COURS 3: SYSTÈMES A TEMPS DISCRET

TRAITEMENT DU SIGNAL

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

SIGNAUX ET SYSTÈMES

- Un signal est enregistré, et déformé, par un capteur
- Un signal est (presque) toujours lié à la notion de « système »
- Système: Bloc fonctionnel qui réagit à un signal d'excitation en entrée et produit un signal de réponse après avoir appliqué une fonction au signal d'entrée

- S est une « fonctionnelle » qui s'applique à un signal, et retourne un autre signal

SYSTÈMES LINÉAIRES

- Un système linéaire est une fonction linéaire par rapport aux entrées
- Soit un système S et deux signaux d'entrées x_1 et x_2, tel que $y_1 = S\{x_1\}$ et $y_2 = S\{x_2\}$. S est linéaire ssi

$$\begin{aligned} S\{ax_1 + x_2\} &= aS\{x_1\} + S\{x_2\} \\ &= ay_1 + y_2 \end{aligned}$$

- Soit S un système linéaire. Alors il existe une fonction h tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y[t] = S\{x\}[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k,t]x[k]$$

SYSTÈMES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- Un système invariant dans le temps est stable par translation temporelle
- Soit un système S invariant dans le temps tel que $y[t] = S\{x\}[t]$. Soit $u_k[t] = x[t-k]$. Alors

$$S\{u_k\}[t] = y[t-k]$$

- Soit S un système linéaire. Alors il existe une fonction h tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y[t] = S\{x\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[t-k]x[k]$$

FILTRES: SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- Un filtre est un systèmes linéaires invariant dans le temps
  - Soit S un filtre. Alors il existe une fonction h appelée ***réponse impulsionnelle*** telle que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$\begin{aligned} y[t] &= S\{x\}[t] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[t-k]x[k] \\ &= (h * x)[t] \end{aligned}$$

  - la réponse impulsionnelle h caractérise complètement le filtre
  - C'est une opération de **convolution**

RAPPEL: PRODUIT DE CONVOLUTION

- Soit u et v deux signaux numériques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$(u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k]$$

- Le produit de convolution est commutatif

$$(u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t-k] = (v * u)[t]$$

- Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)[t] = (u * \delta)[t] = u[t]$$

FILTRES

- Soit un filtre S de réponse impulsionnelle h. Alors

$$\begin{aligned} S\{\delta\}[t] &= (h * \delta)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[t-k]h[k] \\ &= h[t] \end{aligned}$$

- La réponse impulsionnelle est la réponse du filtre au signal impulsion de Dirac

FILTRES

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. On dit que le filtre est

- Causal ssi h est causal
- Stable ssi h est stable
- Réalisable ssi h est réalisable

FILTRE CAUSAL

Soit un filtre causal de réponse impulsionnelle h. Alors l'équation de filtrage (appelée aussi équation aux différences) s'écrit

$$\begin{aligned} y[t] = (h * x)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[t-k] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[t-k] \\ &= h[0]x[t] + h[1]x[t-1] + \ldots + h[n]x[t-n] + \ldots \end{aligned}$$

- On voit que la réponse au temps t ne dépend que du signal d'entrée aux **temps précédents. Il n'y a pas besoin de connaitre le futur de x pour calculer y.**
- Il y a bien un rapport de **causalité** entre l'entrée x et la sortie y

FILTRE STABLE

Soit un filtre stable de réponse impulsionnelle h.

- Soit un signal d'entrée x stable. Alors le signal de sortie y est stable

$$
\begin{aligned}
\|y\|_1 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |y[t]| &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[t-k] \right| \\
&\leq \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[t-k]| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |x[t-k]| \\
&\leq \|h\|_1 \|x\|_1 \\
&< +\infty
\end{aligned}
$$

- De même, si l'entrée x est bornée (i.e. $|x[t]| < B \forall t$), alors la sortie y est bornée

RÉPONSE EN FRÉQUENCE

- Soit un filtre **stable** de réponse impulsionnelle $h[t]$. La réponse en fréquence du filtre est la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ de la réponse impusionnelle.

