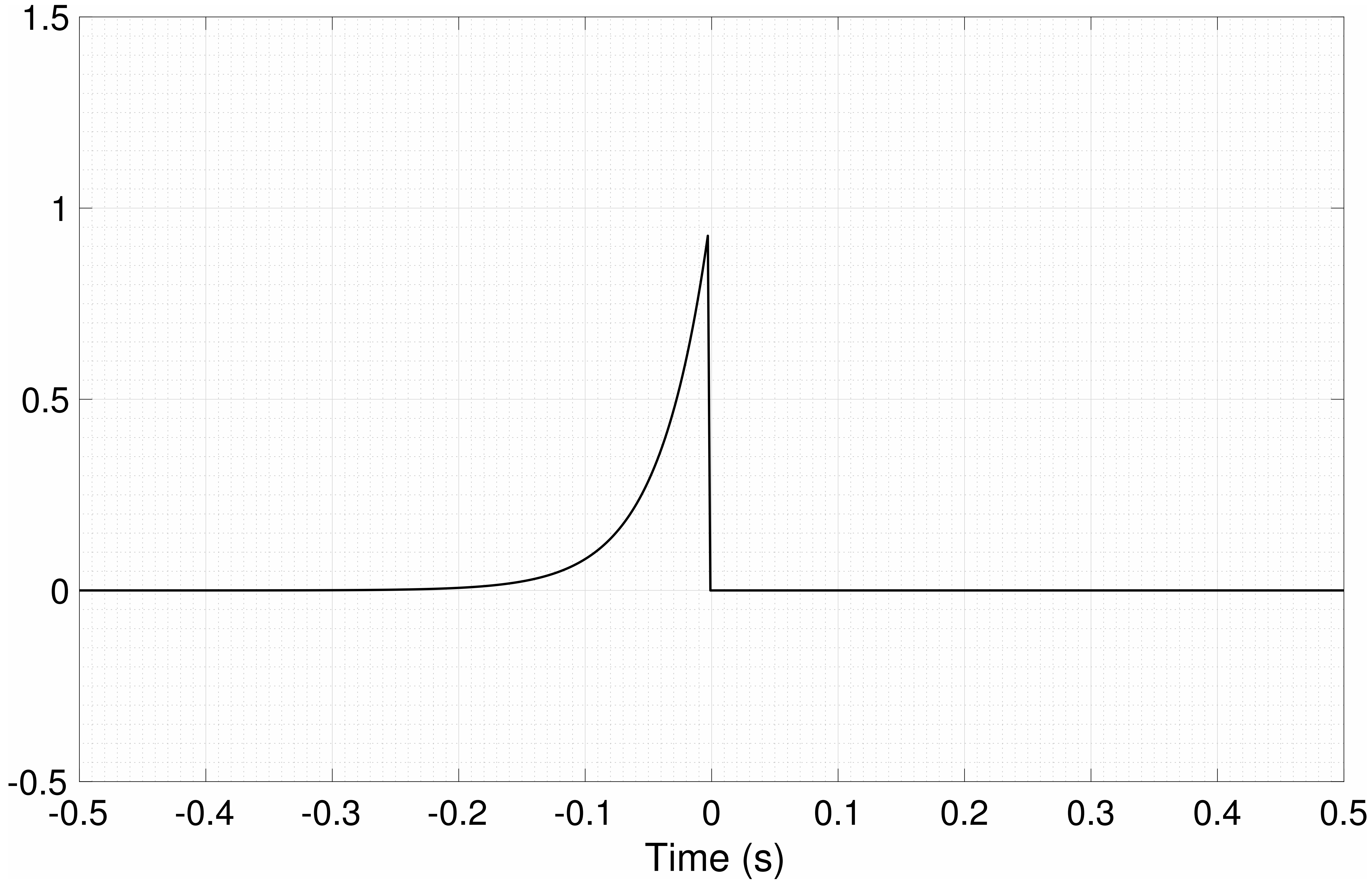
- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



EXERCICE 2

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

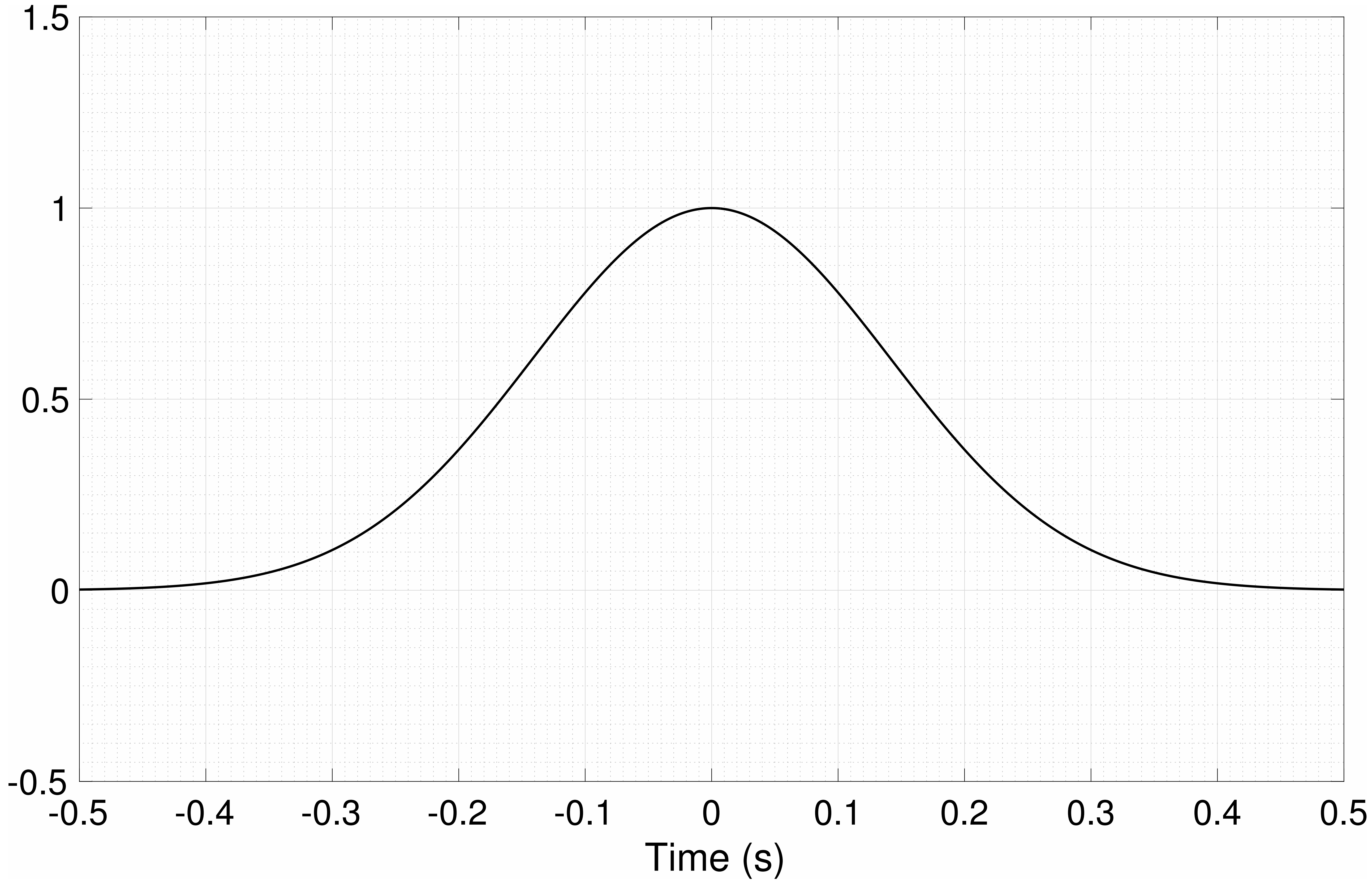
- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



