COURS 4: SIGNAUX ALÉATOIRES

TRAITEMENT DU SIGNAL

DÉFINITIONS

SIGNAUX ALÉATOIRES

- Un signal aléatoire est un signal qui ne se reproduit pas à l'identique lors qu'on ré-itère une expérience dans les mêmes conditions.
- Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ un espace probabilisé et $\mathscr{L}(\Omega)$ l'espace des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$. Un signal aléatoire est une application

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\to \mathscr{L}(\Omega) \\ t &\mapsto X(t) \end{aligned}$$ Pour les signaux analogiques

$$\begin{aligned} X : \mathbb{Z}\mathbb{Z} &\to \mathscr{L}(\Omega) \\ t &\mapsto X[t] \end{aligned}$$ Pour les signaux numériques

- Par la suite on écrira $X(t)$ indifféremment pour les signaux aléatoires analogiques ou numériques
- Un signal aléatoire est un processus stochastique, c'est à dire une évolution d'une variable aléatoire en fonction du temps.
- Pour une réalisation d'un évènement $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X(\omega, t)$ s'appelle une trajectoire du signal aléatoire X.

SIGNAUX ALÉATOIRES

- Par la suite on écrira $X(t)$ indifféremment pour les signaux aléatoires analogiques ou numériques
- Un signal aléatoire est un ***processus stochastique***, c'est à dire une évolution d'une variable aléatoire en fonction du temps.
- Pour une réalisation d'un évènement $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X(\omega, t)$ s'appelle *une* ***trajectoire*** du signal aléatoire X.

DESCRIPTEURS

1ER ORDRE

- Espérance ou moyenne

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}\{X(t)\}$$

- $\mu_X(t)$ est un signal déterministe: c'est la trajectoire moyenne

2SD ORDRE

- Puissance instantanée

$$\mathrm{P}_X(t) = \mathrm{E}\{\,|X(t)|^2\,\}$$

- Variance

$$\mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}\{\,|X(t) - \mu_X(t)|^2\,\}$$

SIGNAL DU SECOND ORDRE

- Un signal aléatoire X est dit du second ordre si $\forall t \ \mathrm{E}\{\,|X(t)|^2\,\} < +\infty$.
- Il est uniformément du second ordre s'il existe $B > 0$ tel que $\forall t \ \mathrm{E}\{\,|X(t)|^2\,\} < B$.
- Un signal aléatoire analogique du second ordre est dit continue en moyenne d'ordre 2 lorsque

$$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{E}\{\,|X(t+\delta) - X(t)|^2\,\} = 0$$

AUTO/INTER-CORRÉLATION

- Soient X, Y deux signaux aléatoires réels. L'intercorrélation est donnée par

$$R_{XY}(t,s) = \mathrm{E}\{X(t)Y(s)\}$$

- Soit X un signal aléatoire réel. Son auto-corrélation est donnée par

$$R_X(t,s) = \mathrm{E}\{X(t)X(s)\}$$

SIGNAUX STATIONNAIRES ERGODIQUES

SIGNAUX STATIONNAIRES

Soit X un signal aléatoire.

- X est stationnaire au sens fort si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.
- X est stationnaire en moyenne d'ordre 2 (ou au sens large), si

$$\mu_X(t) = \mu_X \ \forall t$$

$$R_X(t+\tau, s+\tau) = R_X(t, s) = R_X(t-s, 0) = R_X(t-s)$$

- $\forall t, \ |R_X(t)| < R_X(0)$

SIGNAUX ERGODIQUES

- Un signal est ergodique ssi ses ***moyennes temporelles*** sont déterministes
- Un signal stationnaire est ergodique ssi pour toute fonction g

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(X(t))\ \mathrm{d}t = \mathrm{E}\{g(X(t))\}$$

- En particulier, la moyenne temporelle est la moyenne du processus

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)\ \mathrm{d}t = \mu_X$$

AUTOCORRELATION D'UN SIGNAL DU SECOND ORDRE ERGODIQUE

- Soit $X(t)$ un signal analogique aléatoire stationnaire ergodique du second ordre à valeur réel. Alors

$$\begin{aligned} R_X(t) &= \mathrm{E}\{X(s)X(s+t)\} \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(s)X(s+t)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

- Soit $X[t]$ un signal numérique aléatoire stationnaire ergodique du second ordre à valeur réel. Alors

$$\begin{aligned} R_X[t] &= \mathrm{E}\{X[n]X[n+t]\} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X[n]X[n+t] \end{aligned}$$

DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE

- Soit $X(t)$ un signal stationnaire, on peut définir sa densité spectrale de puissance comme

$$S_X(\nu) = \lim_{T\to+\infty} \mathrm{E}\left(|\hat{X}_T(\nu)|^2 \right)$$

Avec $\hat{X}_T(\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{T}} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i2\pi\nu t}\, \mathrm{d}t$ en analogique et $\hat{X}_T(\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{2T+1}} \displaystyle\sum_{t=-T}^{+T} X(t) e^{-i2\pi\nu t}$ en numérique

- En pratique, on utilise le théorème de Wiener-Khintchine

$S_X(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t) e^{-i2\pi\nu t}\, \mathrm{d}t$ en analogique et $S_X(\nu) = \displaystyle\sum_{t=-\infty}^{+\infty} R_X(t) e^{-i2\pi\nu t}$ en numérique

ie, la densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d’auto-corrélation

BRUIT BLANC

Soit $X(t)$ un signal aléatoire.

- X est un bruit blanc **au sens fort** ssi $\forall t$ les $X(t)$ sont centrés (ie de moyenne nulle) et iid (indépendants et identiquement distribués)
- X est un bruit blanc **au sens faible** ssi $\forall t$ les $X(t)$ sont centrés (ie de moyenne nulle), de variance finie et décorréllés
- Un bruit blanc est nécessairement stationnaire au sens large. Un bruit blanc fort est stationnaire sens fort.

BRUIT BLANC GAUSSIEN

Soit $X(t)$ un signal aléatoire.

- X est un bruit blanc **gaussien** ssi $\forall t$ les $X(t)$ sont iid avec $X(t) \sim \mathcal{N}(0,\sigma_X^2)$
- Un bruit blanc gaussien est un bruit blanc au sens fort
- L'autocorrélation d'un bruit blanc gaussien est un Dirac:

$$R_X(t) = \sigma_X^2 \delta(t)$$

- La densité spectrale de puissance d'un bruit blanc gaussien est constante:

$$S_X(\nu) = \sigma_X^2 \quad \forall \nu$$

FILTRAGE DES SIGNAUX NUMÉRIQUES ALÉATOIRES

FILTRAGE

- Soit un filtre numérique de RI $h[t]$ (déterministe !). Soit $X[t]$ un signal numérique aléatoire. Le filtrage de $X[t]$ par $h[t]$ donne le signal aléatoire $Y[t]$:

$$Y[t] = (h * X)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]X(t-k)$$

- Moyenne de $Y[t]$: $\mu_Y[t] = \mathrm{E}(Y[t]) = (h * \mu_X)[t]$

- Si $X[t]$ est un signal stationnaire, alors $Y[t]$ est aussi un signal stationnaire de moyenne et densité spectrale de puissance:

$$\mu_Y = h[0]\mu_X \text{ et } S_Y(\nu) = |\hat{h}(\nu)|^2 S_X(\nu)$$

CONCLUSION

EN BREF

- Signaux stationnaires (ergodiques)
- Densité spectrale de puissance et auto-corrélation (théorème de Wiener-Khintchine)
- Bruit blanc (gaussien)
- Filtrage des signaux aléatoires