

COURS 3: FILTRAGE

TRAITEMENT DU SIGNAL

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

SIGNAUX ET SYSTÈMES

- ▶ Un signal est enregistré, et déformé, par un capteur
- ▶ Un signal est (presque) toujours lié à la notion de « système »
- ▶ Système: Bloc fonctionnel qui réagit à un signal d'excitation en entrée et produit un signal de réponse après avoir appliqué une fonction au signal d'entrée



- ▶ S est une « fonctionnelle » qui s'applique à un signal, et retourne un autre signal

SYSTÈMES LINÉAIRES

- ▶ Un système linéaire est une fonction linéaire par rapport aux entrées
- ▶ Soit un système S et deux signaux d'entrées x_1 et x_2 , tel que $y_1 = S\{x_1\}$ et $y_2 = S\{x_2\}$. S est linéaire ssi

$$\begin{aligned} S\{ax_1 + x_2\} &= aS\{x_1\} + S\{x_2\} \\ &= ay_1 + y_2 \end{aligned}$$

- ▶ Soit S un système linéaire. Alors il existe une fonction h tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y[t] = S\{x\}[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k, t]x[k]$$

SYSTÈMES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- ▶ Un système invariant dans le temps est stable par translation temporelle
- ▶ Soit un système S invariant dans le temps tel que $y[t] = S\{x\}[t]$. Soit $u_k[t] = x[t - k]$. Alors

$$S\{u_k\}[t] = y[t - k]$$

- ▶ Soit S un système linéaire. Alors il existe une fonction h tel que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$y[t] = S\{x\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[t - k]x[k]$$

FILTRES: SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

- ▶ Un filtre est un système linéaire invariant dans le temps
- ▶ Soit S un filtre. Alors il existe une fonction h appelée *réponse impulsionnelle* telle que la relation entrée/sortie s'écrit:

$$\begin{aligned}y[t] &= S\{x\}[t] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[t-k]x[k] \\ &= (h * x)[t]\end{aligned}$$

- ▶ la réponse impulsionnelle h caractérise complètement le filtre
- ▶ C'est une opération de **convolution**

RAPPEL: PRODUIT DE CONVOLUTION

- ▶ Soit u et v deux signaux numériques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$(u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t - k]v[k]$$

- ▶ Le produit de convolution est commutatif

$$(u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t - k]v[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t - k] = (v * u)[t]$$

- ▶ Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)[t] = (u * \delta)[t] = u[t]$$

FILTRES

- ▶ Soit un filtre S de réponse impulsionnelle h . Alors

$$\begin{aligned} S\{\delta\}(t) &= (h * \delta)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[t - k]h[t] \\ &= h[t] \end{aligned}$$

- ▶ La réponse impulsionnelle est la réponse du filtre au signal impulsion de Dirac

FILTRES

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h . On dit que le filtre est

- ▶ Causal ssi h est causal
- ▶ Stable ssi h est stable
- ▶ Réalisable ssi h est réalisable

FILTRE CAUSAL

Soit un filtre causal de réponse impulsionnelle h . Alors l'équation de filtrage (appelée aussi équation aux différences) s'écrit

$$\begin{aligned}y[t] &= (h * x)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[t - k] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[t - k] \\ &= h[0]x[t] + h[1]x[t - 1] + \dots + h[n]x[t - n] + \dots\end{aligned}$$

- ▶ On voit que la réponse au temps t ne dépend que du signal d'entrée aux **temps précédents**. **Il n'y a pas besoin de connaître le futur de x pour calculer y .**
- ▶ Il y a bien un rapport de **causalité** entre l'entrée x et la sortie y

FILTRE STABLE

Soit un filtre stable de réponse impulsionnelle h .

- ▶ Soit un signal d'entrée x stable. Alors le signal de sortie y est stable

$$\begin{aligned}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} |y[t]| &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[t-k] \right| \\ &\leq \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[t-k]| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |x[t-k]| \\ &\leq \|h\|_1 \|x\|_1 \\ &< +\infty\end{aligned}$$

- ▶ De même, si l'entrée x est bornée (i.e. $|x[t]| < B \forall t$), alors la sortie y est bornée

RÉPONSE EN FRÉQUENCE

- ▶ Soit un filtre **stable** de réponse impulsionnelle $h[t]$. La réponse en fréquence du filtre est la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ de la réponse impulsionnelle.
- ▶ Soit

