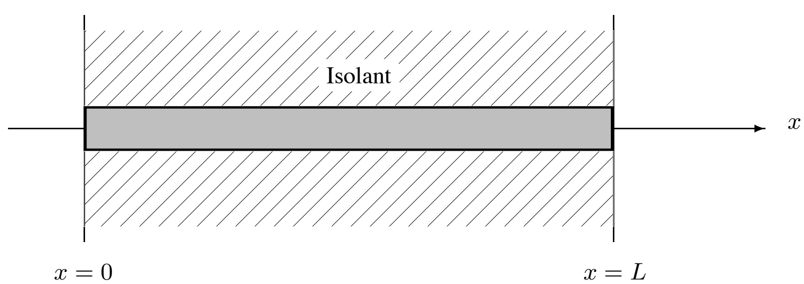
TD 1 – FOURIER

TABLE DES MATIÈRES

Exercice 1. — *Conduction de chaleur dans un milieu fini.*

Dans cet exercice on cherche à caractériser les phénomènes de propagation de chaleur dans un cylindre. Le cylindre est homogène, de longueur L, section S, densité ρ, capacité calorique C (par unité de masse) et conductivité thermique K. On note $T(x, t)$ la température du cylindre à l'instant t et à l'abscisse x, comme indiqué sur la figure suivante.



Les deux extrémités du cylindre baignent dans un milieu de température nulle i.e. on impose deux conditions aux limites : $T(0, t) = T(L, t) = 0$ à tout instant et ses parois latérales sont entourées d'un isolant parfait. Par ailleurs on se donne les conditions initiales ($t = 0$) de température : $T(x, 0) = T_0(x)$ une fonction donnée.

Le flux de chaleur à travers une « tranche » du cylindre est proportionnel à la différence de température entre les deux extrémités, proportionnel à la surface de la section du cylindre et inversement proportionnel à la longueur de la tranche de cylindre considérée. Le coefficient de proportionnalité est K, la conductivité thermique. En considérant les échanges thermiques à travers une mince tranche de cylindre, on montre que le flux de chaleur en x est relié à la température par :

(Eq :Chaleur 1) $$q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}\;.$$

c'est-à-dire que le flux est proportionnel au gradient de température et orienté dans le sens opposé à ce dernier.

Lorsqu'un élément du cylindre de masse m reçoit une quantité de chaleur ΔQ, sa température s'élève de ΔT, les deux quantités étant reliées par la relation classique de la thermodynamique : $\Delta Q = mC\Delta T$. En étudiant l'évolution d'une mince tranche de cylindre pendant une durée infiniment courte, on montre que la température et le flux de chaleur sont reliés par :

(Eq :Chaleur 2) $$\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}\;.$$

(1) Équation différentielle pour $T(x,t)$. Déduire de (Eq:Chaleur 1) et (Eq:Chaleur 2) que T vérifie l'équation différentielle suivante

(Eq :Chaleur 3) $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0\,,$$

avec $a^2 = K/\rho C$. Montrer que c'est une équation linéaire.

La suite de cet exercice est consacrée à la résolution de cette équation. On adopte la méthode dite de « séparation des variables » dûe à Bernoulli. Elle consiste à chercher les solution de (Eq:Chaleur 3) sous forme séparable $T(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$.

(2) Montrer qu'il existe nécessairement une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

(Eq :alpha) $$a^2\alpha''(x) = \lambda\alpha(x)$$

(Eq :beta) $$\beta'(t) = \lambda\beta(t)$$

(3) Résolution en α.

(a) Donner les conditions aux limites pour α.

(b) Résoudre (Eq:alpha). Montrer qu'on obtient des solutions non triviales uniquement si $\lambda < 0$ et plus précisément si :

$$\lambda = \lambda_k = -\left(k\frac{\pi a}{L}\right)^2\;.$$

(c) Représenter les solutions correspondantes $\alpha_k(x)$ pour $k = 1, 2$ et 3.

(4) Résoudre ensuite l'équation en β : déterminer les β_k solutions de (Eq:beta), pour les différentes valeurs de $\lambda = \lambda_k$. Représenter les solutions correspondantes $\beta(x)$ pour $k = 1, 2$ et 3.

(5) En déduire que les fonctions :

$$T(x,t) = \sum_k a_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\left(k\frac{a\pi}{L}\right)^2 t}$$

sont solutions de l'équation initiale (Eq:Chaleur 3).