- Soit

  $y[t] = (h * x)[t]$

  Alors

  $\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{x}(\nu)$

  - Filtrer un signal revient à modifier son spectre. Exemple: un equalizer

FILTRES IDÉAUX

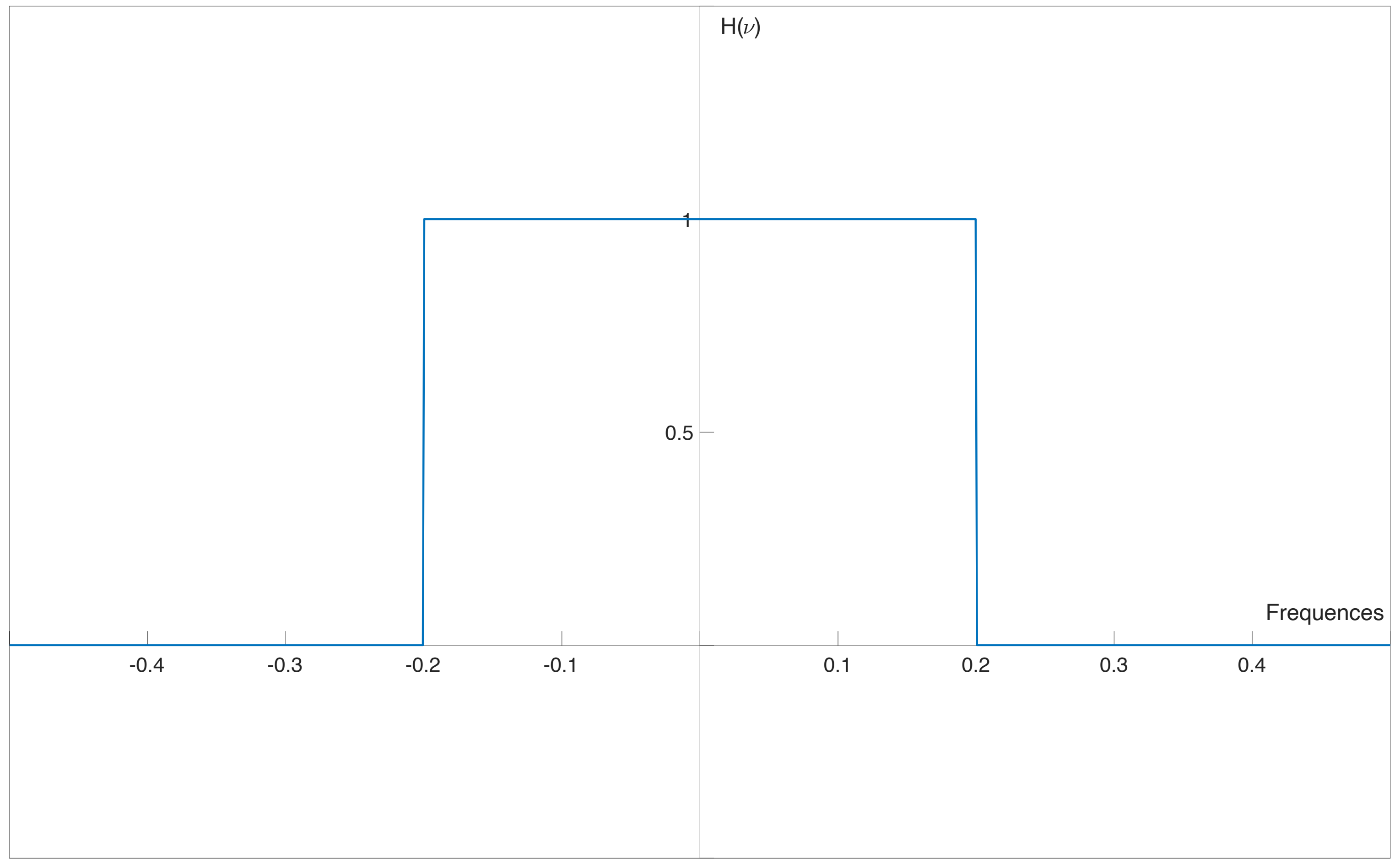
PASSE-BAS IDÉAL

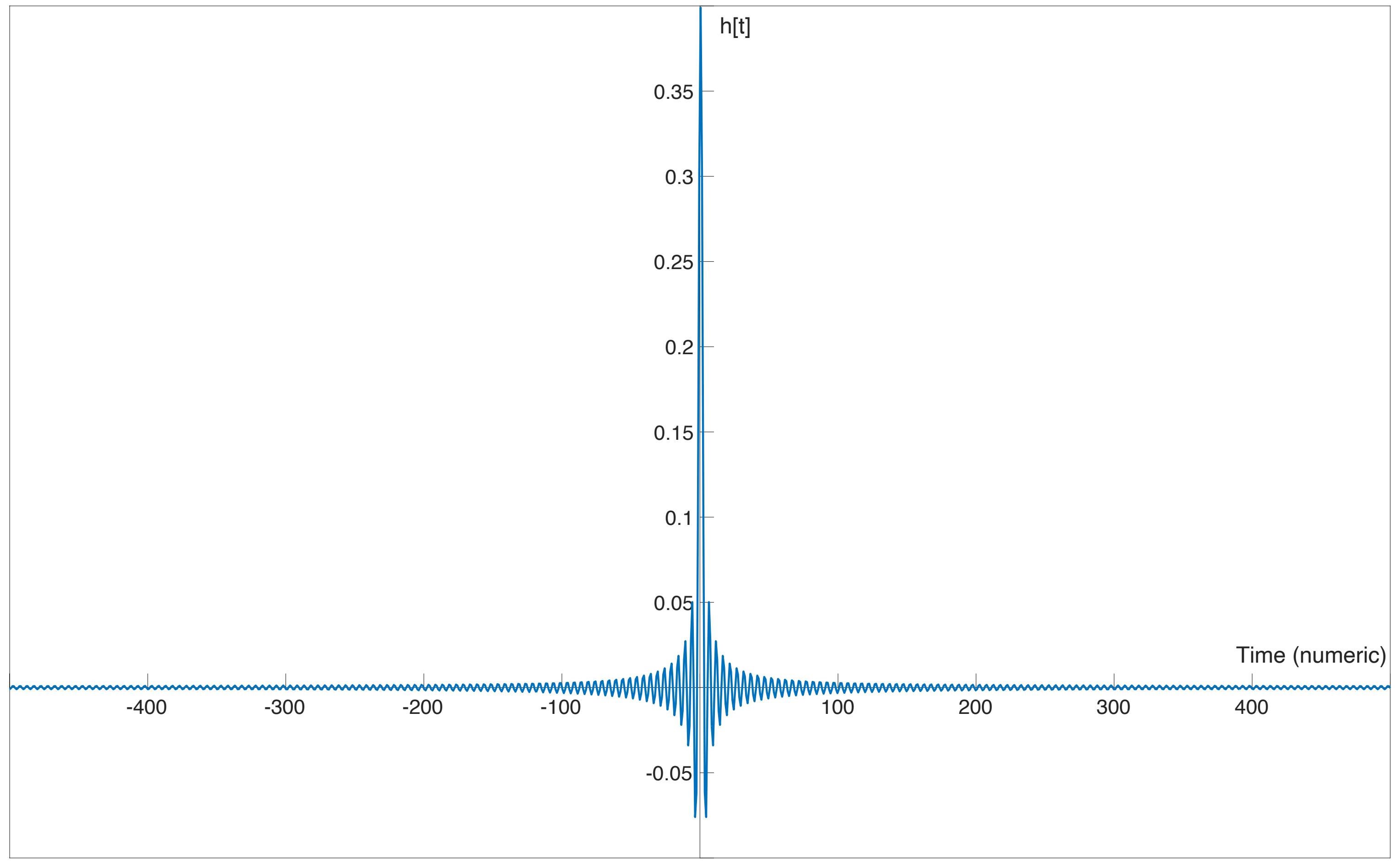
- Le filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ν_0 es

$$\hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{PB}_{\nu_0}[t] = 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$