$$y[t] = (h * x)[t]$$

Alors

$$\hat{y}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{x}(\nu)$$

- ▶ Filtrer un signal revient à modifier son spectre. Exemple: un equalizer

FILTRES IDÉAUX

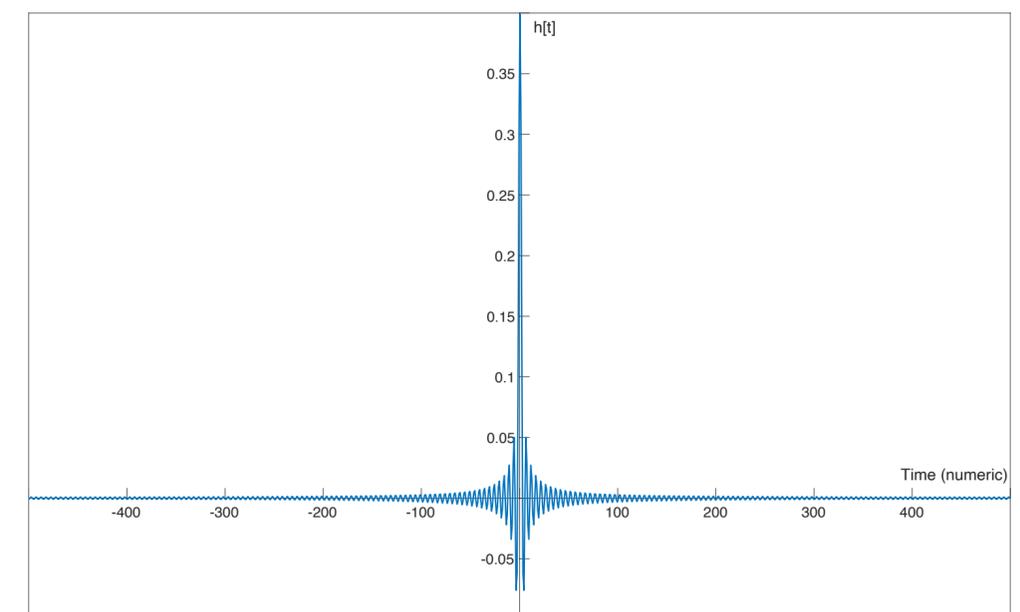
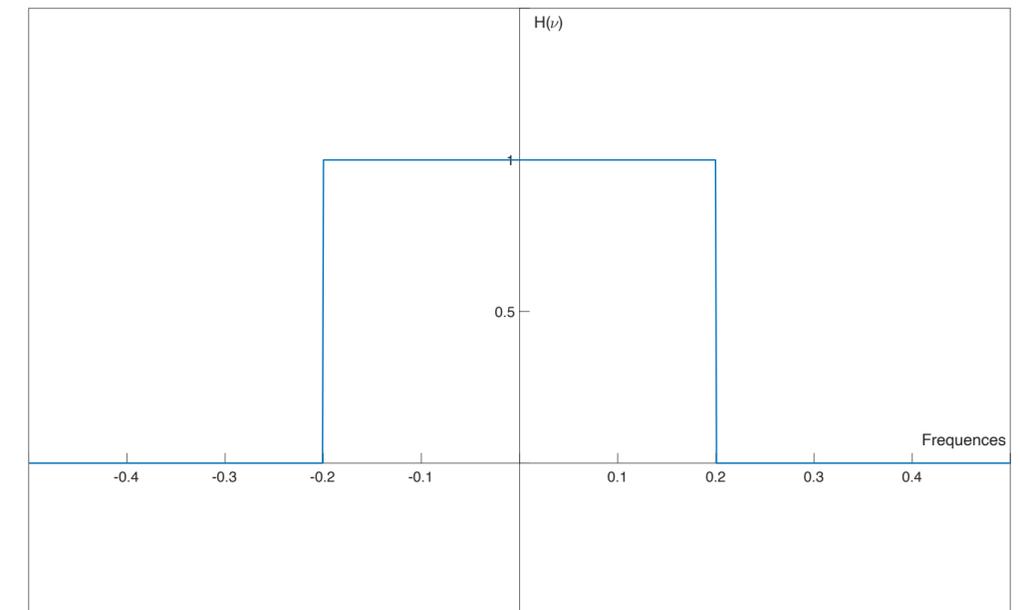
PASSE-BAS IDÉAL

- ▶ Le filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ν_0 est défini par sa réponse en fréquence

$$\hat{h}_{\nu_0}^{PB}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Sa réponse impulsionnelle est

$$h_{\nu_0}^{PB}[t] = 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$



PASSE-HAUT IDÉAL

- ▶ Le filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure ν_0 est défini par sa réponse en fréquence

