COURS 2: SYNTHÈSE DE FILTRES FIR

TRAITEMENT DU SIGNAL

PRÉLIMINAIRES

SOUS MATLAB

- Lire le fichier audio
- Représenter ses échantillons sur une échelle adaptée
- Représenter son spectre sur une échelle adaptée
- Créer un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c choisie, dans le domaine fréquentiel.
- Représenter le spectre du filtre passe bas idéal.

FILTRE, FONCTION DE TRANSFERT ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici?
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.
- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale?

FILTRE, FONCTION DE TRANSFERT ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  - *la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.*

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-i2\pi k\nu}$$

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici?
  - *par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)*

FILTRE, FONCTION DE TRANSFERT ET RÉPONSE IMPULSIONNELLE

- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$
\begin{aligned}
h_{\nu_0}^{\mathrm{pb}}[n] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu}\right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale?
  - *Cette RI est à support infini, est stable (elle admet une TF), mais n'est pas causal (définie pour* $n < 0$*)*

FILTRES FIR

RAPPELS ET DÉFINITIONS

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle$h$. Alors le signal$y$, version filtrée du signal x par h, est donnée par l'***équation de filtrage*** ou ***équation aux différences***:

$$y[n] = (h \star x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

- Comment réaliser un tel filtre en "temps réel" ?

FILTRES FIR

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Le filtre est dit "***à réponse impulsionnelle finie***" (FIR) si h est finie:

$$h = \{h[-k_1], \ldots, h[0], \ldots, h[k_2]\}$$

- L'équation aux différences s'écrit alors:

$$y[n] = \sum_{k=-k_1}^{k_2} h[k]x[n-k]$$

- On appelle ***ordre*** du filtre, le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle.

FILTRES FIR

- Un filtre FIR est forcément **stable**
- Il n'est pas forcément **causal**
- Un filtre FIR est **réalisable *ssi il est causal***

APPLICATION: ANALYSE DU FILTRE IDÉAL

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel
- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR?
- Le filtre sera-t-il réalisable? Pourquoi?

APPLICATION: ANALYSE DU FILTRE IDÉAL

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR?
  - *La réponse impulsionnelle est à support infini: on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.*
- Le filtre sera-t-il réalisable? Pourquoi?
  - *Le filtre n'est pas réalisable car il n'est pas causal.*

SYNTHESE DE FILTRES FIR

FILTRE FIR VS FILTRE IDEAL

- **But:** Synthétiser un filtre RIF **causal**, qui s'approche le plus possible du filtre idéal recherché.
- RI du filtre RIF recherché VS RI du filtre idéal
  - Le filtre idéal a une RI h a support infini, non causal:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

  - Le filtre RIF que l'on cherche étant causal, sa réponse impulsionnelle h doit être causale:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{K} h[k]x[n-k]$$

MÉTHODE PAR TRONCATURE

- Soit un filtre idéal de fonction de transfert H et de réponse impulsionnelle h. Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre $N+1$ est:

1. Calcul de la RI idéal par TF inverse:

$$h^{\text{ideal}}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu$$

2. Troncature de la RI idéal

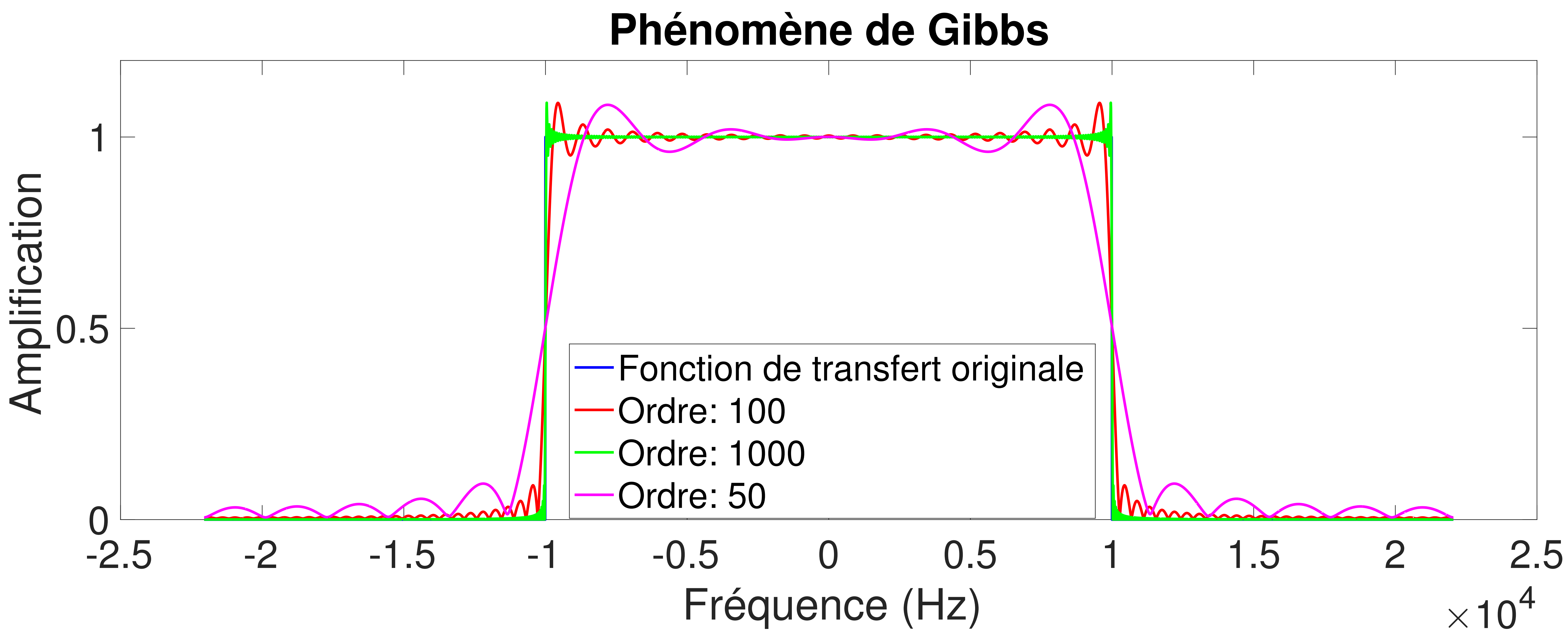
$$h^{\text{tronc}} = \left\{ h^{\text{ideal}}[-N/2], \ldots, h^{\text{ideal}}[N/2] \right\}$$

3. Application d'un retard sur h^{tronc}, afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h^{\text{RIF}}[n] = h^{\text{tronc}}[n - N/2]$$

PHÉNOMÈNE DE GIBBS

- Inconvénient de la méthode précédente: La troncature (i.e. multiplication d'une fenêtre rectangulaire), fait apparaître un phénomène de Gibbs.



UTILISATION D'UNE FENÊTRE

- Solution: on utilise une fenêtre "douce" pour éviter les troncatures franches, responsables du phénomène de Gibbs
- Exemples de fenêtre:
- Bartlett (ou triangulaire)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hann

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

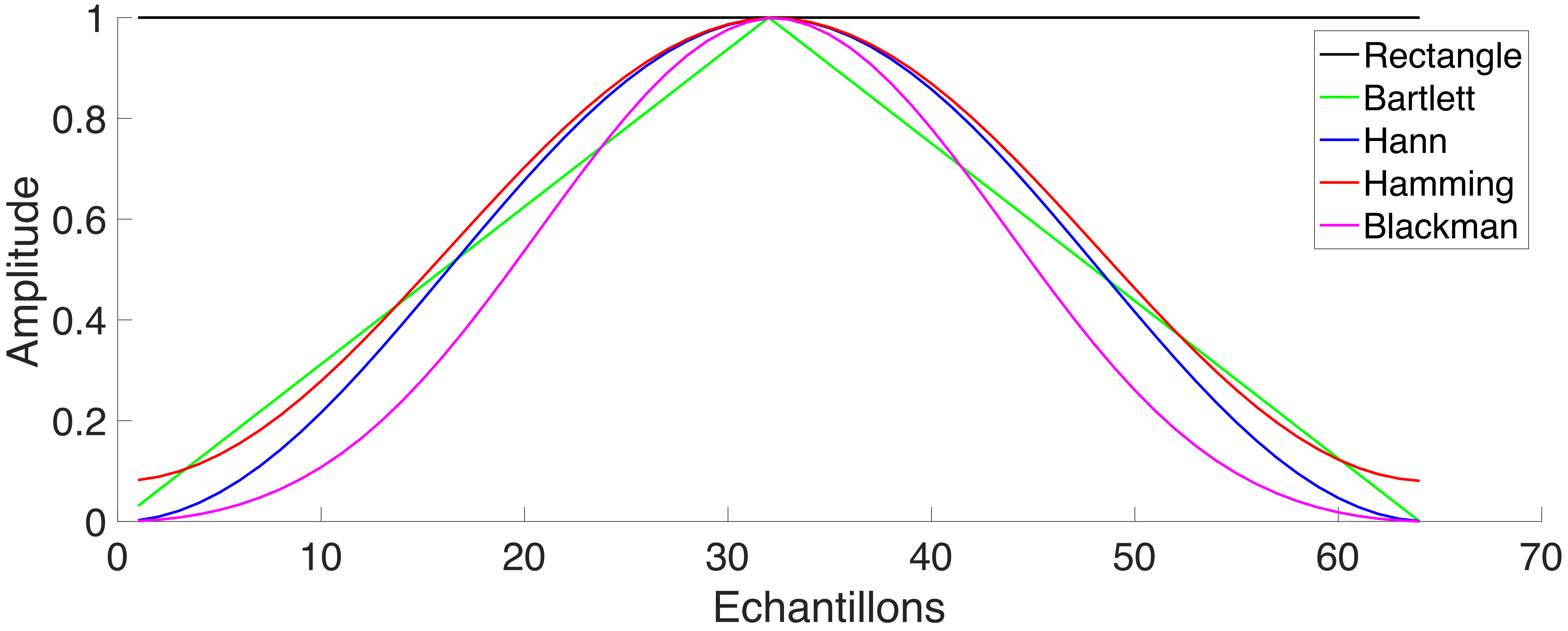
- Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