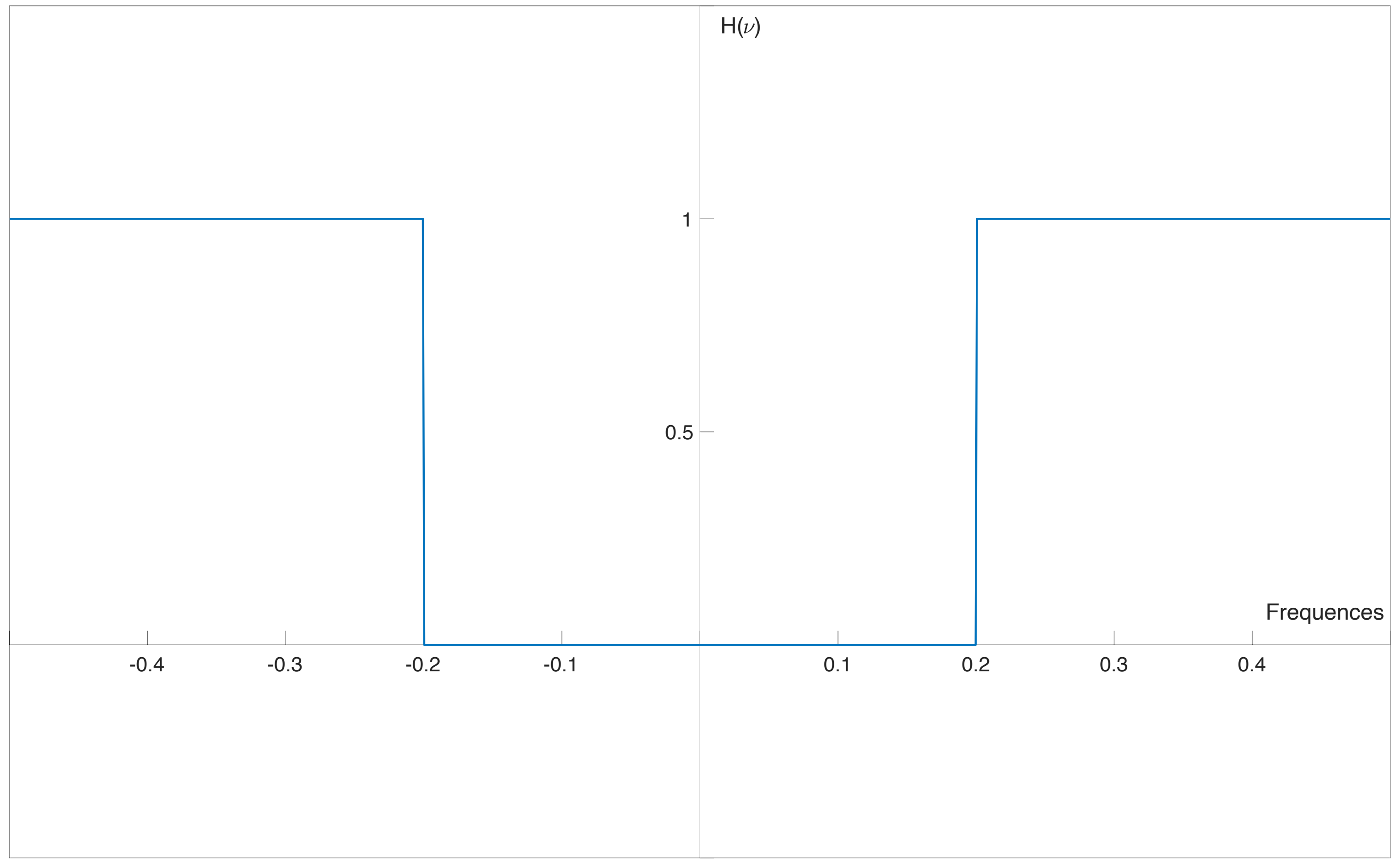




PASSE-HAUT IDÉAL

- Le filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure ν_0 e

$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

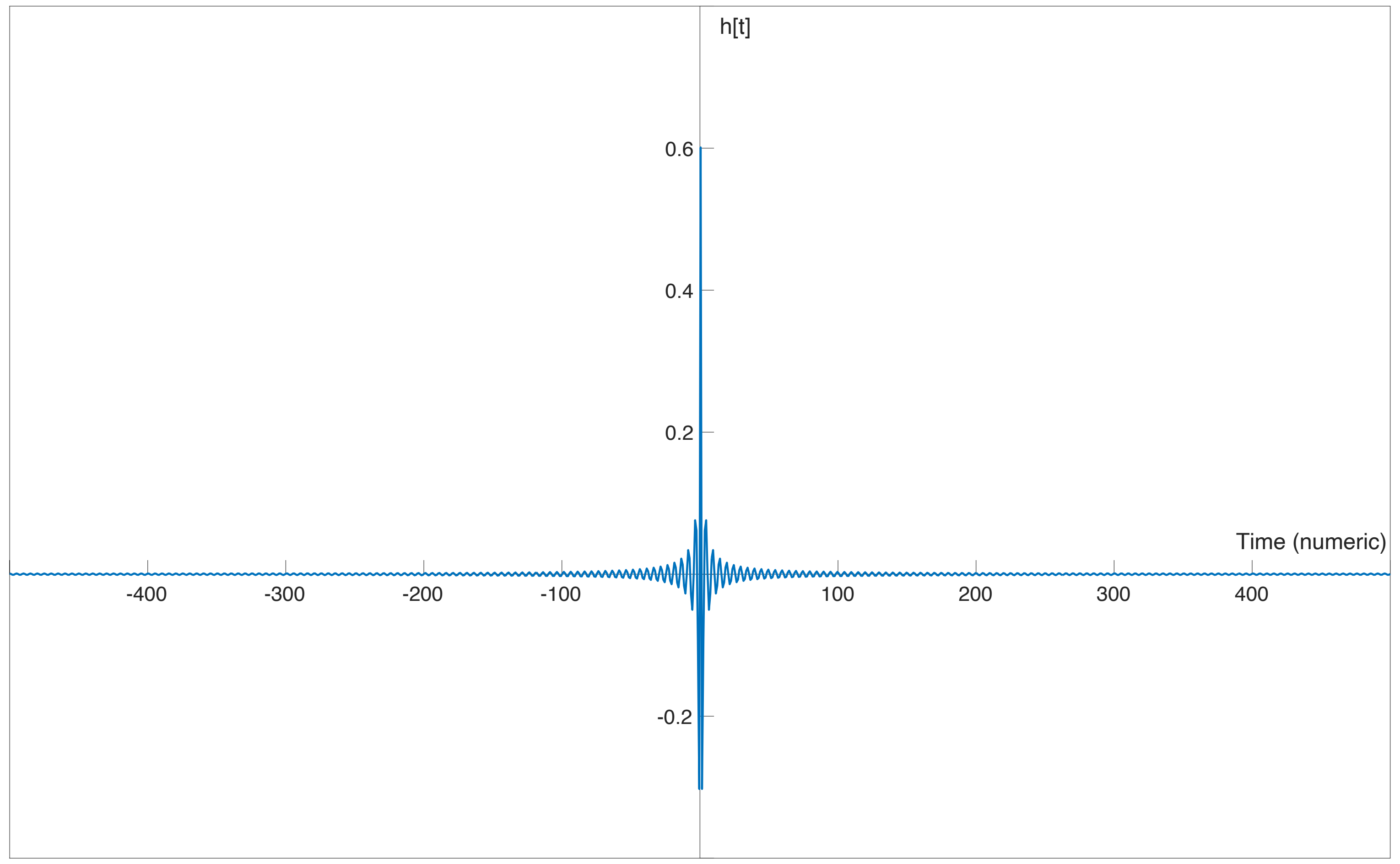