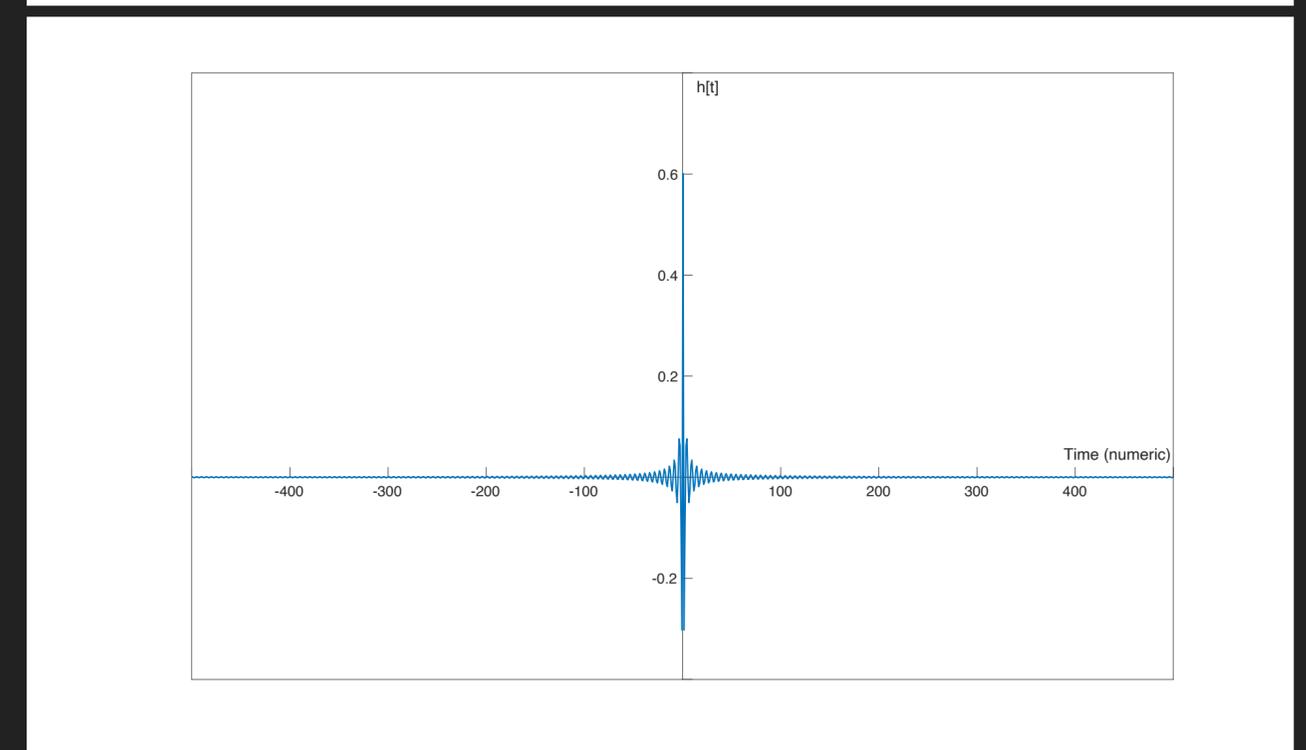
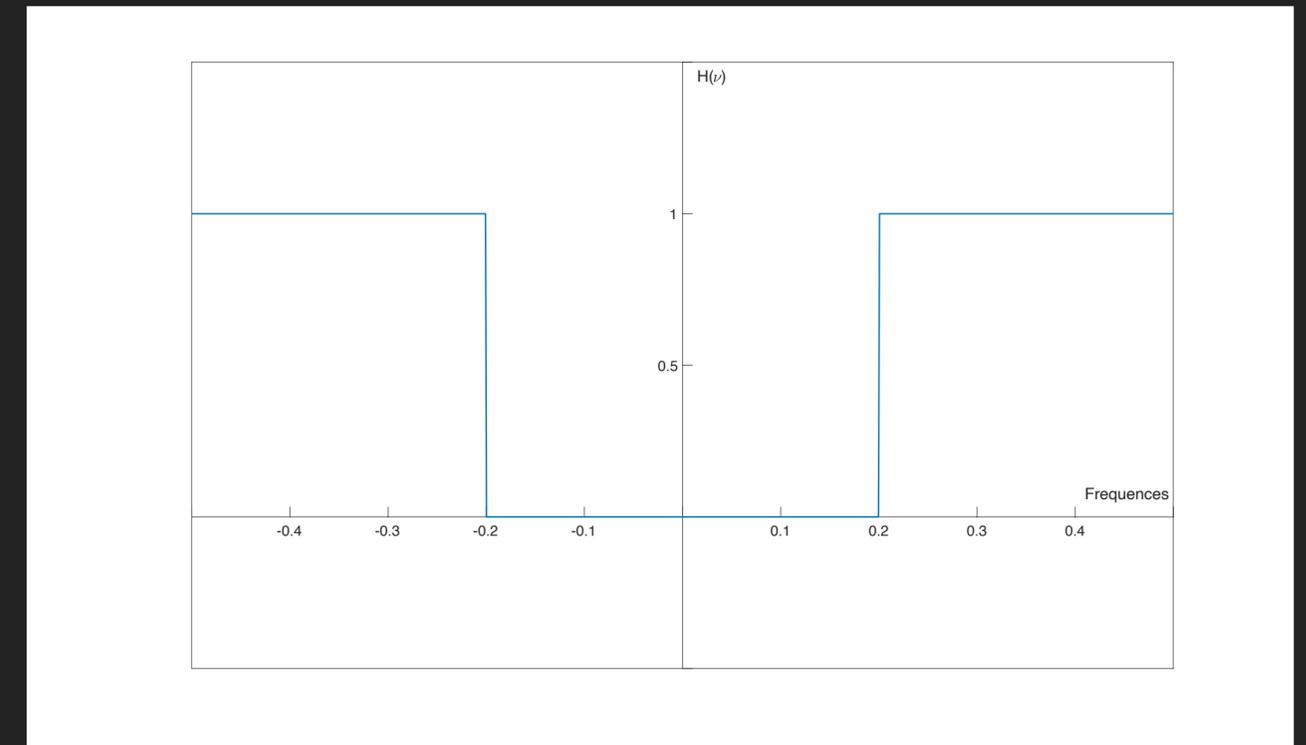
$$\hat{h}_{\nu_0}^{PH}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_0, \nu_0] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Il s'exprime à l'aide d'un passe-bas

$$\hat{h}_{\nu_0}^{PH}(\nu) = 1 - \hat{h}_{\nu_0}^{PB}(\nu)$$

- ▶ Sa réponse impulsionnelle est

$$h_{\nu_0}^{PH}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_0 \text{sinc}(2\nu_0 t)$$



PASSE-BANDE IDÉAL

- Le filtre passe-bande idéal de fréquences de coupure ν_0, ν_1 est défini par sa réponse en fréquence