EXERCICE 3

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

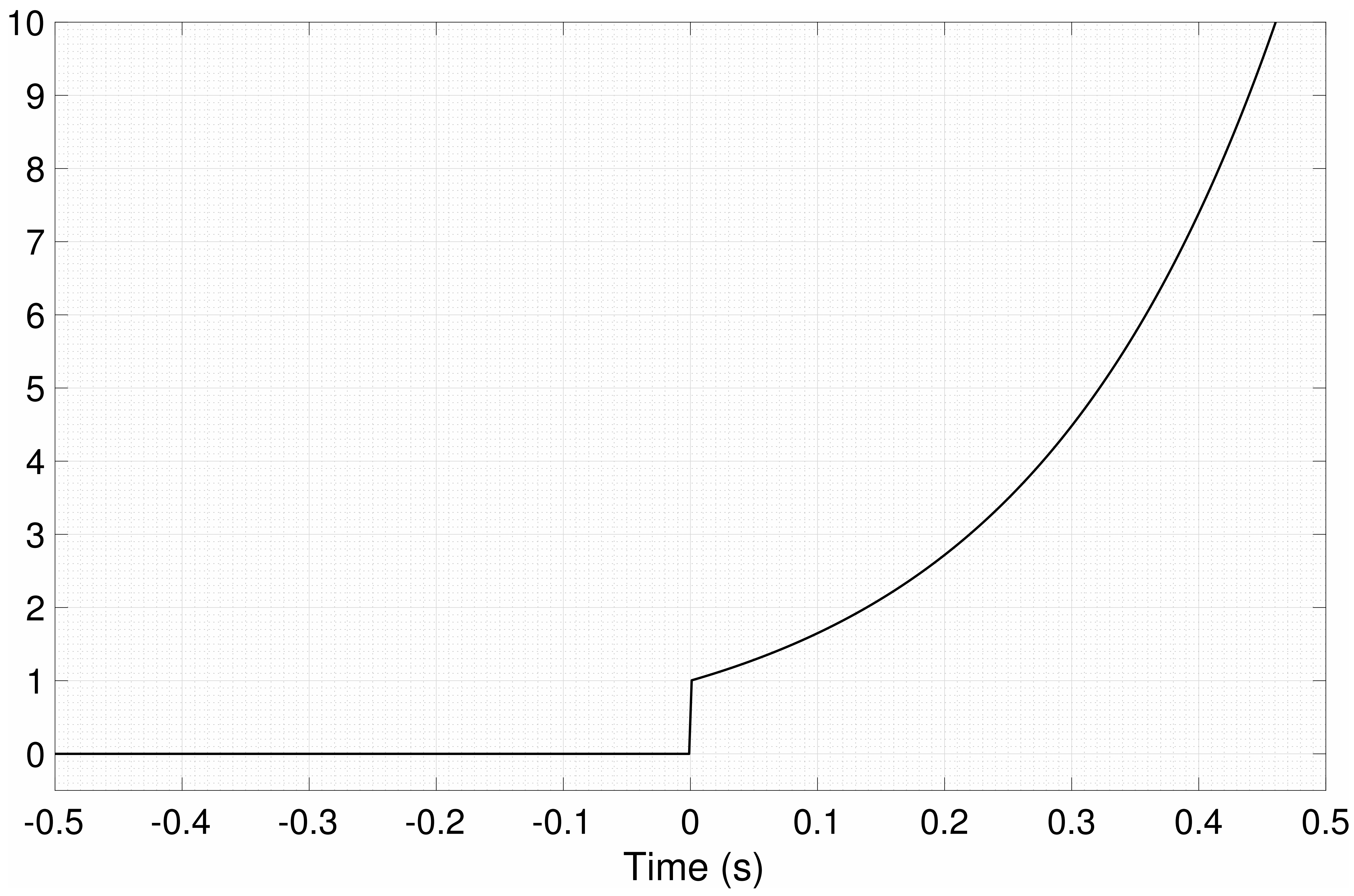
- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