- Il s'exprime à l'aide d'un passe-bas

$$\hat{h}^{PH}_{\nu_0}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

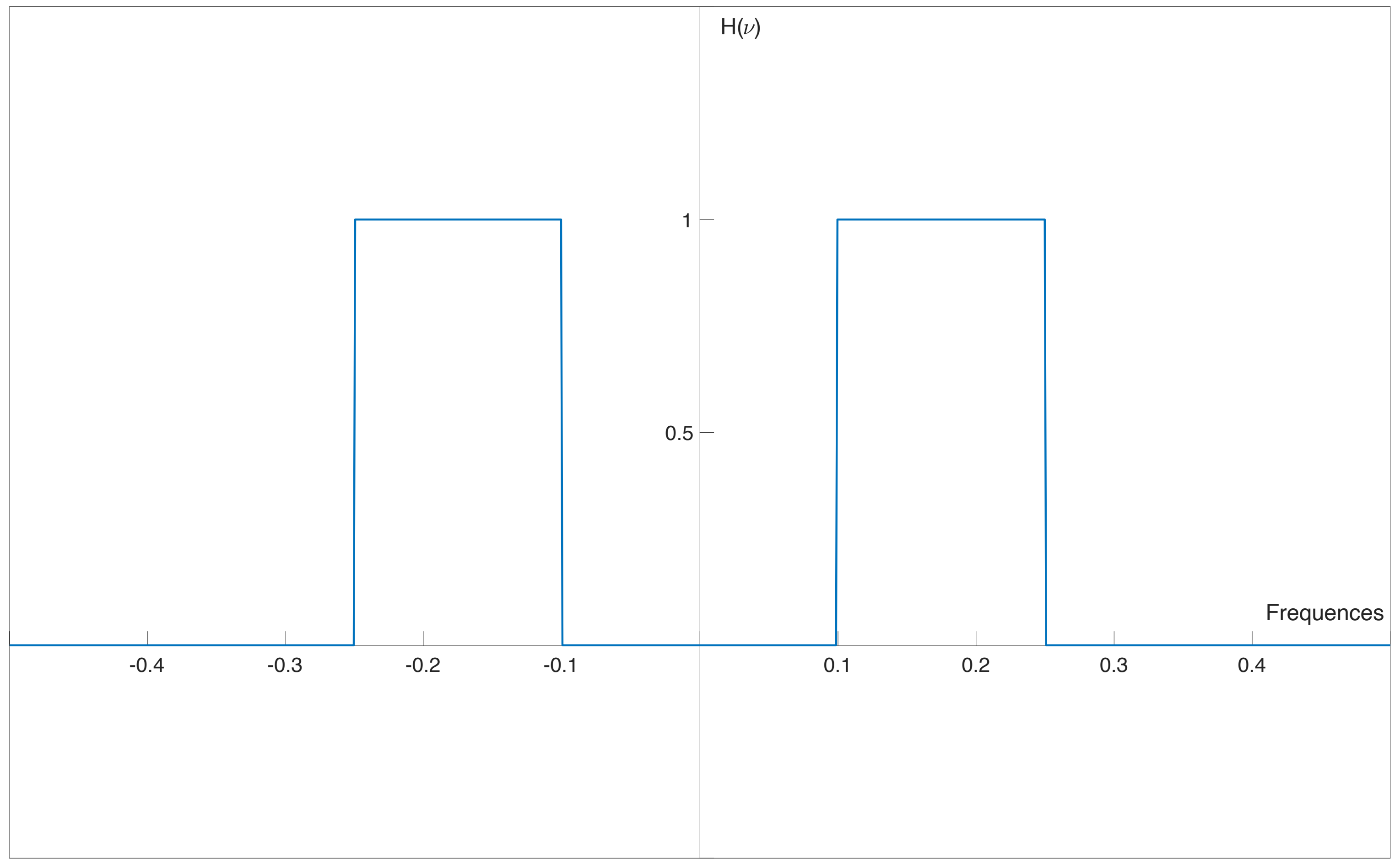
$$h^{PH}_{\nu_0}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_0 \mathrm{sinc}(2\nu_0 t)$$