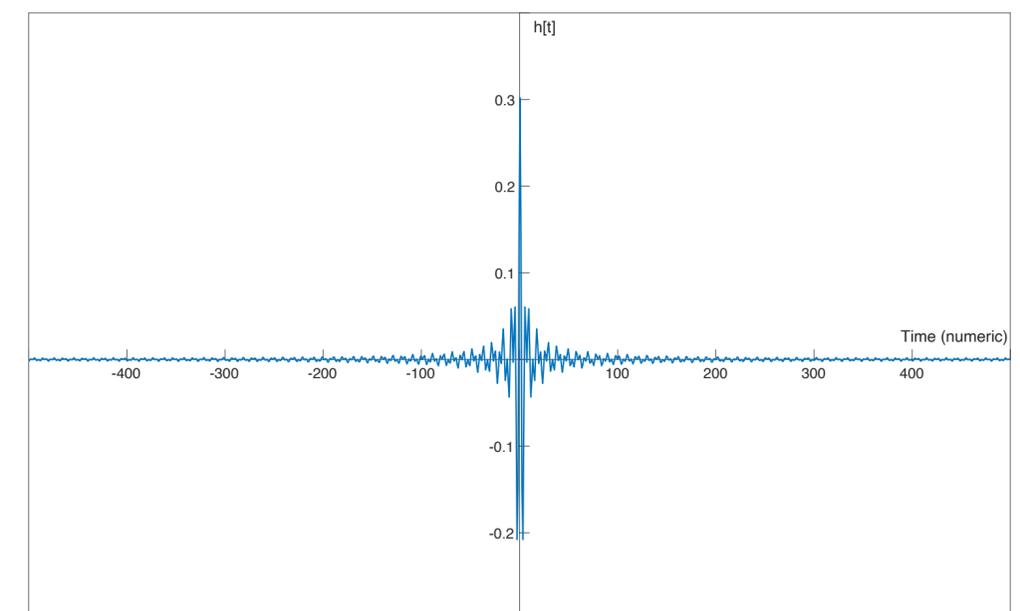
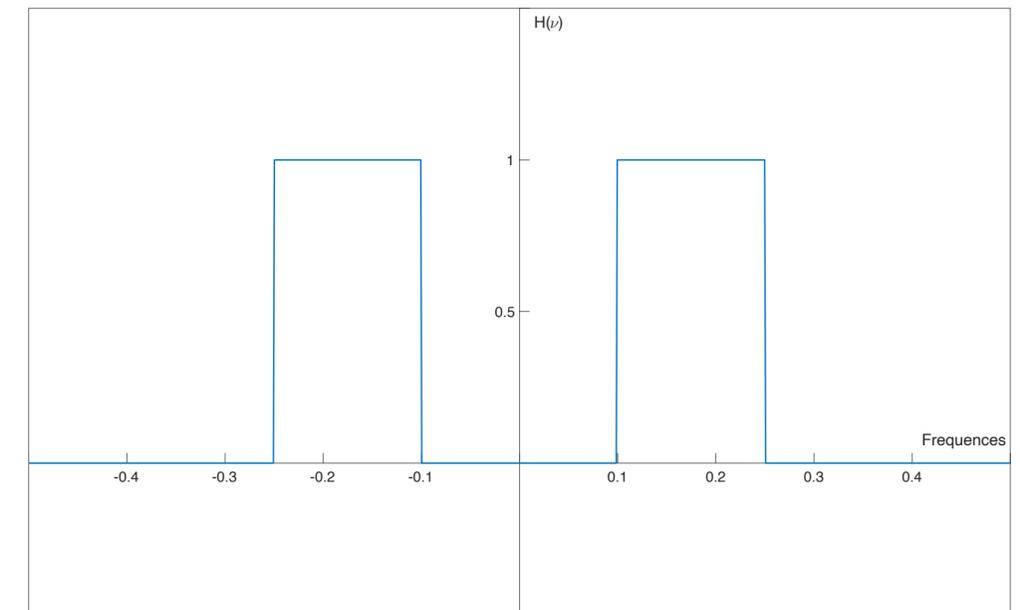
$$\hat{h}_{\nu_0, \nu_1}^{Pbande}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Il s'exprime comme la différence de 2 passe-bas

$$\hat{h}_{\nu_0, \nu_1}^{Pbande}(\nu) = \hat{h}_{\nu_1}^{PB}(\nu) - \hat{h}_{\nu_0}^{PB}(\nu)$$

- Sa réponse impulsionnelle est

$$h_{\nu_0, \nu_1}^{Pbande}[t] = 2\nu_1 \text{sinc}[2\nu_1 t] - 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$



COUPE-BANDE IDÉAL

- ▶ Le filtre coupe-bande idéal de fréquences de coupure ν_0, ν_1 est défini par sa réponse en fréquence