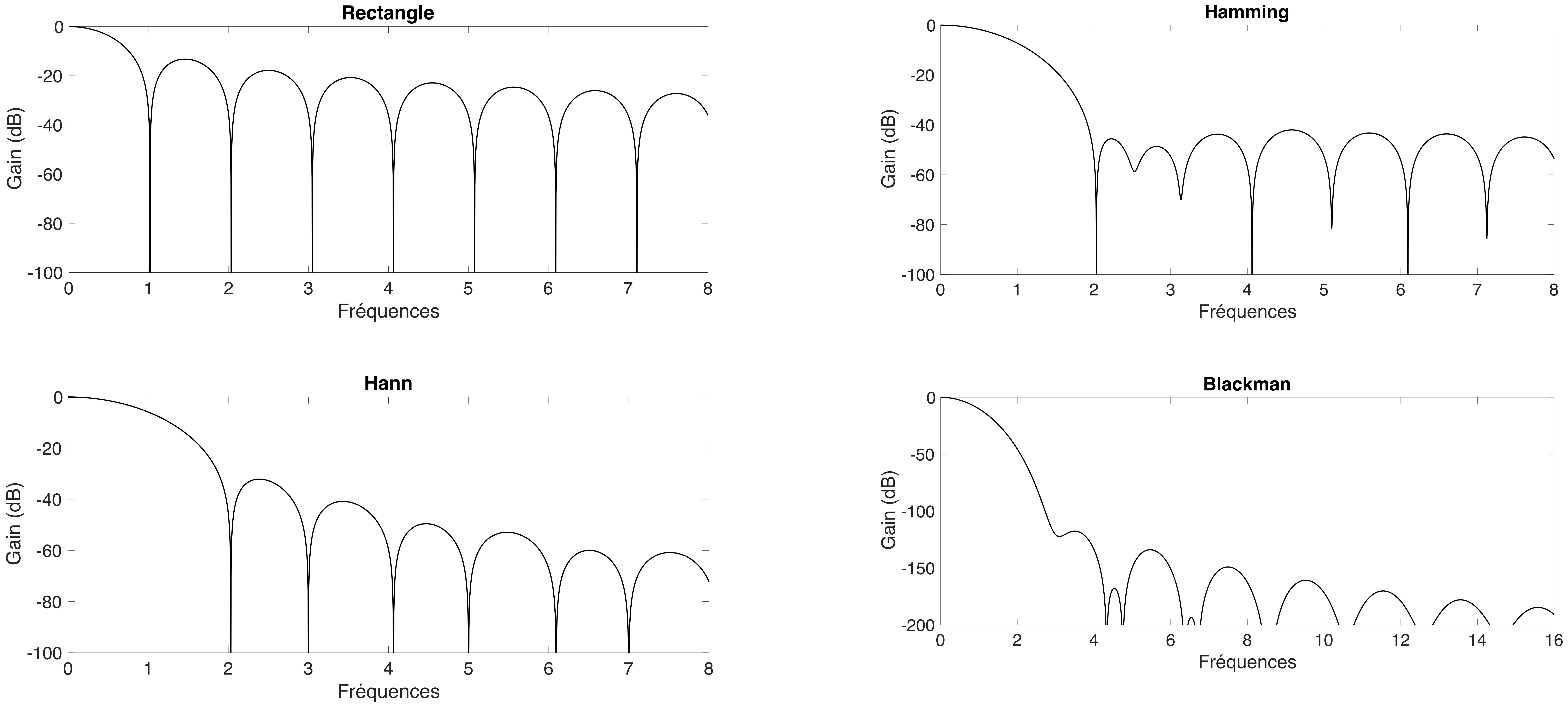
- Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXEMPLES DE FENÊTRES: DOMAINE TEMPOREL