PASSE-BANDE IDÉAL

- Le filtre passe-bande idéal de fréquences de coupure
fréquence

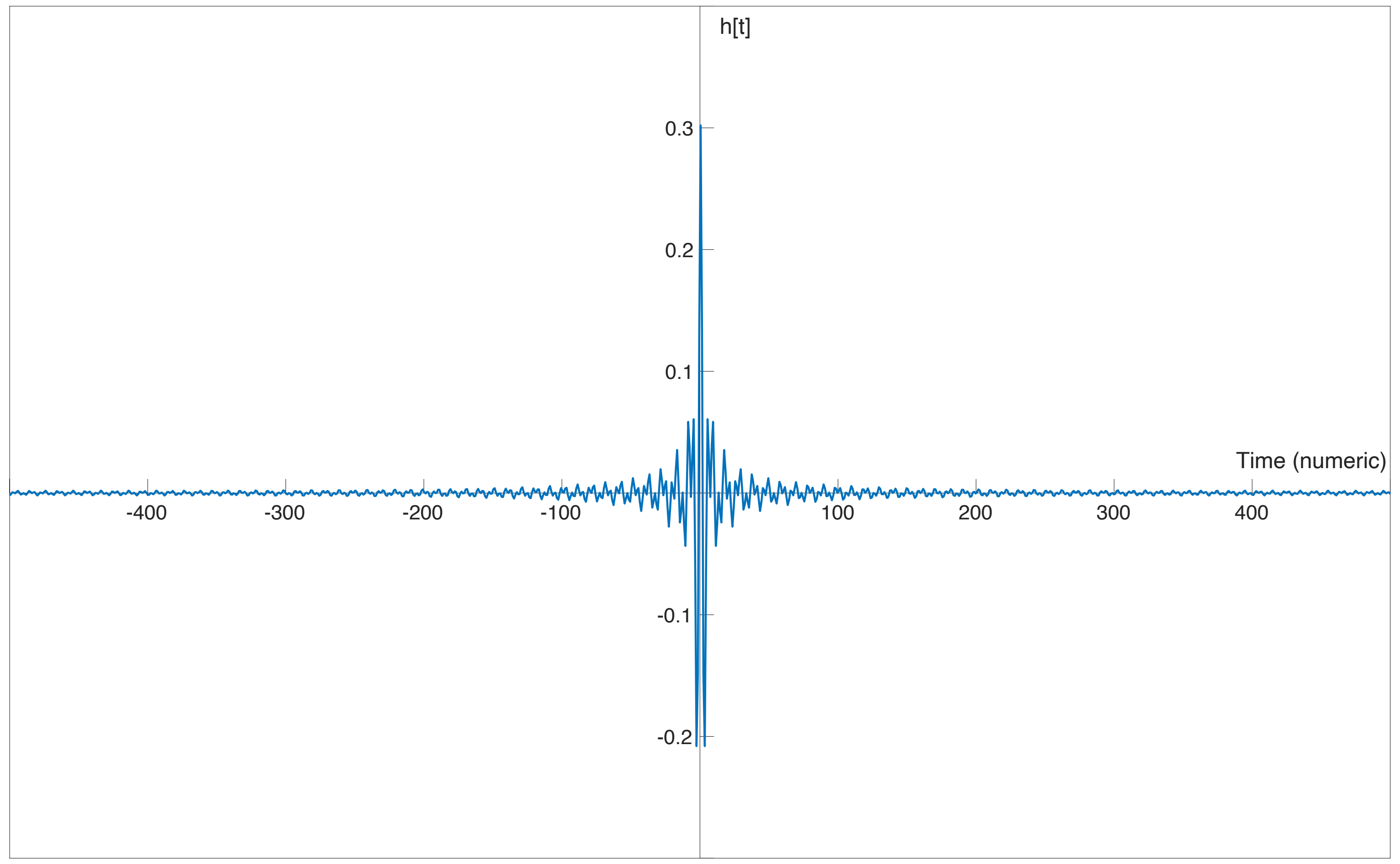
$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Il s'exprime comme la différence de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) - \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

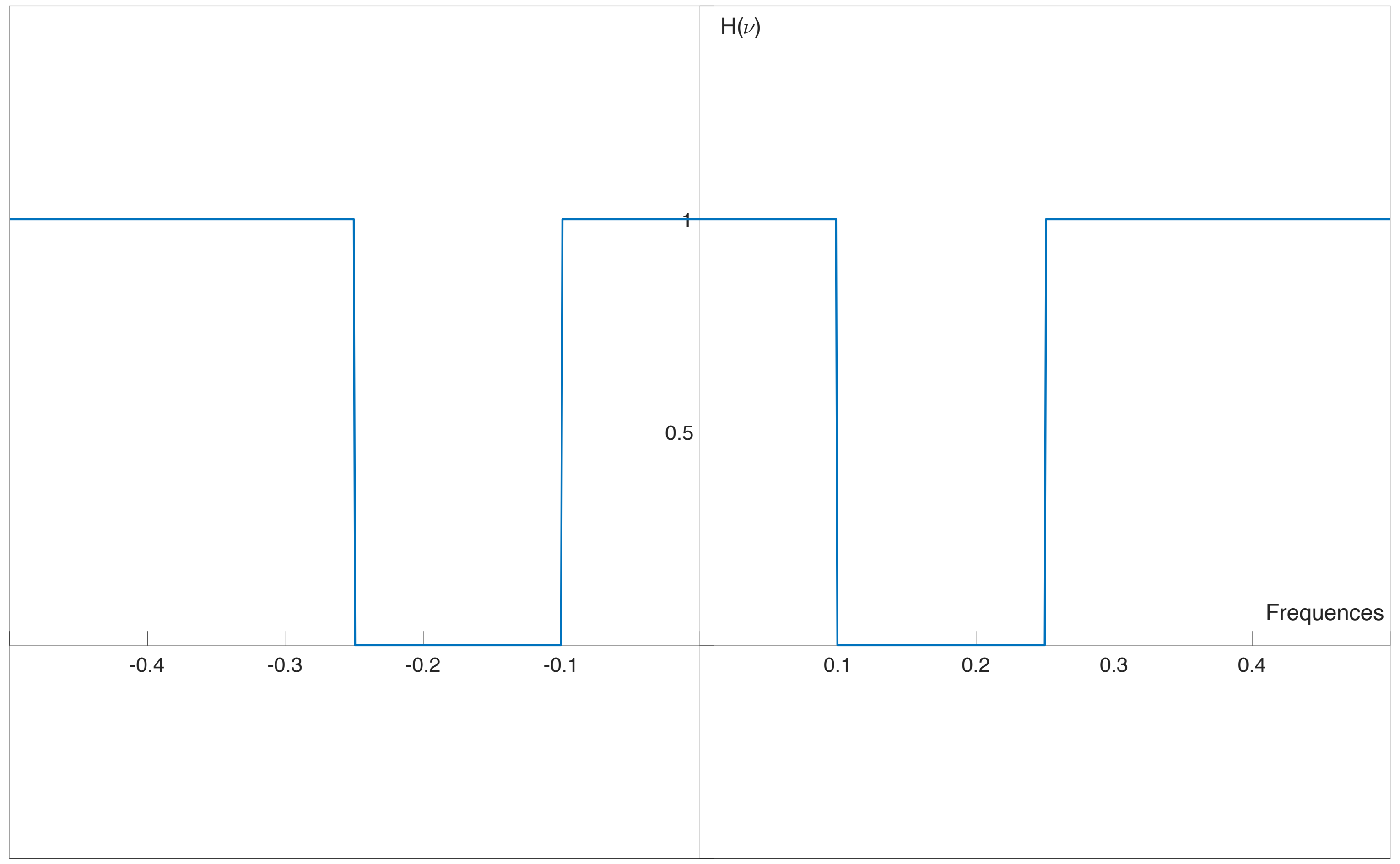


$$h^{Pbande}_{\nu_0,\nu_1}[t] = 2\nu_1 \text{sinc}[2\nu_1 t] - 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$