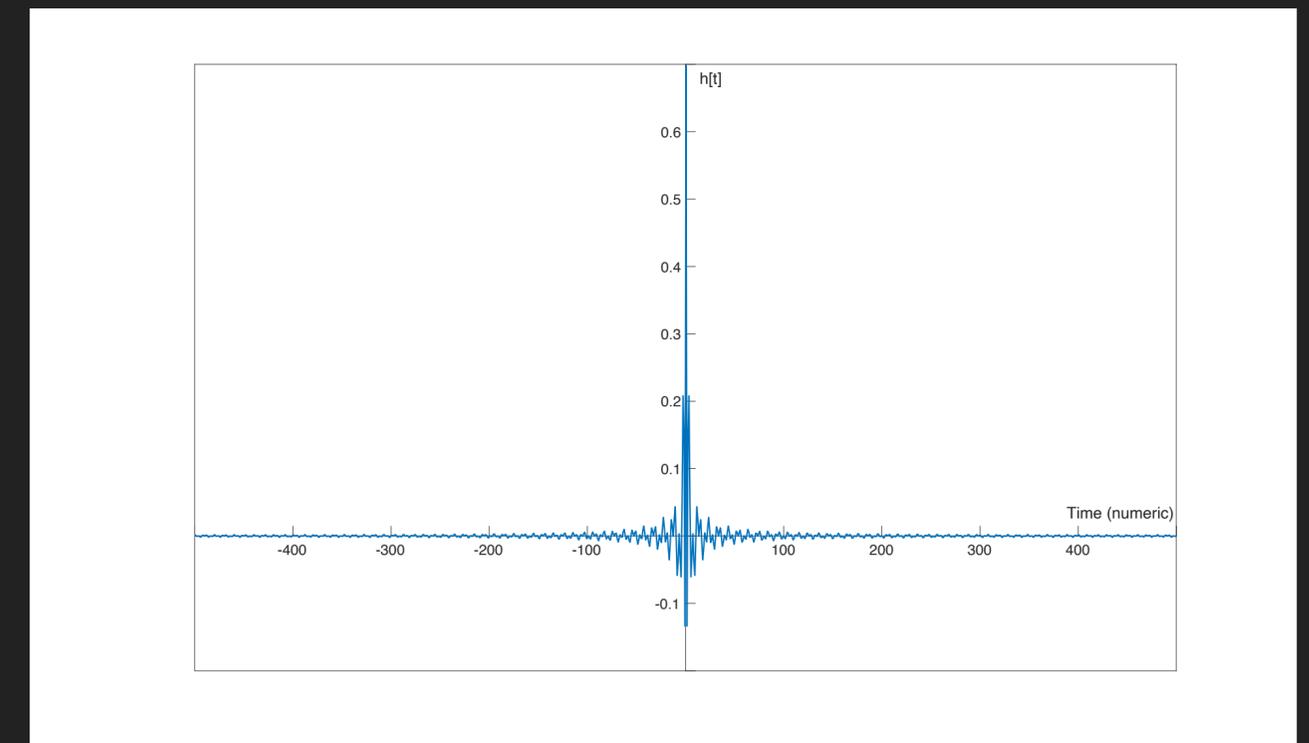
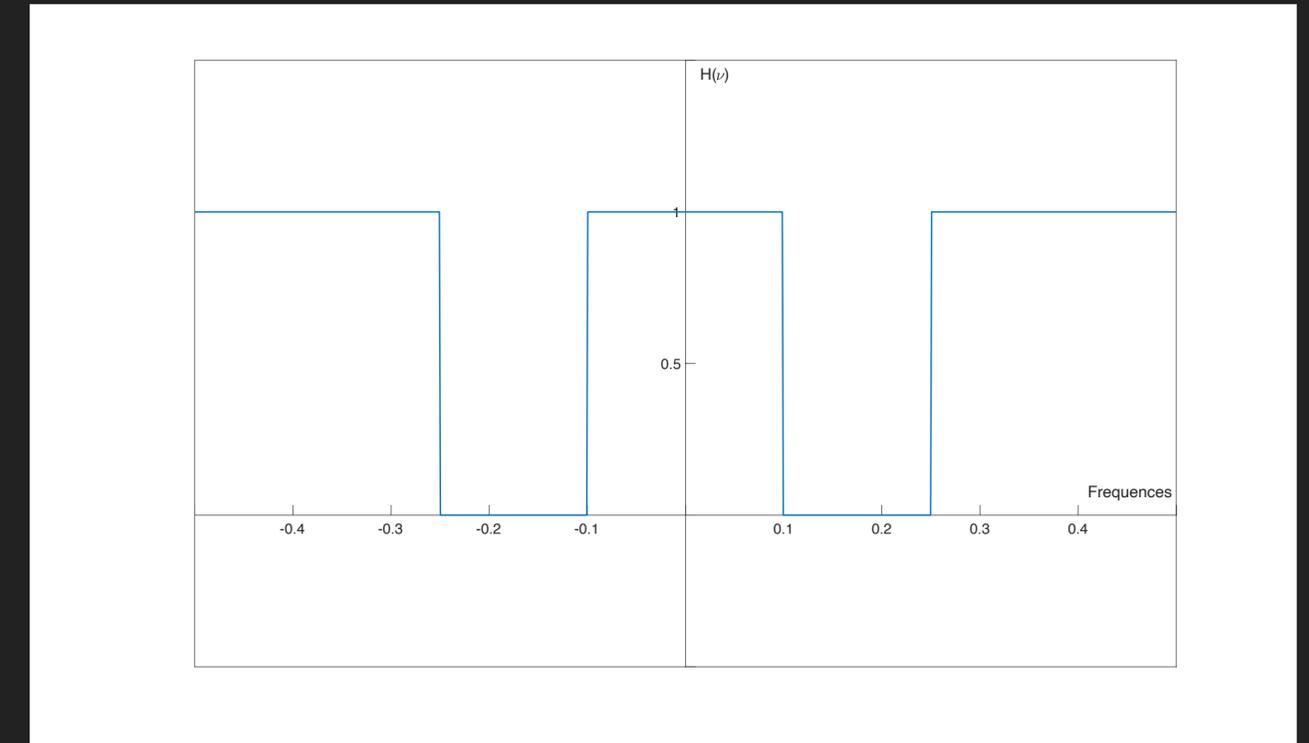
$$\hat{h}_{\nu_0, \nu_1}^{Cbande}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in [-\nu_1, -\nu_0] \cup [\nu_0, \nu_1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Il s'exprime à l'aide de 2 passe-bas

$$\hat{h}_{\nu_0, \nu_1}^{Cbande}(\nu) = 1 - \hat{h}_{\nu_1}^{PB}(\nu) + \hat{h}_{\nu_0}^{PB}(\nu)$$

- ▶ Sa réponse impulsionnelle est

$$h_{\nu_0, \nu_1}^{Cbande}[t] = \delta_0[t] - 2\nu_1 \text{sinc}[2\nu_1 t] + 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$