EXERCICE 4

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

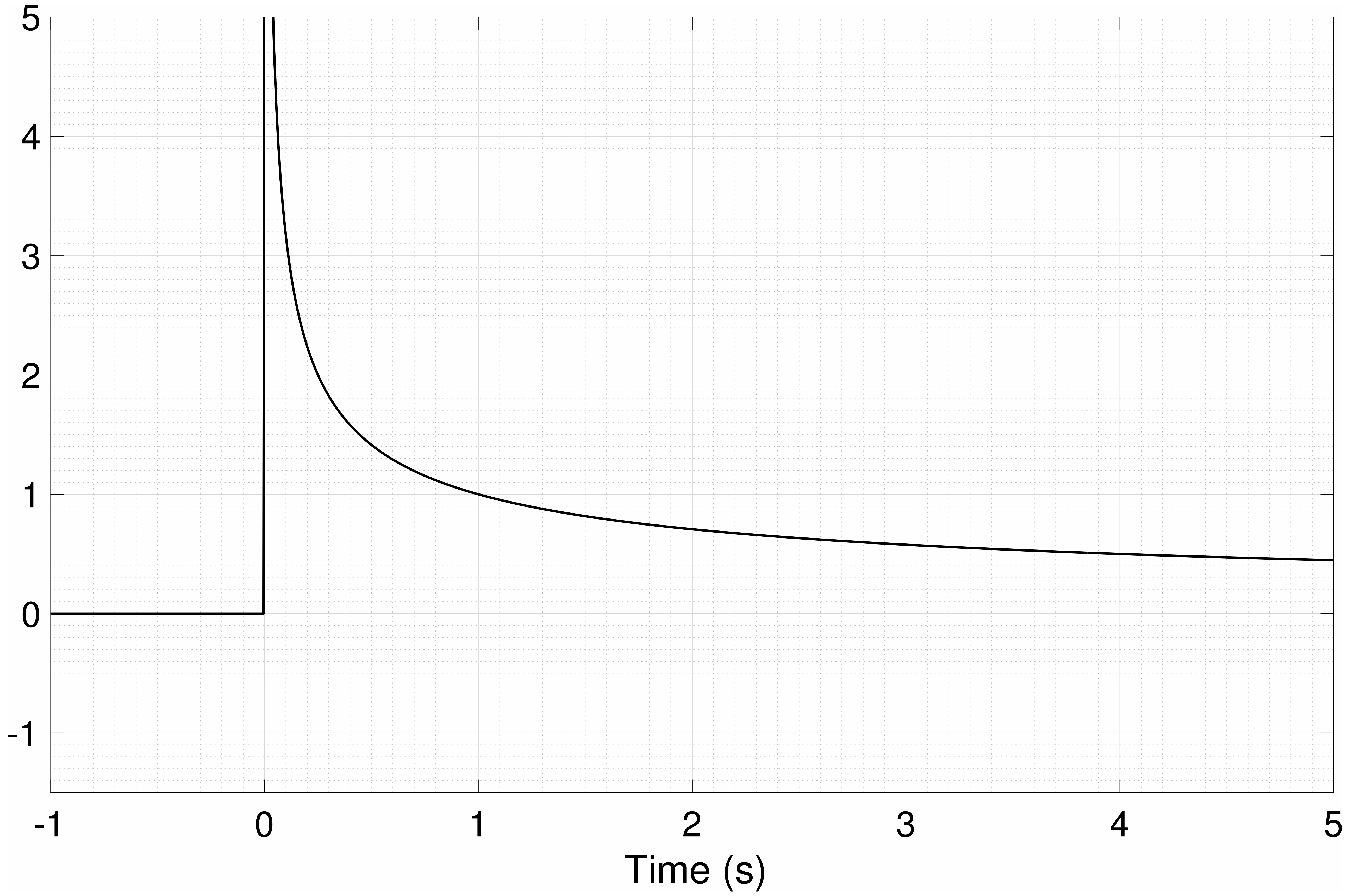
- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



EXERCICE 5

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

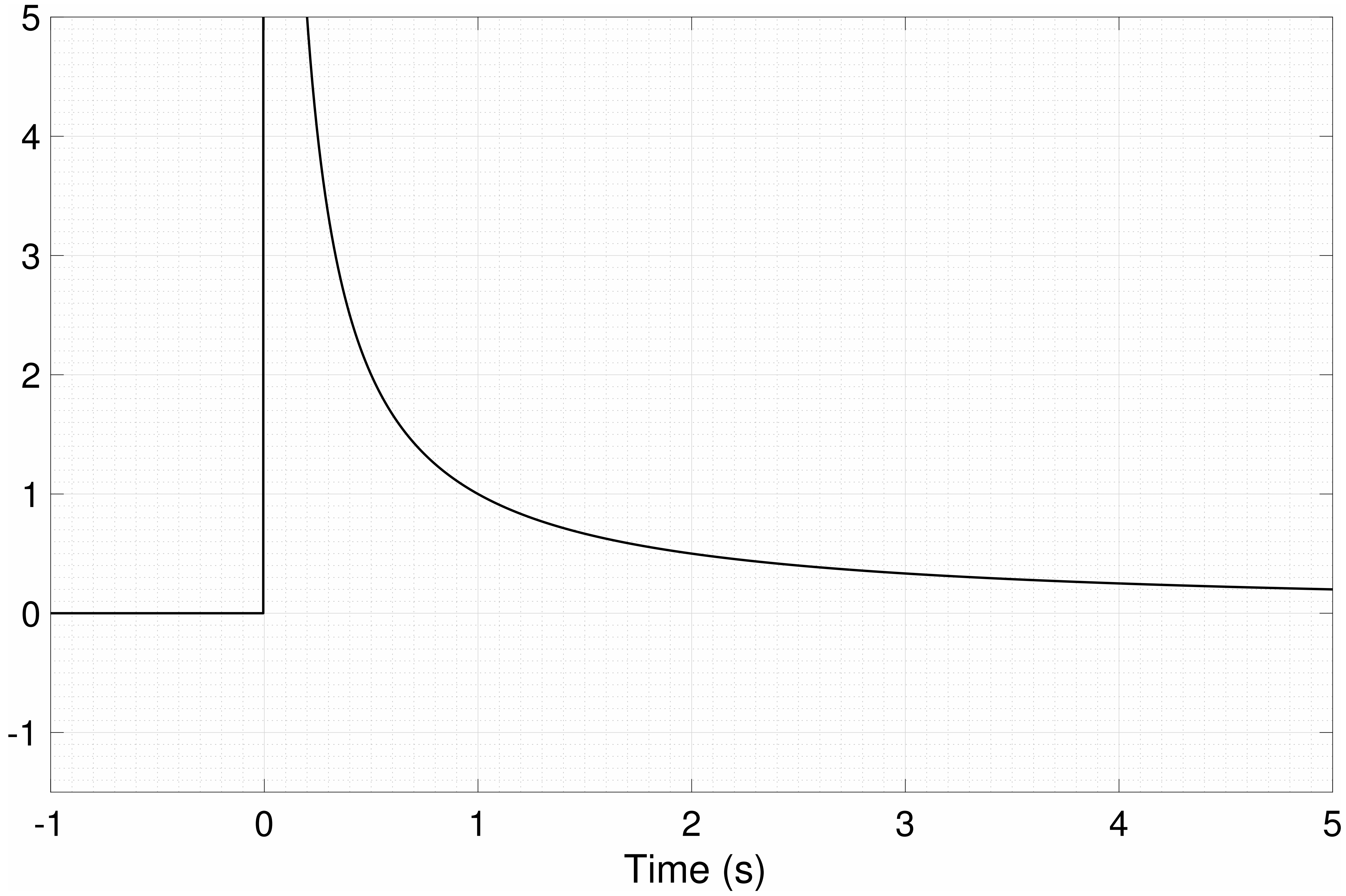
- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