COUPE-BANDE IDÉAL

- Le filtre coupe-bande idéal de fréquences de coupure fréquence

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

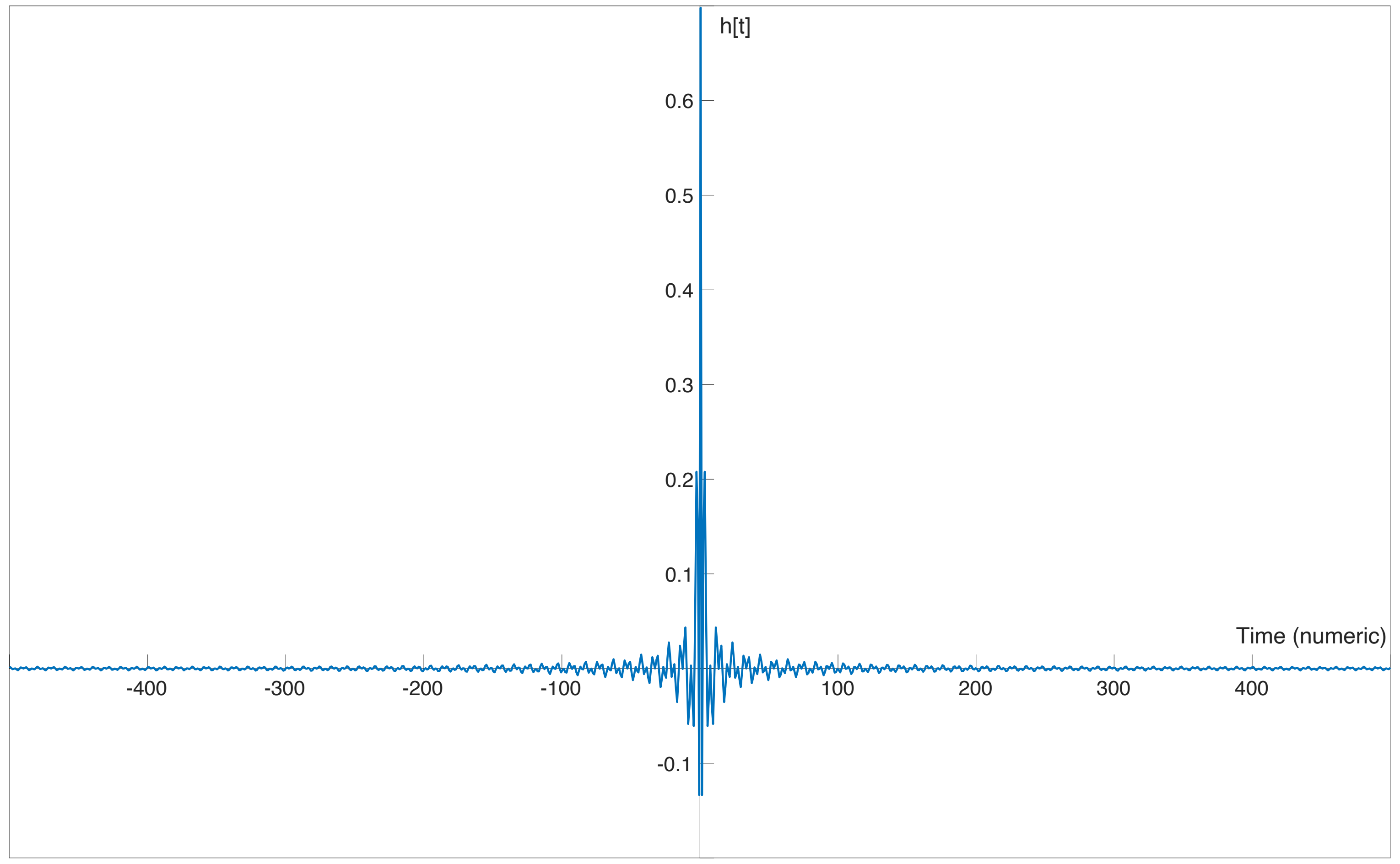


- Il s'exprime à l'aide de 2 passe-bas

$$\hat{h}^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}(\nu) = 1 - \hat{h}^{PB}_{\nu_1}(\nu) + \hat{h}^{PB}_{\nu_0}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h^{Cbande}_{\nu_0,\nu_1}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_1 \text{sinc}[2\nu_1 t] + 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$



FILTRES FIR

FILTRES FIR (FINITE IMPULSE RESPONSE)

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h[t]$. Le filtre est dit à *réponse impulsionnelle finie (FIR)* si $h[t]$ est à support finit, ie $h[t] = \{h[k_1], \ldots, h[k_2]\}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- L'équation de filtrage s'écrit alors

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=k_1}^{k_2} h[k]x[n-k]$$

- On appelle ordre du filtre le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle $h[t]$, ici l'ordre vaut $k_2 - k_1 + 1$
- Un filtre FIR est nécessairement **stable**

FILTRES FIR RÉALISABLE

- Un filtre FIR est réalisable ssi il est causal
- Soit un filtre FIR de réponse impulsionnelle $h[t]$ d'ordre K. Alors $h[t] = \{h[0], \ldots, h[K-1]\}$, $K > 0$.
- L'équation de filtrage s'écrit alors

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=0}^{K-1} h[k]x[n-k]$$

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR

- But: approcher un filtre idéal par un filtre FIR d'ordre K par la méthode de troncature. Soit $\hat{h}^{ideal}(\nu)$ la réponse en fréquence à approcher.

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre idéale par transformée de Fourier inverse:
$$h^{ideal}[t] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{h}^{ideal}(\nu) e^{i2\pi\nu t} \, \mathrm{d}\,\nu$$

2. Conserver K échantillons
$$h^K_{trunc}[t] = \{h^{ideal}[-K/2+1], \ldots, h^{ideal}[K/2]\}$$

3. Translater h^K_{trunc} afin d'obtenir un filtre causal
$$h^K_{FIR}[t] = h^K_{trunc}[t - K/2 + 1]$$

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR: EXEMPLE

- But: approcher un filtre passe-bas idéal par un filtre FIR d'ordre K par la méthode de troncature.

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre idéale par transformée de Fourier inverse:
   $$h^{ideal}[t] = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi\nu t}\,\mathrm{d}\,\nu = 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$
2. Conserver K échantillons
   $$h^K_{trunc}[t] = \{2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0(-K/2+1)], \ldots, 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 K/2]\}$$
3. Translater h^K_{trunc} afin d'obtenir un filtre causal
   $$h^K_{FIR}[t] = h^K_{trunc}[t - K/2 + 1]$$

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR: EXEMPLE

- But: approcher un filtre passe-bas idéal par un filtre FIR d'ordre K par la méthode de troncature.