FILTRES FIR

FILTRES FIR (FINITE IMPULSE RESPONSE)

- ▶ Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h[t]$. Le filtre est dit à *réponse impulsionnelle finie (FIR)* si $h[t]$ est à support finit, ie $h[t] = \{h[k_1], \dots, h[k_2]\}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- ▶ L'équation de filtrage s'écrit alors

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=k_1}^{k_2} h[k]x[n - k]$$

- ▶ On appelle ordre du filtre le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle $h[t]$, ici l'ordre vaut $k_2 - k_1 + 1$
- ▶ Un filtre FIR est nécessairement **stable**

FILTRES FIR RÉALISABLE

- ▶ Un filtre FIR est réalisable ssi il est causal
- ▶ Soit un filtre FIR de réponse impulsionnelle $h[t]$ d'ordre K . Alors $h[t] = \{h[0], \dots, h[K - 1]\}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- ▶ L'équation de filtrage s'écrit alors

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=0}^{K-1} h[k]x[n - k]$$

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR

- ▶ But: approcher un filtre idéal par un filtre FIR d'ordre K par la méthode de troncature. Soit $\hat{h}^{ideal}(\nu)$ la réponse en fréquence à approcher.

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre idéale par transformée de Fourier inverse:

$$h^{ideal}[t] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{h}^{ideal}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

2. Conserver K échantillons

$$h_{trunc}^K[t] = \{h^{ideal}[-K/2 + 1], \dots, h^{ideal}[K/2]\}$$

3. Translater h_{trunc}^K afin d'obtenir un filtre causal

$$h_{FIR}^K[t] = h_{trunc}^K[t - K/2 + 1]$$

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR: EXEMPLE

► But: approcher un filtre passe-bas idéal par un filtre FIR d'ordre K par la méthode de troncature.

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre idéale par transformée de Fourier inverse:

$$h^{ideal}[t] = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi\nu t} d\nu = 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$

2. Conserver K échantillons

$$h_{trunc}^K[t] = \{2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0(-K/2 + 1)], \dots, 2\nu_0 \text{sinc}[K/2]\}$$

3. Translater h_{trunc}^K afin d'obtenir un filtre causal

$$h_{FIR}^K[t] = h_{trunc}^K[t - K/2 + 1]$$

SYNTHÈSE DE FILTRE FIR: EXEMPLE

► But: approcher un filtre passe-bas idéal par un filtre FIR d'ordre K par la méthode de troncature.

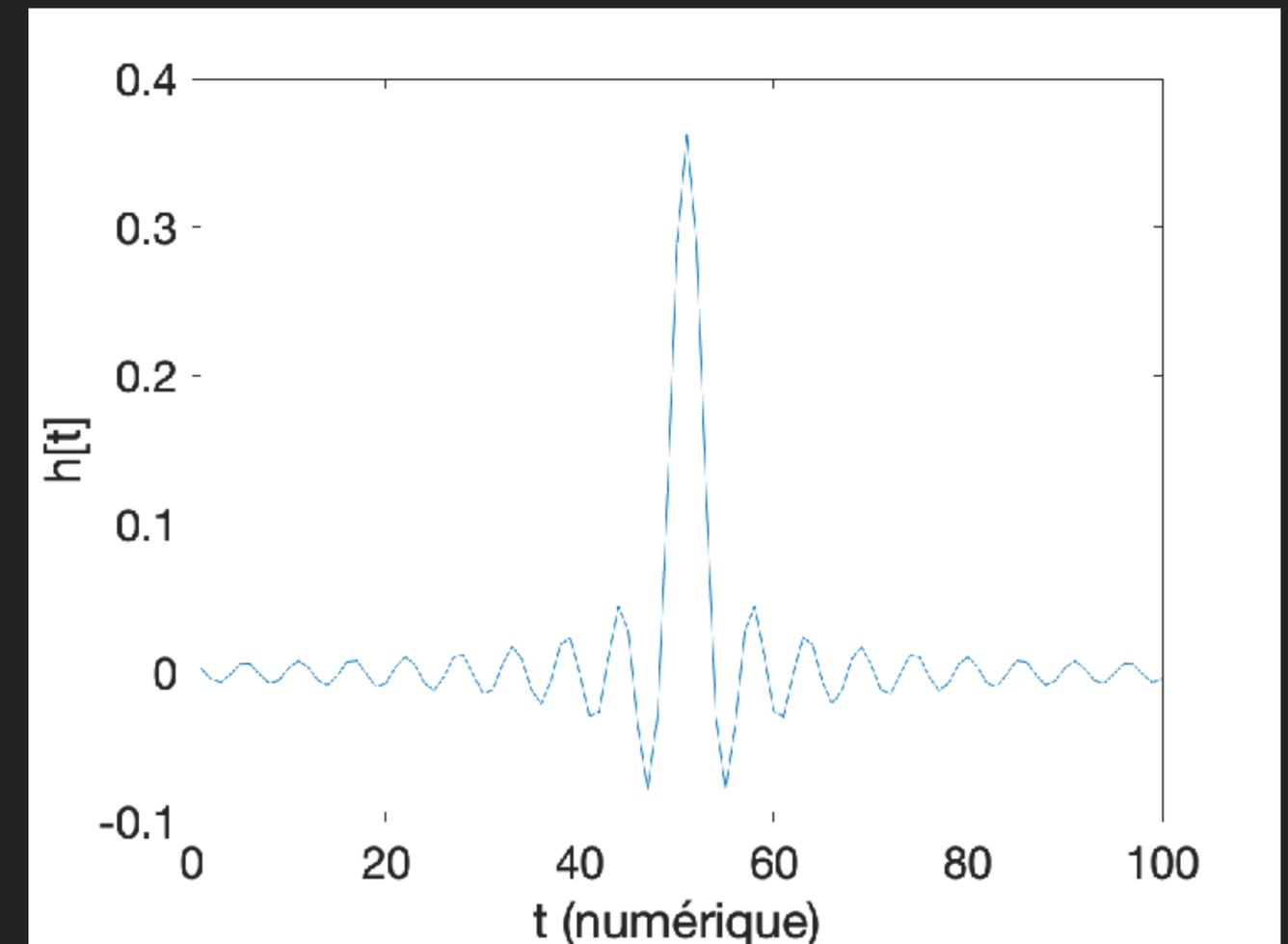
1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre idéale par transformée de Fourier inverse:

$$h^{ideal}[t] = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi\nu t} d\nu = 2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0 t]$$

2. Conserver K échantillons

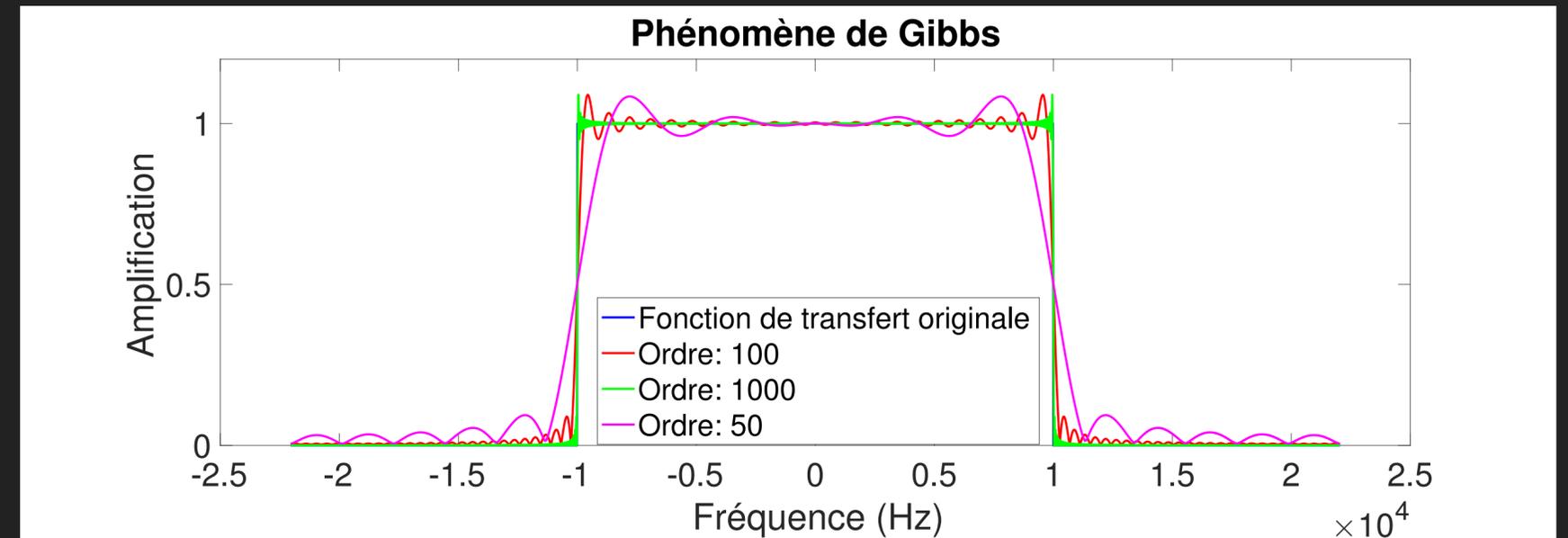
$$h_{trunc}^K[t] = \{2\nu_0 \text{sinc}[2\nu_0(-K/2 + 1)], \dots, 2\nu_0 \text{sinc}[K/2]\}$$

3. Translater h_{trunc}^K afin d'obtenir un filtre causal



SYNTHESE FIR: LIMITES

- ▶ Troncature et phénomène de Gibbs
- ▶ Solution: utiliser une fenêtre



- ▶ Les coefficients d'un passe-bas décroissent en $\frac{1}{n}$. Il faut faire 10^{10} opérations par seconde pour filtrer un signal échantillonné à 10 kHz avec une erreur de l'ordre 10^{-6} .
- ▶ Solution: utiliser des filtres récursifs (à réponse impulsionnelle infinie)

ANALYSE DES SYSTÈMES: TRANSFORMÉE EN Z

TRANSFORMÉE EN Z

- ▶ Soit $x[t]$ un signal numérique. La transformée en z de $x[t]$ est donnée par

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Définie sur sa couronne de convergence $R(z) = r_1 < |z| < r_2$

- ▶ **Une transformée en z est toujours associée à une couronne de convergence !**

TRANSFORMÉE EN Z : EXEMPLE

- ▶ Soit $\theta[t]$ le signal de Heaviside. Sa transformée en z est

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1}\end{aligned}$$

- ▶ Définie sur $R(z) = |z| > 1$

TRANSFORMÉE EN Z : EXEMPLE

- ▶ Soit $u[t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ le signal anti-Heaviside. Sa transformée en z est

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -z^{-k} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

- ▶ Définie sur $R(z) = |z| < 1$
- ▶ La seule différence avec le signal de Heaviside vient du domaine de convergence

TRANSFORMÉE EN Z ET CAUSALITÉ

Soit $x[t]$ un signal numérique et $X(z)$ sa transformée en z définie sur $R(z) = r_1 < |z| < r_2$.