EXERCICE 6

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

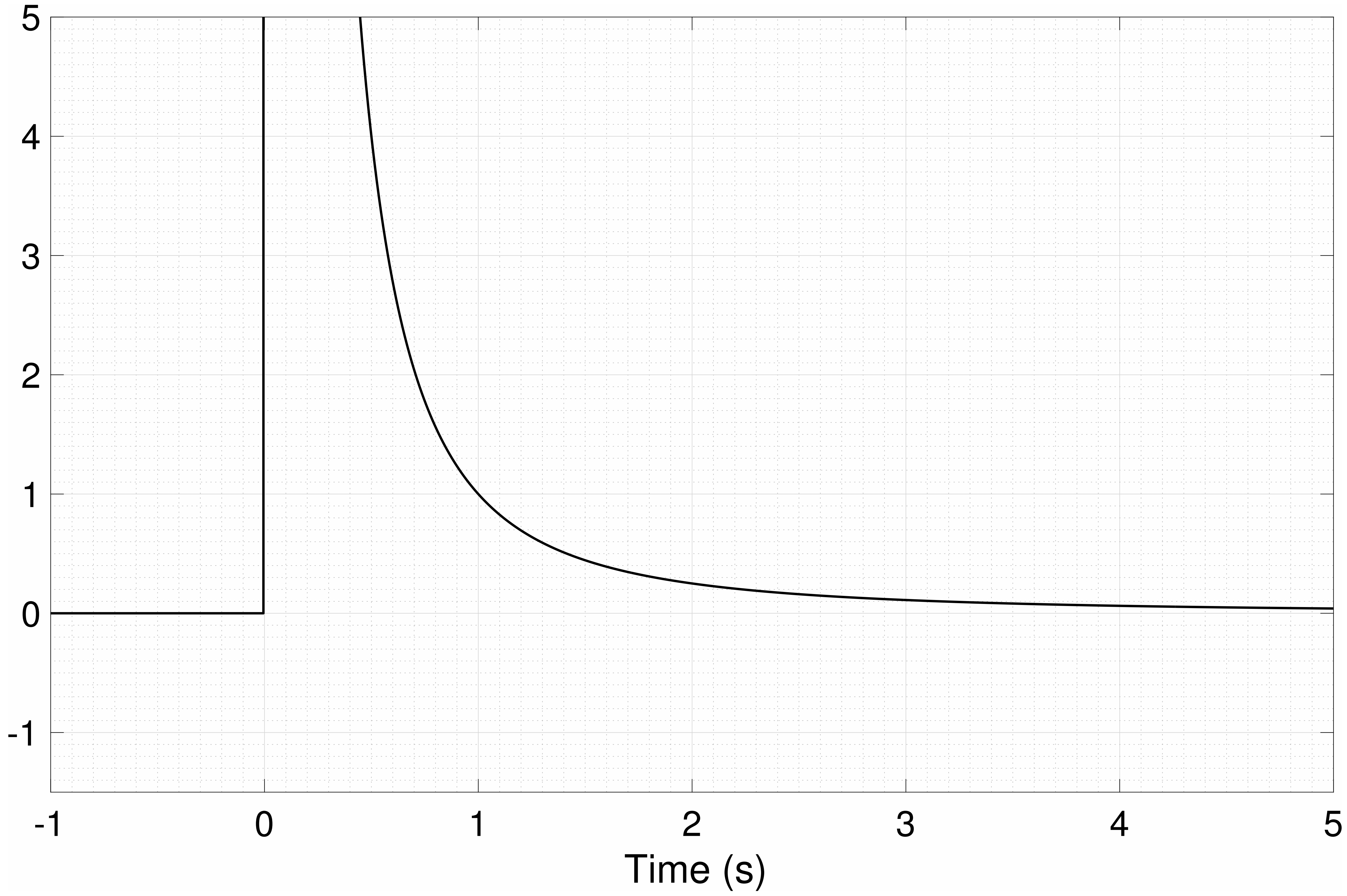
- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



EXERCICE 7

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

- Stable
- Causal
- D'énergie finie
- Réalisable



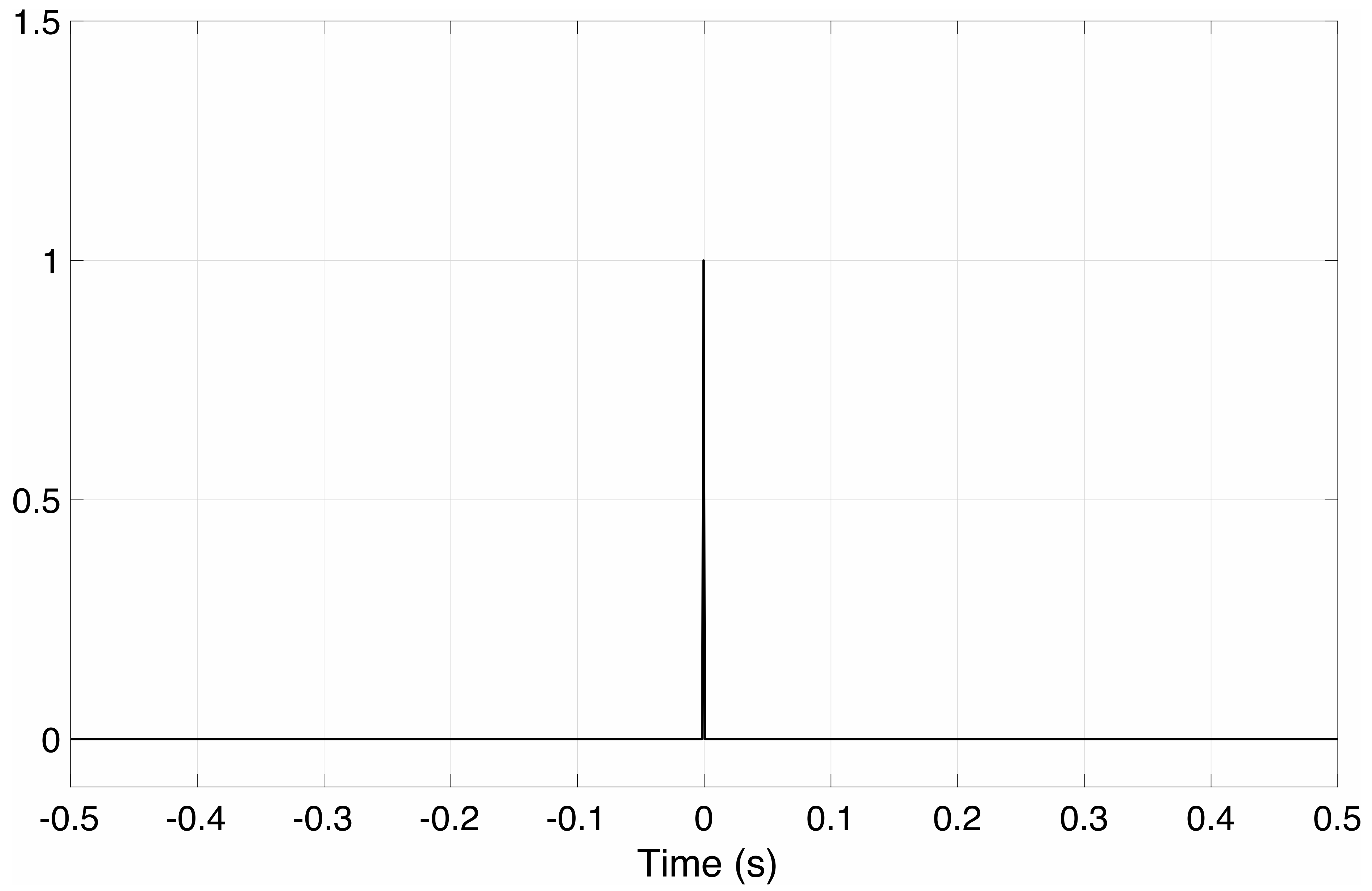
SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: DIRAC NUMÉRIQUE