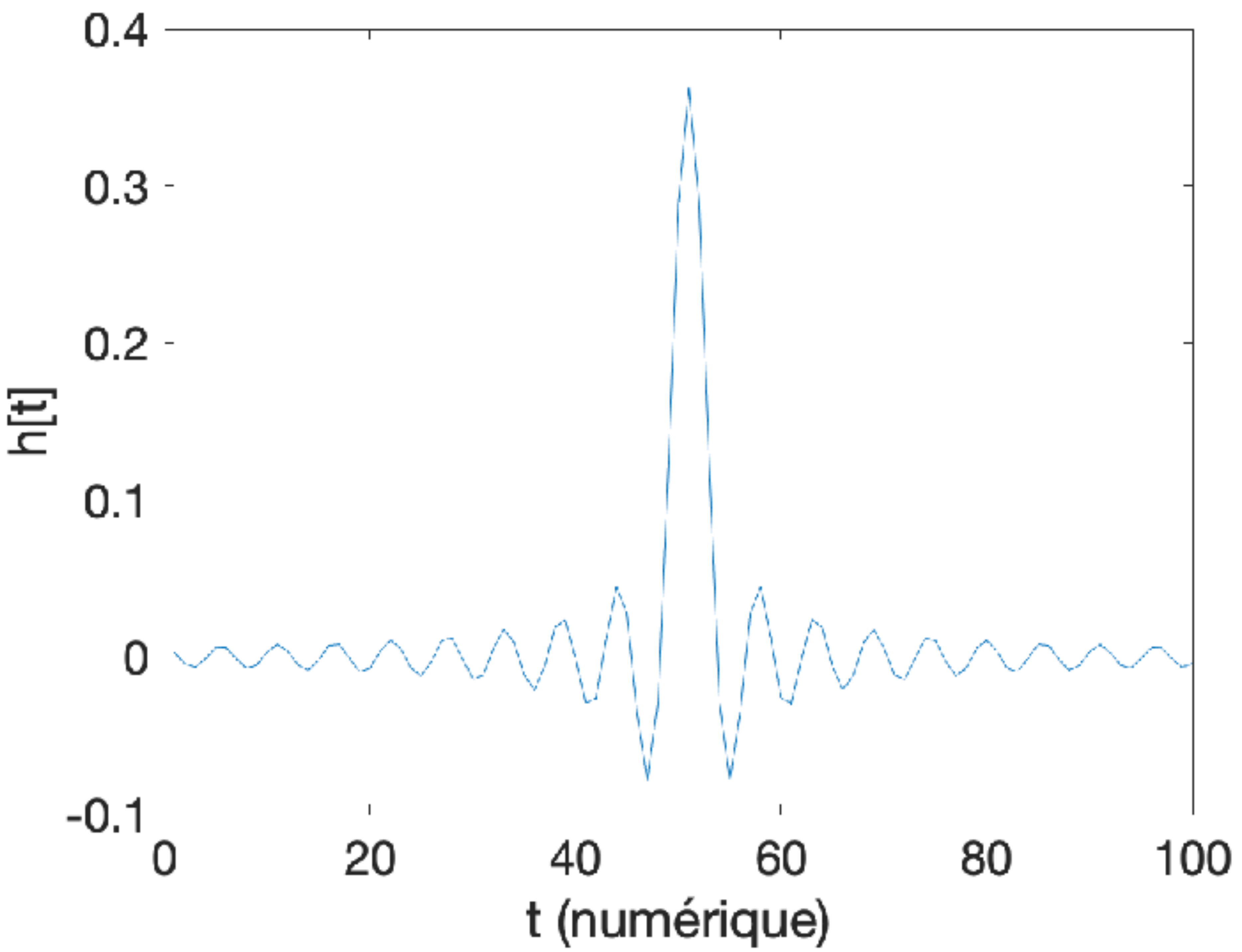
1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre idéale par transformée de Fourier inverse:

$$h^{ideal}[t] = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi\nu t} \,\mathrm{d}\,\nu = 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 t]$$

2. Conserver K échantillons

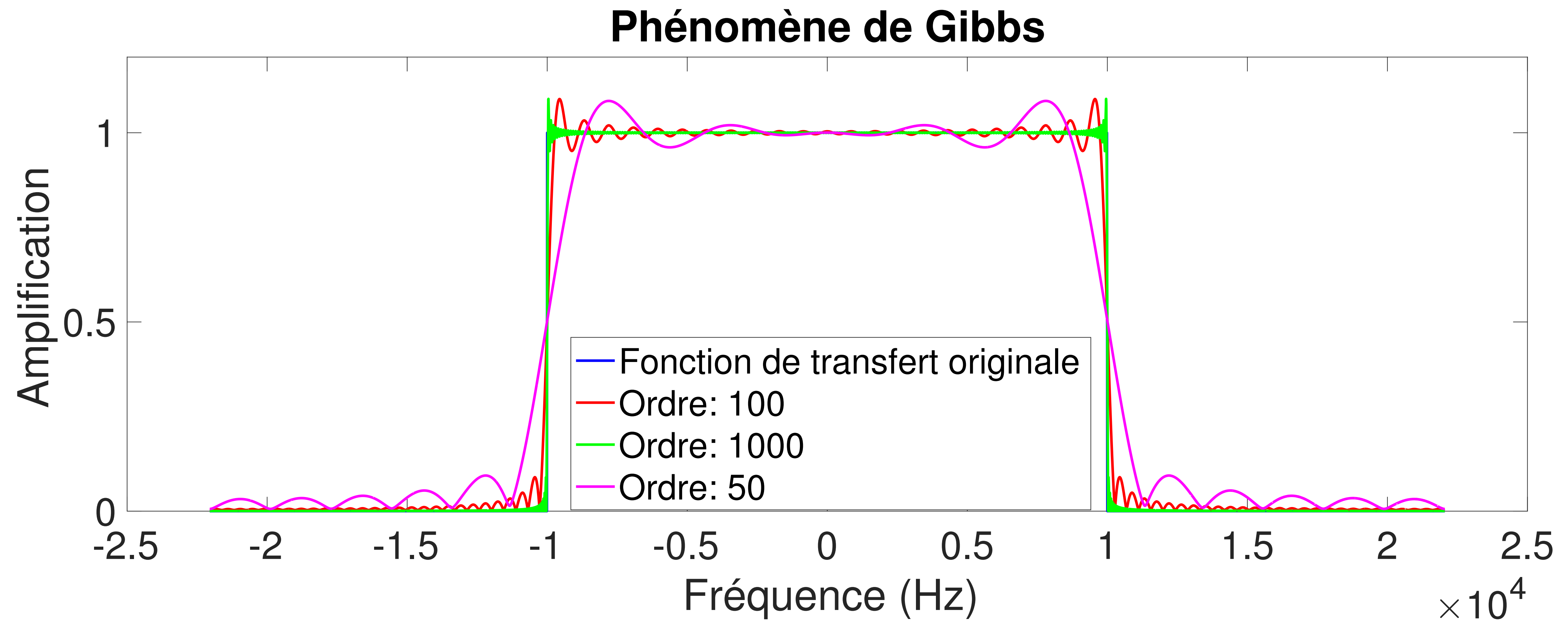
$$h^K_{trunc}[t] = \{2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0(-K/2+1)], \ldots, 2\nu_0 \mathrm{sinc}[2\nu_0 K/2]$$