- ▶ $x[t]$ est causal ssi $R(z) = r_1 < |z|$ (ie $r_2 = +\infty$)
- ▶ $x[t]$ est anti-causal ssi $R(z) = |z| < r_2$ (ie $r_1 = 0$)

TRANSFORMÉE EN Z ET STABILITÉ

Soit $x[t]$ un signal numérique et $X(z)$ sa transformée en z définie sur $R(z) = r_1 < |z| < r_2$.

- ▶ $x[t]$ est stable ssi $1 \in R(z)$ (ie $r_1 < 1$ et $r_2 > 1$)
- ▶ Si $x[t]$ est stable, alors il admet une transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$ et

$$\hat{x}(\nu) = X(e^{i2\pi\nu})$$

TRANSFORMÉE EN Z: PROPRIÉTÉS DE CALCULS

- ▶ Linéarité: $v[t] = au_1[t] + u_2[t]$

$$V(z) = aU_1(z) + U_2(z)$$

- ▶ Translation: $v[t] = u[t - k]$

$$V(z) = z^{-k}U(z)$$

- ▶ Convolution: soit $w[t] = (u * v)[t]$, alors

$$W(z) = U(z) V(z)$$

- ▶ Dérivation $v[t] = t^k u[t]$

$$V(z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k U(z)$$

- ▶ Changement d'échelle $v[t] = a^t u[t]$

$$V(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$$

TRANSFORMÉE EN Z ET FILTRAGE

- ▶ Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h[t]$. Alors

$$y[t] = (h * x)[t]$$

- ▶ Après transformée en z on a

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

- ▶ La transformée en z $H(z)$ de la réponse impulsionnelle est appelée **fonction de transfert** du filtre

FONCTION DE TRANSFERT

- ▶ Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h[t]$ et de fonction de transfert $H(z)$.

- ▶ Soit $x[t]$ un signal d'entrée causal de taille N , et $X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z^{-k}$ sa transformée en z

- ▶ Soit $y[t] = (h * x)[t]$ la réponse du filtre, et $Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]z^{-k}$ sa transformée en z

- ▶ Alors

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]z^{-k}}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}}$$

FILTRES IIR

FILTRES RÉCURSIFS

- ▶ On cherche $y[t]$ tel que

$$y[t] = \sum_{k=0}^M b[k]x[t-k] - \sum_{k=1}^N a[k]y[t-k]$$

- ▶ Le coefficient $y[t]$ dépend du signal d'entrée x , mais aussi des coefficients $y[n]$, $n < t$, déjà calculés
- ▶ On utilise deux filtres FIR $\{b[0], \dots, b[M]\}$ et $\{a[1], \dots, a[N]\}$
- ▶ Si l'équation de filtrage a une solution unique, alors c'est un filtre récursif.
- ▶ On suppose $M \leq N$
- ▶ N est l'**ordre** du filtre

FILTRES RÉCURSIFS: ANALYSE

- ▶ On cherche $y[t]$ tel que: $y[t] = \sum_{k=0}^M b[k]x[t-k] - \sum_{k=1}^N a[k]y[t-k]$
- ▶ On pose $a[0] = 1$: $y[t] = \sum_{k=0}^M b[k]x[t-k] - \sum_{k=1}^N a[k]y[t-k] \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a[k]y[t-k] = \sum_{k=0}^M b[k]x[t-k]$
- ▶ On prend la transformée en z de l'équation précédente: $Y(z) \sum_{k=0}^N a[k]z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b[k]z^{-k} \Leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$
- ▶ Avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a[k]z^{-k}}$

FILTRES RÉCURSIFS: ANALYSE

- ▶ On a $Y(z) = H(z)X(z)$, avec la fonction de transfert du filtre:
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^M a[k]z^{-k}}$$
- ▶ Si le dénominateur ne s'annule jamais pour $z \in R(z)$, alors le filtre de fonction de transfert H existe.
- ▶ La réponse impulsionnelle $h[t]$ s'obtient en inversant $H(z)$

FILTRES IIR: POLES ET ZÉROS

- ▶ On a $Y(z) = H(z)X(z)$, avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^M a[k]z^{-k}}$
- ▶ Zéros de $H(z)$: solutions de $\sum_{k=0}^M b[k]z^{-k} = 0$
- ▶ Pôles de $H(z)$: solutions de $\sum_{k=0}^N a[k]z^{-k} = 0$

FILTRES IIR: FONCTION DE TRANSFERT

- ▶ On a $Y(z) = H(z)X(z)$, avec la fonction de transfert du filtre: $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]z^{-k}}{\sum_{k=0}^M a[k]z^{-k}}$
- ▶ Le filtre est causal ssi $H(z)$ est défini pour tout $|z| > r$
- ▶ Le filtre est stable ssi $H(z)$ est défini pour $|z| = 1$
- ▶ Le filtre est réalisable ssi $H(z)$ est défini pour tout $|z| > r$, avec $r < 1$

CONCLUSION

EN BREF

- ▶ Filtres = systèmes linéaire invariant dans le temps (convolution !)
- ▶ Transformée en z : généralisation de la transformée de Fourier pour analyser les systèmes (y compris les systèmes non stables !)
- ▶ Filtres FIR
- ▶ Filtres IIR: filtres récursifs !
- ▶ Analyse d'un filtre IIR par sa transformée en z