EXEMPLES DE FENÊTRES: SPECTRE



CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES

- Largeur du lobe principal
- Rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire
- L'atténuation minimale en bande atténuée

Type de fenêtre	Largeur du lobe principal	Rapport d'amplitude	Atténuation minimale
Rectangulaire	$4\pi/N$	-13 dB	-21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	-25 dB	-25 dB
Hann	$8\pi/N$	-31 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/N$	-41 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/N$	-57 dB	-74 dB

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR PAR FENÊTRAGE

1. Calcul de la RI idéal par TF inverse:

$$h^{\mathrm{ideal}}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu$$

2. Fenêtrage de la RI idéal

$$h^{\mathrm{win}} = w \cdot \left\{ h^{\mathrm{ideal}}[-N/2], \ldots, h^{\mathrm{ideal}}[N/2] \right\}$$

3. Application d'un retard sur h^{win}, afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h^{\mathrm{RIF}}[n] = h^{\mathrm{win}}[n - N/2]$$

APPLICATION

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : FENÊTRAGE

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
- Ecrire l'équation aux différences. Combien fait-elle intervenir de termes?
- Quel problème reste-t-il à résoudre ?

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : FENÊTRAGE

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
  - *Si l'ordre vaut N, on conserve N échantillons*
- Ecrire l'équation aux différences. Combien fait-elle intervenir de termes?

$$y[n] = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h[k]^{\text{win}} x[n-k] \ \ \textit{avec}\ h^{\text{win}} = w \cdot h^{\text{ideal}}$$

  - *Il y a donc N termes dans cette équation.*
- Quel problème reste-t-il à résoudre ?
  - *Le filtre n'est toujours pas causal*

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : DÉCALLAGE

- Comment résoudre le problème de causalité ?
- Ecrire l'équation aux différences.

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : DÉCALLAGE

- Comment résoudre le problème de causalité ?
  - *En faisant un décalage de* $\frac{N}{2}$ *échantillons de* h^{win}
- Ecrire l'équation aux différences.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h^{\text{FIR}}[k]x[n-k] \text{ avec } h^{\text{FIR}}[k] = h^{\text{win}}\left[k - \frac{N}{2}\right]$$

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : DÉCALLAGE

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.
- Que se passe-t-il si l'on diminue ou augmente l'ordre du filtre ?
- Comparer avec d'autres fenêtres.

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : GAIN FRÉQUENTIEL

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.
  - *Les basses fréquences ($< f_c$) sont conservées, mais modulées (légère déformation)*
  - *Les hautes fréquences ($> f_c$) sont très atténuées, mais pas annulées, avec effet de "rebonds"*
  - *On reconnait clairement le phénomème de Gibbs.*
- Que se passe-t-il si l'on diminue ou augmente l'ordre du filtre ?
  - *Plus l'ordre est élevé, plus on s'approche de la fonction de transfert idéal.*
- Comparer avec d'autres fenêtres.

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : GAIN FRÉQUENTIEL

- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.
- Filtrer le signal ainsi obtenu. Comparer avec le filtre idéal
- Regarder l'influence de l'ordre et du choix de la fenêtre.

SYNTHÈSE D'UN FILTRE FIR PASSE-BAS : FILTRAGE

- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.
  - *Avec une simple convolution, on implémente le filtrage directement dans le domaine temporel avec l'équation aux différences*
- Filtrer le signal ainsi obtenu. Comparer avec le filtre idéal
- Regarder l'influence de l'ordre et du choix de la fenêtre.