3. Translater h^K_{trunc} afin d'obtenir un filtre causal



SYNTHESE FIR: LIMITES

- Troncature et phénomène de Gibbs
- Solution: utiliser une fenêtre



- Les coefficients d'un passe-bas décroissent en $\frac{1}{n}$. Il faut faire 10^{10} opérations par seconde pour filtrer un signal échantillonné à 10 kHz avec une erreur de l'ordre 10^{-6}.
- Solution: utiliser des filtres récursifs (à réponse impulsionnelle infinie)

ANALYSE DES SYSTÈMES: TRANSFORMÉE EN Z

TRANSFORMÉE EN Z

- Soit $x[t]$ un signal numérique. La transformée en z de $x[t]$ est donnée par

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Définie sur sa couronne de convergence $R(z) = r_1 < |z| < r_2$

- **Une transformée en z est toujours associée à une couronne de convergence !**

TRANSFORMÉE EN Z : EXEMPLE

- Soit $\theta[t]$ le signal de Heaviside. Sa transformée en z est

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

- Définie sur $R(z) = |z| > 1$

TRANSFORMÉE EN Z : EXEMPLE

- Soit $u[t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ le signal anti-Heaviside. Sa transformée en z est

$$U(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -z^{-k}$$
$$= \frac{1}{1 - z^{-1}}$$
$$= \frac{z}{z-1}$$

- Définie sur $R(z) = |z| < 1$
- La seule différence avec le signal de Heaviside vient du domaine de convergence

TRANSFORMÉE EN Z ET CAUSALITÉ

Soit $x[t]$ un signal numérique et $X(z)$ sa transformée en z définie sur $R(z) = r_1 < |z| < r_2$.

- $x[t]$ est causal ssi $R(z) = r_1 < |z|$ (ie $r_2 = +\infty$)
- x[t] est anti-causal ssi $R(z) = |z| < r_2$ (ie $r_1 = 0$)

TRANSFORMÉE EN Z ET STABILITÉ

Soit $x[t]$ un signal numérique et $X(z)$ sa transformée en z définie sur $R(z) = r_1 < |z| < r_2$.

- $x[t]$ est stable ssi $1 \in R(z)$ (ie $r_1 < 1$ et $r_2 > 1$)
- Si $x[t]$ est stable, alors il admet une transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$ et

$$\hat{x}(\nu) = X(e^{i2\pi\nu})$$

TRANSFORMÉE EN Z: PROPRIÉTÉS DE CALCULS

- Linéarité: $v[t] = au_1[t] + u_2[t]$

$V(z) = aU_1(z) + U_2(z)$

- Translation: $v[t] = u[t-k]$

$V(z) = z^{-k}U(z)$

- Convolution: soit $w[t] = (u * v)[t]$, alors

$W(z) = U(z)\,V(z)$

- Dérivation $v[t] = t^k u[t]$

$$V(z) = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k U(z)$$

- Changement d'échelle $v[t] = a^t u[t]$

$$V(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$$

TRANSFORMÉE EN Z ET FILTRAGE

- Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h[t]$. Alors

$$y[t] = (h * x)[t]$$

- Après transformée en z on a

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- La transformée en z $H(z)$ de la réponse impulsionnelle est appelée **fonction de transfert** du filtre

FILTRES IIR

FILTRES RÉCURSIFS

- On cherche $y[t]$ tel que

$$y[t] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[t-k] - \sum_{k=1}^{N} a[k]y[t-k]$$

- Le coefficient $y[t]$ dépend du signal d'entrée x, mais aussi des coefficients $y[n]$, $n < t$, déjà calculés
- On utilise deux filtres FIR $\{b[0], \ldots, b[M]\}$ et $\{a[1], \ldots, a[N]\}$
- Si l'équation de filtrage a une solution unique, alors c'est un filtre récursif.
- On suppose $M \leq N$
- N est **l'ordre** du filtre

FILTRES RÉCURSIFS: ANALYSE

- On cherche $y[t]$ tel que: $y[t] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[t-k] - \sum_{k=1}^{N} a[k]y[t-k]$
- On pose $a[0] = 1$: $y[t] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[t-k] - \sum_{k=1}^{N} a[k]y[t-k] \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a[k]y[t-k] = \sum_{k=0}^{M} b[k]x[t-k]$
- On prend la transformée en z de l'équation précédente: $Y(z)\sum_{k=0}^{N} a[k]z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b[k]z^{-k} \Leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$
- Avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a[k]z^{-k}}$

FILTRES RÉCURSIFS: ANALYSE

- On a $Y(z) = H(z)X(z)$, avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a[k]z^{-k}}$
- Si le dénominateur de s'annule jamais pour $z \in R(z)$, alors le filtre de fonction de transfert H existe.
- La réponse impulsionnelle $h[t]$ s'obtient en inversant $H(z)$

FILTRES IIR: POLES ET ZÉROS

- On a $Y(z) = H(z)X(z)$, avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{N} b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a[k]z^{-k}}$
- Zéros de $H(z)$: solutions de $\sum_{k=0}^{M} b[k]z^{-k} = 0$
- Pôles de $H(z)$: solutions de $\sum_{k=0}^{N} a[k]z^{-k} = 0$

FILTRES IIR: FONCTION DE TRANSFERT

- On a $Y(z) = H(z)X(z)$, avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{N} b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a[k]z^{-k}}$
- Le filtre est causal ssi $H(z)$ et définit pour tout $|z| > r$
- Le filtre est stable ssi $H(z)$ est définit pour $|z| = 1$
- Le filtre est réalisable ssi $H(z)$ est définit pour tout $|z| > r$, avec $r < 1$

CONCLUSION

EN BREF

- Filtres = systèmes linéaire invariant dans le temps (convolution !)
- Transformée en z: généralisation de la transformée de Fourier pour analyser les systèmes (y compris les systèmes non stables !)
- Filtres FIR
- Filtres IIR: filtres récursifs !
- Analyse d'un filtre IIR par sa transformée en z