(6) Utiliser les conditions initiales pour montrer que les a_k s'obtiennent comme coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction $\tilde{T}_0$ que l'on précisera.

(7) On s'intéresse pour terminer au cas particulier où la température initiale est uniforme sur l'ensemble du cylindre : $T_0(x) = T_0$ pour $x \in [0, L]$. Déterminer alors complètement $T(x,t)$.

Rappel :

— *Résolution des équations différentielles homogène d'ordre 1 à coefficients constants réels de la forme*

$$ay' + by = 0$$

Les solutions sont de la forme :

$$f(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x}$$

— *Résolution des équations différentielles homogène d'ordre 2 à coefficients constants réels de la forme*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On résout l'équation caractéristique associée :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

  — *Si $\Delta > 0$. L'équation caractéristique a deux solutions réelles λ_1 et λ_2. La solution est de la forme :*

  $$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

  où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles à déterminer par les conditions initiales.

  — *Si $\Delta = 0$. L'équation caractéristique a un solution réelle λ. La solution est de la forme :*

  $$f(x) = (Ax + B)e^{\lambda x}$$

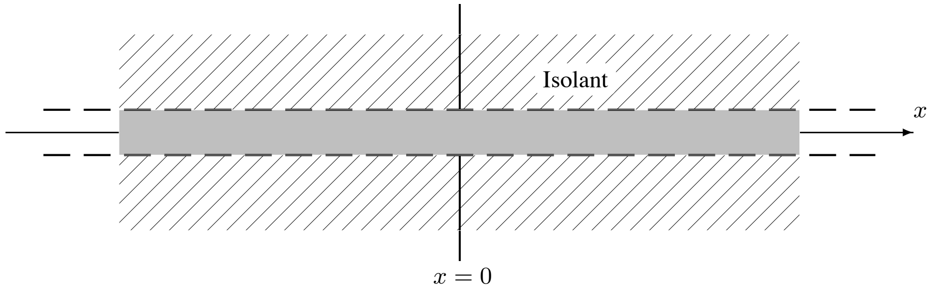
  où A et B sont deux constantes réels à déterminer par les conditions initiales.

  — *Si $\Delta < 0$. L'équation caractéristique ne possède pas de solution réelle, mais deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = u + iv$ et $\lambda_2 = u - iv$. La solution s'écrit alors*

  $$f(x) = qe^{ux}\cos(vx + r)$$

  où q et r sont deux constantes réelles à déterminer par les conditions initiales.

Exercice 2. — *Conduction de chaleur dans un milieu infini.*



Dans cet exercice on cherche à caractériser les phénomènes de propagation de chaleur dans un cylindre de longueur infinie. Le cylindre est homogène, de section S, densité ρ, capacité calorique C (par unité de masse) et conductivité thermique K. On note $T(x,t)$ la température du cylindre à l'instant t et à l'abscisse x, comme indiqué sur la figure suivante. Par ailleurs on impose des conditions initiales ($t = 0$) de température : $T(x, 0) = T_0(x)$ une fonction donnée.

Une étude physique du système permet de relier le flux de chaleur en x à la température par :

$$q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}\,. \tag{1}$$

où K est la conductivité thermique. Ainsi, le flux est proportionnel au gradient de température et orienté dans le sens opposé à ce dernier.

Lorsqu'un élément du cylindre de masse m reçoit une quantité de chaleur ΔQ, sa température s'élève de ΔT, les deux quantités étant reliées par la relation classique de la thermodynamique : $\Delta Q = mC\Delta T$. En étudiant l'évolution d'une mince tranche de cylindre pendant une courte durée, on montre que la température et le flux de chaleur sont reliés par :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}\,. \tag{2}$$

On suppose que cette équation possède une solution T telle qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ qui vérifie

— $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$
— $\forall t\ |T(x,t)| \leq g(x)$,
— $\forall t\ |\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}(x,t)| \leq g(x)$
— $\forall t\ |\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}(x,t)| \leq g(x)$

(1) Déduisez de (1) et (2) que T vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0\,,$$

avec $a^2 = K/\rho C$. Montrez que c'est une équation linéaire.

La suite de cet exercice est consacrée à la résolution de cette équation en passant dans le domaine de Fourier. La transformée de Fourier de $T(x,t)$ par rapport <u>à la variable x</u> est une fonction de la fréquence f, qui dépend aussi du temps, que l'on note : $\hat{T}(\xi,t)$.