L'impulsion de Dirac, notée $\delta_k[t]$, est la suite définie par:

$$\delta_k[t] = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est :

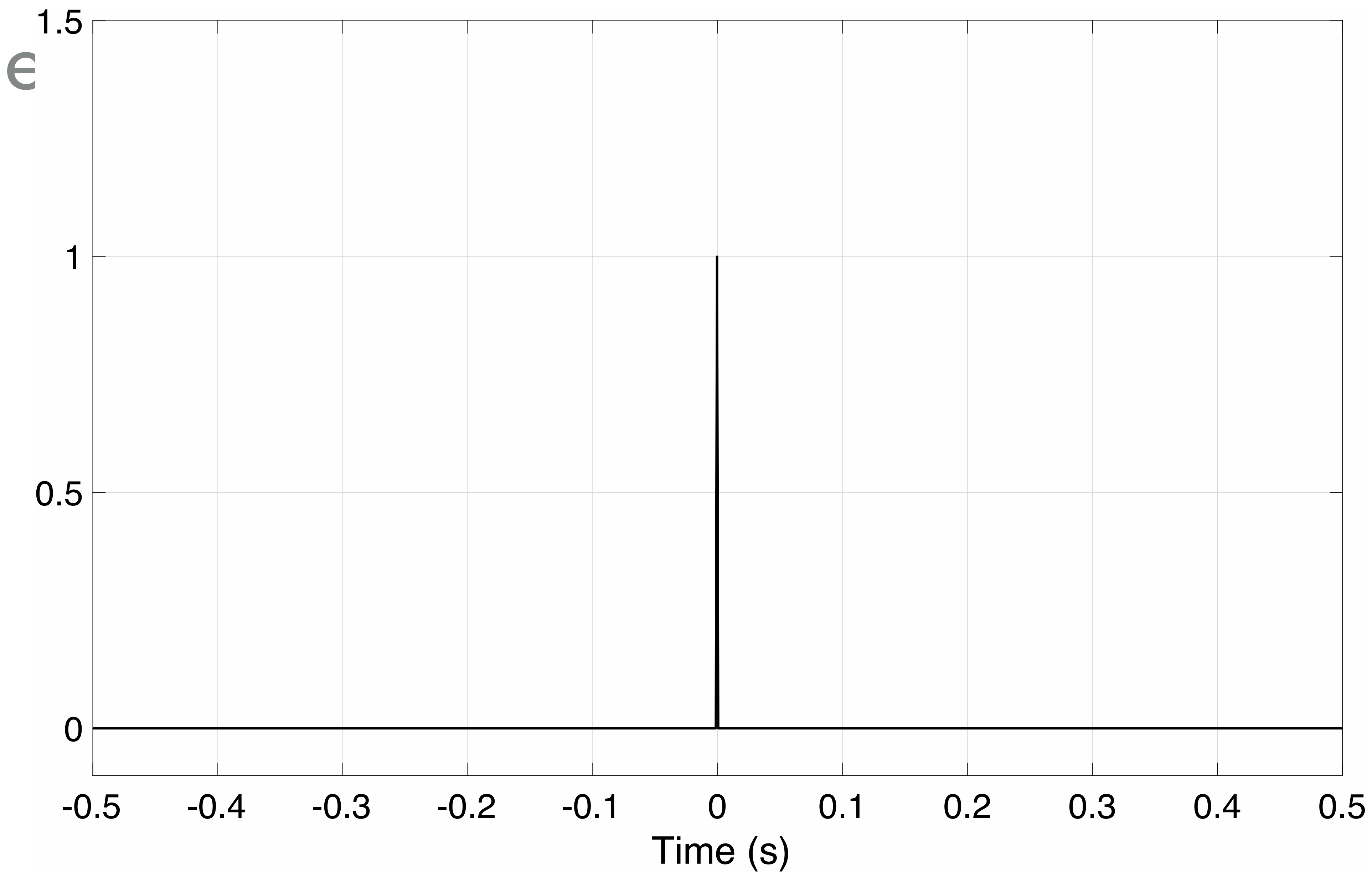
- Réalisable
- D'énergie finie



SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: DIRAC ANALOGIQUE

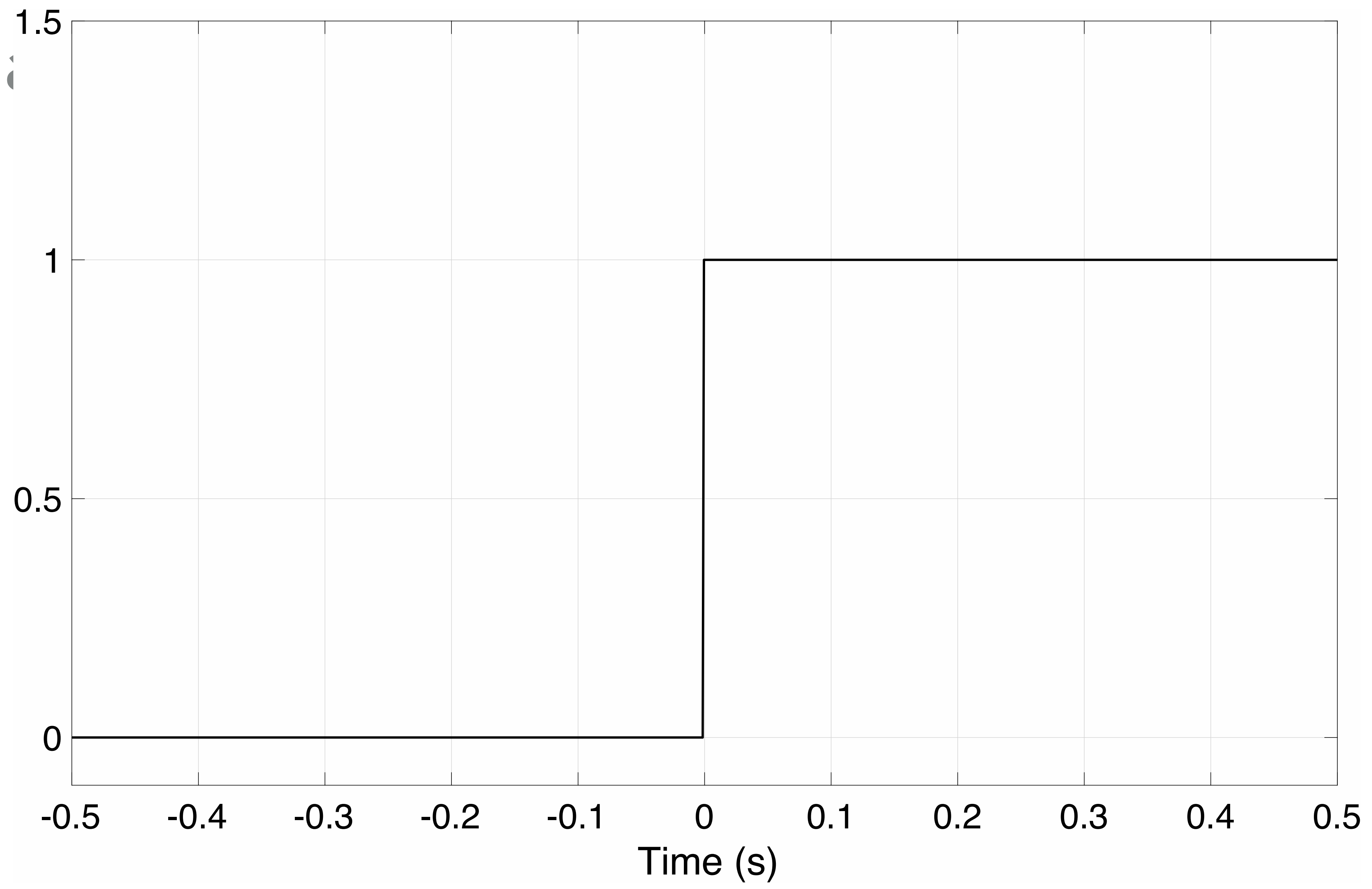
L'impulsion de Dirac, notée $\delta_x(t)$, est la *distribution* telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_x(t)\,\mathrm{d}\,t = f(x)$$



SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: HEAVISIDE NUMÉRIQUE

Le signal de Heaviside, ou échelon, notée $\Theta[t]$ est définie pa



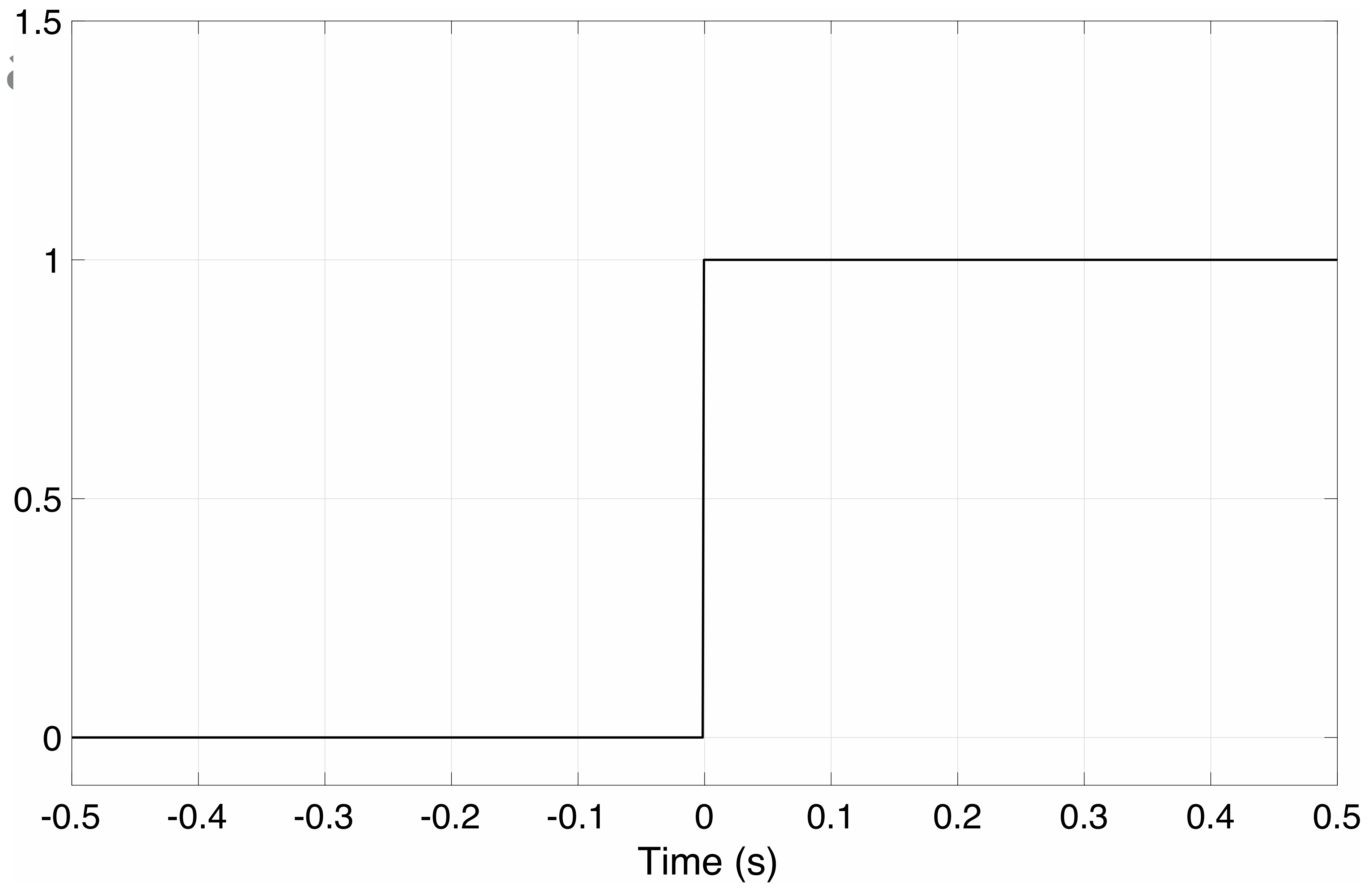
$$\Theta[t] = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- Causal
- Pas réalisable car non stable
- D'énergie infinie

SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: HEAVISIDE ANALOGIQUE

Le signal de Heaviside, ou échelon, notée $\Theta(t)$ est définie pa



$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- Causal
- Pas réalisable car non stable
- D'énergie infinie

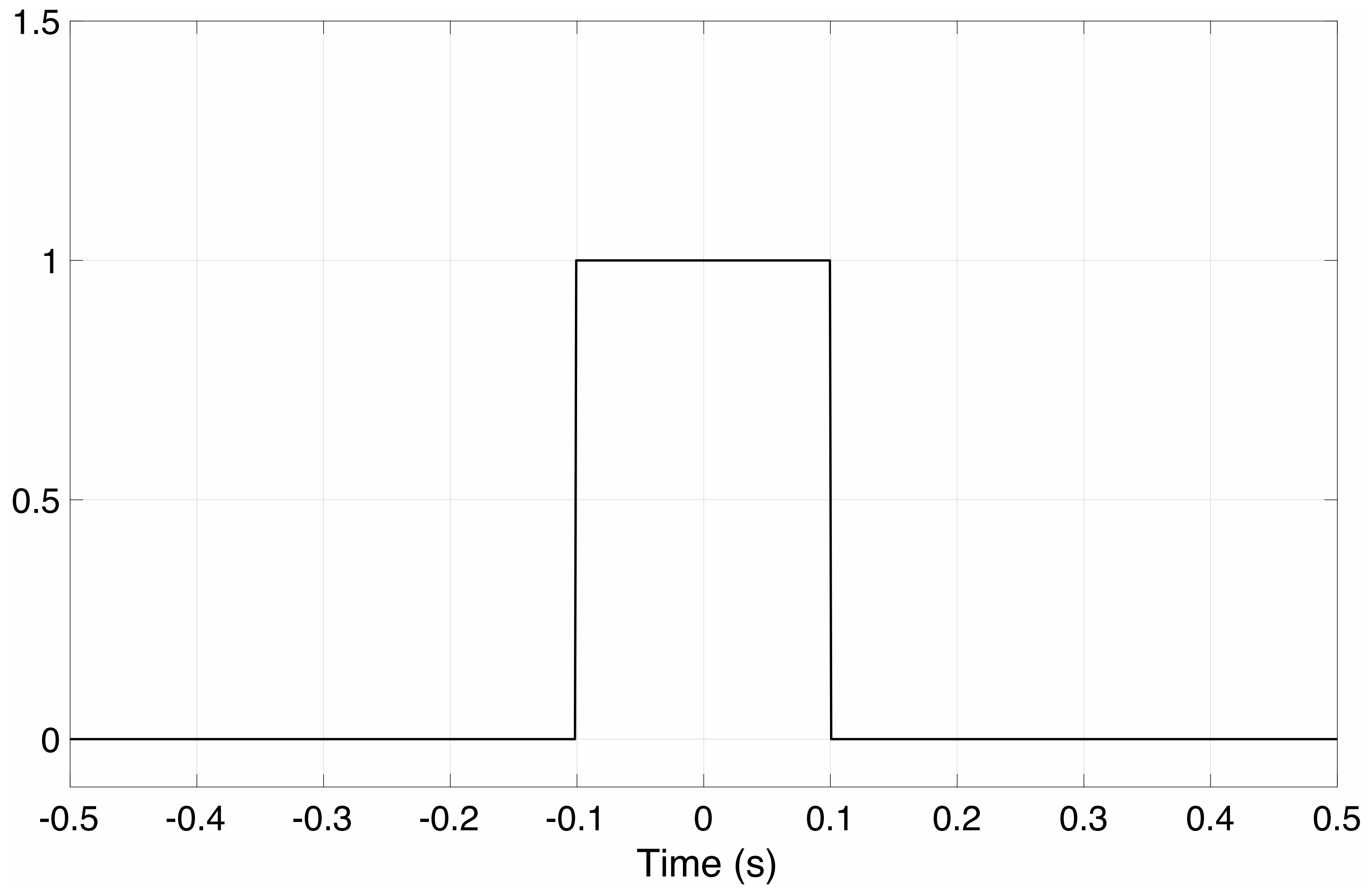
SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: PORTE NUMÉRIQUE

Le signal porte est la suite définie par

$$\Pi_N[t] = \begin{cases} 1 & \text{si } -N \leq t \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- Stable
- Non réalisable car acausal
- D'énergie finie



