DEVOIR DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Table des matières

Exercice 1. — *Effet d'écho par filtrage FIR.*

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$s[n] = e[n] + \alpha e[n - D]$$

où $e[n]$ est l'entrée et $s[n]$ la sortie. $\alpha \geq 0$ est appelé le facteur d'atténuation et $D \in \mathbb{Z}$ le delay. Ce système permet d'implémenter un simple écho.

(1) Le système est-il linéaire ? Invariant ?

(2) À quelle condition sur D le système est-il causal ?

(3) Déterminer la réponse impulstionnelle h du système et la représenter graphiquement pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $D = 2$. Le système est-il toujours stable ?

(4) Donner la fonction de transfert $H(z)$ de h avec sa région de convergence.

(5) Donner la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ du système et son module au carré.

(6) Étudier $|\hat{h}(\nu)|^2$, en donner une représentation graphique sommaire pour deux valeurs de D. Quelle est l'effet de D ?

(7) On suppose que e est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation

$$R_e[0] = \sigma \quad R_e[n] = 0 \text{ si } n \neq 0$$

Donner la moyenne de s et la densité spectrale de puissance de s. s est-il un bruit blanc ?

Exercice 2. — *Effet d'écho par filtrage IIR.*

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$s[n] = \alpha e[n] + \beta s[n - D]$$

où $e[n]$ est l'entrée et $s[n]$ la sortie. $\alpha \geq 0$ est appelé le facteur d'échelle, $\beta \geq 0$ le facteur d'atténuation et $D \in \mathbb{Z}$ le delay.

(1) Le système est-il linéaire ? Invariant ?

(2) À quelle condition sur D le système est-il causal ?

(3) Donner la fonction de transfert $H(z)$ de h avec sa région de convergence.

(4) Donner la (les) condition(s) de stabilité du système.

(5) Donner la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ du système et son module au carré, lorsqu'elle existe.

(6) Déterminer la réponse impulstionnelle h du système pour $D = 1$

(7) On suppose que e est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation

$$R_e[0] = \sigma \quad R_e[n] = 0 \text{ si } n \neq 0$$

Donner la moyenne de s et la densité spectrale de puissance de s. s est-il un bruit blanc ?

Exercice 3. — *Transformée en Z de la fonction porte à temps discret.*

On considère la famille des signaux porte, à temps discret, définis par

$$\Pi_{N,n_0}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in [n_0 - N; n_0 + N] \\ 0 & \text{si } n \notin [n_0 - N; n_0 + N] \end{cases}$$

avec n_0 et N deux entiers naturels.

(1) Comment varie la fonction Π_{N,n_0} avec n_0 et N ? Représentez la pour différentes valeurs de n_0 et N. Quelle est sa durée ?

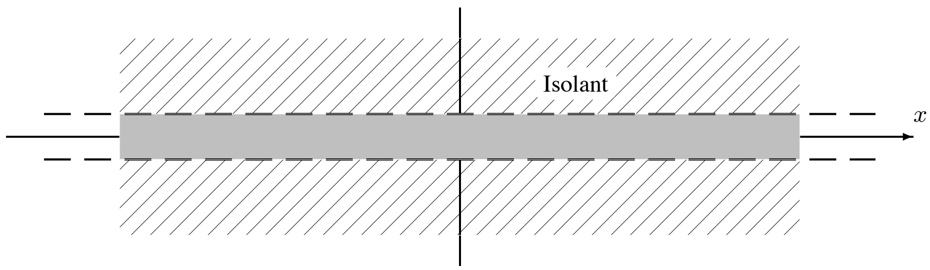
(2) Calculez la transformée en Z de la fonction porte centrée en $n_0 = 0$: $\Pi_{N,0}$. Précisez la region de convergence.

(3) En exploitant les relations de « décalage et transformée en Z », donnez la transformée en Z de Π_{N,n_0} pour tout n_0. Précisez la région de convergence.

(4) Le signal Π_{N,n_0} est-il stable pour tout n_0 et N ? Retrouvez la transformée de Fourier de Π_{N,n_0}.

Exercice 4. — *Conduction de chaleur dans un milieu infini.*

Dans cet exercice on cherche à caractériser les phénomènes de propagation de chaleur dans un cylindre de longueur infinie. Le cylindre est homogène, de section S, densité ρ, capacité calorique C (par unité de masse) et conductivité thermique K. On note $T(x,t)$ la température du cylindre à l'instant t et à l'abscisse x, comme indiqué sur la figure suivante. Par ailleurs on impose des conditions initiales ($t=0$) de température : $T(x,0) = T_0(x)$ une fonction donnée.



Une étude physique du système permet de relier le flux de chaleur en x à la température par :

$$q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}\,. \tag{1}$$

où K est la conductivité thermique. Ainsi, le flux est proportionnel au gradient de température et orienté dans le sens opposé à ce dernier.

Lorsqu'un élément du cylindre de masse m reçoit une quantité de chaleur ΔQ, sa température s'élève de ΔT, les deux quantités étant reliées par la relation classique de la thermodynamique : $\Delta Q = mC\Delta T$. En étudiant l'évolution d'une mince tranche de cylindre pendant une courte durée, on montre que la température et le flux de chaleur sont reliés par :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}\,. \tag{2}$$

On suppose que cette équation possède une solution T telle qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ qui vérifie

— $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

— $\forall t\ |T(x,t)| \leq g(x)$,

— $\forall t\ |\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}(x,t)| \leq g(x)$

— $\forall t\ |\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}(x,t)| \leq g(x)$

(1) Déduisez de (1) et (2) que T vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0\,,$$

avec $a^2 = K/\rho C$. Montrez que c'est une équation linéaire.

La suite de cet exercice est consacrée à la résolution de cette équation en passant dans le domaine de Fourier. La transformée de Fourier de $T(x,t)$ par rapport à la variable x est une fonction de la fréquence f, qui dépend aussi du temps, que l'on note : $\hat{T}(\xi,t)$.

(2) Équation différentielle en $\hat{T}$.

(a) En utilisant les formules de « transformée de Fourier et dérivation », déterminer les transformées de Fourier de $\frac{\partial T}{\partial x}$ et de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, en fonction de $\hat{T}$.

(b) Montrer que

$$\widehat{\frac{\partial T}{\partial t}}(\xi, t) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi, t)$$

En dérivant la relation de transformée de Fourier reliant T en $\hat{T}$ sous le signe $\int$, calculez la transformée de Fourier de $\frac{\partial T}{\partial t}$.

(c) Déduisez de ce qui précède une équation différentielle simple pour $\hat{T}(\xi, t)$. Donnez également les conditions initiales pour $\hat{T}$ (on notera $\hat{T}_0$ la transformée de Fourier de T_0).

(d) Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus et montrez que la solution se met sous la forme du produit de $\hat{T}_0(f)$ par une fonction $\Pi(\xi, t)$ que l'on précisera :

$$\hat{T}(\xi, t) = \hat{T}_0(\xi)\, \Pi(\xi, t)\,.$$