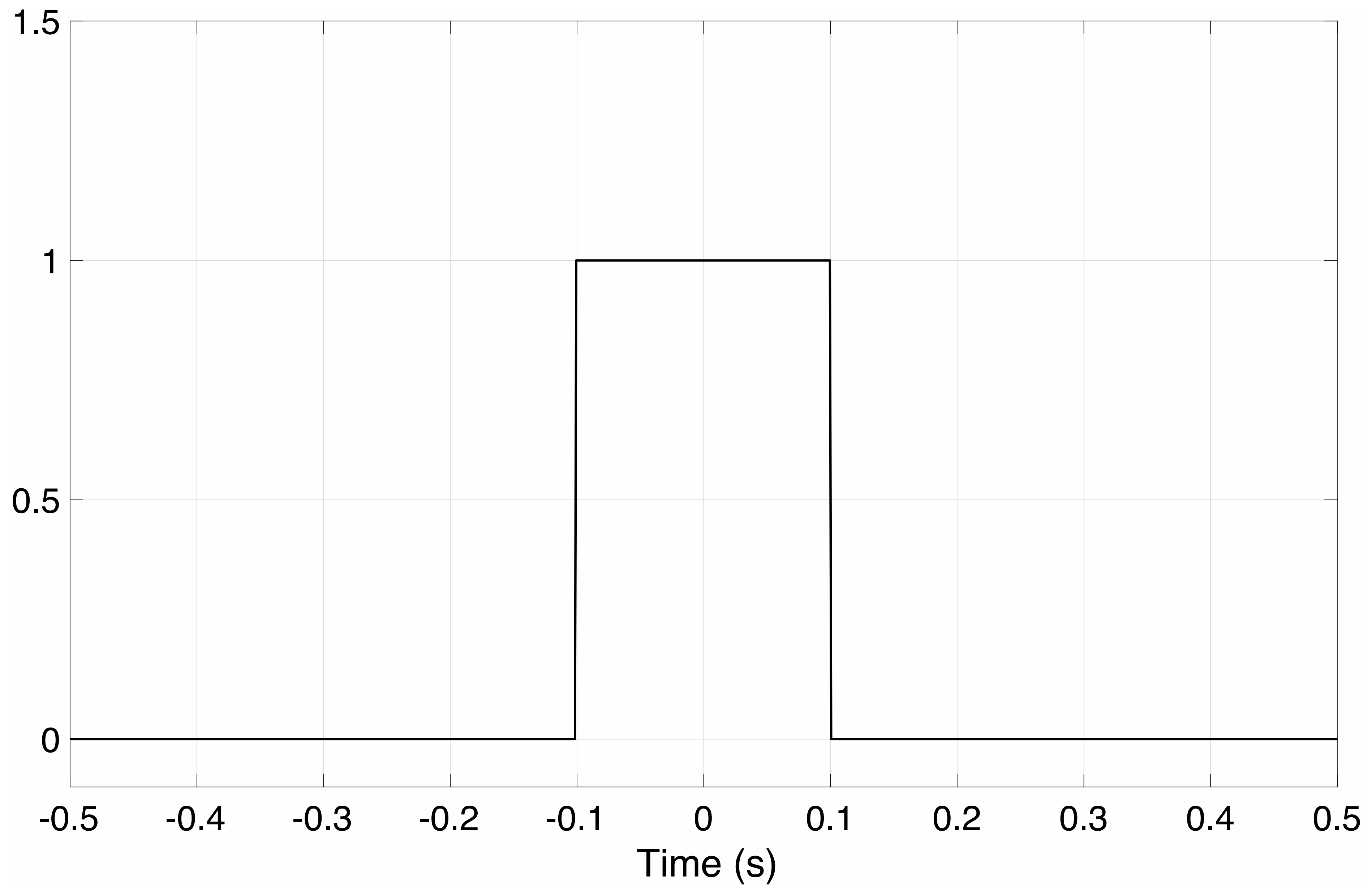
SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: PORTE ANALOGIQUE

Le signal porte est la fonction définie par

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -A \leq t \leq A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- Stable
- Non réalisable car acausal
- D'énergie finie



SIGNAUX « DIGITALS »

Sur machine, les signaux considérés sont des signaux numériques particuliers:

- Ils sont de taille finie: ils contiennent T échantillons
- Ils prennent des valeurs quantifiées (précision finie)
- Ils sont donc forcément stables et d'énergie finie
- La causalité dépend uniquement du choix de l'origine des temps

OPERATIONS SUR LES SIGNAUX

MODIFICATION D'UN SIGNAL

- Changement d'amplitude: $v(t) = a\,u(t)$
- Translation : $v(t) = u(t - k)$
- Dilatation d'un signal: $v(t) = u(c\,t)$ (attention, cette opération change la grille des temps pour les signaux numériques)
- Modulation: la modulation du signal $u(t)$ par $v(t)$ est définit par

$w(t) = v(t)u(t)$

PRODUIT DE CONVOLUTION ANALOGIQUE (FILTRAGE)

- Soit $u(t)$ et $v(t)$ deux signaux analogiques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$w(t) = (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)v(x)\,\mathrm{d}\,x$$

- Le produit de convolution est commutatif

$$w(t) = (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)v(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t-x)\mathrm{d}x = (v * u)(t)$$

- Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)(t) = (u * \delta)(t) = u(t)$$

PRODUIT DE CONVOLUTION NUMÉRIQUE (FILTRAGE)

- Soit $u[t]$ et $v[t]$ deux signaux numériques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$w[t] = (u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k]$$

- Le produit de convolution est commutatif

$$w[t] = (u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t-k] = (v * u)[t]$$

- Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)(t) = (u * \delta)(t) = u(t)$$

INTER-CORRÉLATION ENTRE DEUX SIGNAUX ANALOGIQUES

- Soit $u(t)$ et $v(t)$ deux signaux analogiques réels. Leur inter-corrélation s'écrit

$$C_{uv}(t) = (u \star v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t+x)\,\mathrm{d}\,x$$

- L'inter-corrélation **n'est pas** commutatif

$$C_{uv}(t) = (u \star v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t+x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)v(x)$$
$$= C_{vu}(-t)$$

- Lien avec la convolution: soit $w(t) = v(-t)$, alors

$$C_{uv}(t) = (u \star v)(t) = (u * w)(t)$$

- L'inter-corrélation mesure la resemblance entre deux signaux, pour un décalage donné.

INTER-CORRÉLATION ENTRE DEUX SIGNAUX NUMÉRIQUES

- Soit $u[t]$ et $v[t]$ deux signaux numériques réels. Leur inter-corrélation s'écrit

$$C_{uv}[t] = (u \star v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t+k]$$

- L'inter-corrélation **n'est pas** commutatif

$$\begin{aligned} C_{uv}[t] = (u \star v)[t] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t+k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-t]v[k] \\ &= C_{vu}[-t] \end{aligned}$$

- Lien avec la convolution: soit $w[t] = v[-t]$, alors

$$C_{uv}[t] = (u \star v)[t] = (u * w)[t]$$

- L'inter-corrélation mesure la resemblance entre deux signaux, pour un décalage donné.

AUTO-CORRÉLATION D'UN SIGNAL ANALOGIQUE

- Soit $u(t)$ un signal analogique réel. Son auto-corrélation s'écrit

$$C_{uu}(t) = (u \star u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)u(t+x)\,\mathrm{d}\,x$$

- L'auto-corrélation est symétrique:

$$C_{uu}(t) = C_{uu}(-t)$$

- Lien avec la convolution: soit $w(t) = u(-t)$, alors

$$C_{uu}(t) = (u \star u)(t) = (u * w)(t)$$

- L'auto-corrélation mesure la ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps

AUTO-CORRÉLATION D'UN SIGNAL NUMÉRIQUE

- Soit $u[t]$ un signal numérique réels. Son auto-corrélation s'écrit

$$C_{uu}[t] = (u \star u)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[t+k]$$

- L'auto-corrélation est symétrique:

$$C_{uu}[t] = C_{uu}[-t]$$

- Lien avec la convolution: soit $w[t] = u[-t]$, alors

$$C_{uu}[t] = (u \star u)(t) = (u * w)(t)$$

- L'auto-corrélation mesure la ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps

CONCLUSION

- Différents modèles de signaux (analogique, numérique)
- Vocabulaire de base (causalité, stabilité etc.)
- Ressources: http://hebergement.universite-paris-saclay.fr/mkowalski/
- Questions: matthieu.kowalski@universite-paris-saclay.fr