(2) Équation différentielle en $\hat{T}$.

(a) En utilisant les formules de « transformée de Fourier et dérivation », déterminer les transformées de Fourier de $\frac{\partial T}{\partial x}$ et de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, en fonction de $\hat{T}$.

(b) Montrer que

$$\widehat{\frac{\partial T}{\partial t}}(\xi, t) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi, t)$$

En dérivant la relation de transformée de Fourier reliant T en $\hat{T}$ sous le signe $\int$, calculez la transformée de Fourier de $\frac{\partial T}{\partial t}$.

(c) Déduisez de ce qui précède une équation différentielle simple pour $\hat{T}(\xi, t)$. Donnez également les conditions initiales pour $\hat{T}$ (on notera $\hat{T}_0$ la transformée de Fourier de T_0).

(d) Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus et montrez que la solution se met sous la forme du produit de $\hat{T}_0(f)$ par une fonction $\Pi(\xi, t)$ que l'on précisera :

$$\hat{T}(\xi, t) = \hat{T}_0(\xi)\, \Pi(\xi, t)\, .$$

(3) En revenant dans le domaine spatial, i.e. par transformée de Fourier inverse, montrez que la température recherchée $T(x, t)$ s'écrit comme la convolution (par rapport à la variable x) de la température initiale $T_0(x)$ par une fonction $P(x, t)$ que l'on explicitera complètement et que l'on étudiera sommairement. Montrez par ailleurs que $P(x, t)$ est elle-même une solution de l'équation d'origine (1).

Exercice 3. — *Transformée de Fourier des gaussiennes.*

Dans cet exercice on détermine la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$g_{\tau\sigma}(t) = e^{-\pi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On admettra le résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\ dx = 1\ . \tag{3}$$

Dans un premier temps on s'intéresse à la gaussienne centrée réduite $g = g_{01}$.

(1) Montrez simplement que sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{g}(\nu) = 2\int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi\nu t)\ \mathrm{d}t\ .$$

(2) En dérivant sous le signe intégrale par rapport à la fréquence puis en intégrant par partie, déterminez une équation différentielle simple en $\hat{g}(\nu)$.

(3) Résolvez l'équation différentielle et déterminez les constantes d'intégration en utilisant la relation (3).

(4) Déterminez finalement la transformée de Fourier $\hat{g}_{\tau\sigma}$ de $g_{\tau\sigma}$.

(5) Comparez les largeurs de $\hat{g}_{\tau\sigma}$ et de $g_{\tau\sigma}$ et commentez.

Exercice 4. — *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Le but de cet exercice est de démontrer le principe d'incertitude d'Heisenberg, qu'on peut énoncer dans le théorème suivant

Théorème 1 (Inégalités d'Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$. On pose*

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|\mathrm{d}\,t \ , \ \mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{f}(\xi)|\mathrm{d}\,\xi$$

et

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu_f)^2|f(t)|^2\mathrm{d}\,t \ , \ \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\mu_{\hat{f}})^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\,\xi$$

Alors

$$\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi} \ ,$$

avec égalité ssi f est de la forme

$$f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d} \ .$$

Les nombres μ_f et $\mu_{\hat{f}}$ mesurent respectivement le temps central et la fréquence centrale du signal f. Les nombres σ_f et $\sigma_{\hat{f}}$ mesurent alors l'étalement, ou la dispersion, temporel et spectral. Ce théorème nous dit qu'un signal ne peut avoir à la fois un étalement temporel faible **et** un étalement spectral faible.

On suppose bien entendu que $\sigma_f < +\infty$ et $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$, sinon l'inégalité est trivialement satisfaite.

(1) On commence par supposer que $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$.

  (a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)|^2\mathrm{d}\,t$$

  (b) En déduire que

$$\|f\|^2 \leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2\mathrm{d}\,t\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2\mathrm{d}\,t}$$

  (c) En utilisant la relation entre la transformée de Fourier et la dérivation, conclure sur l'inégalité d'Heisenberg dans le cas $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$

(2) Montrer le cas général en appliquant une translation et une modulation adéquat à la fonction f, de sorte a appliquer le résultat précédent.

(3) Enfin, montrer que l'égalité est atteinte ssi $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice "transformée de Fourier d'une gaussienne".

Exercice 5. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps continu).*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique observé sur un horizon fini c'est-à-dire sur une durée finie. Pour cela on définit le signal « porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; +T/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-T/2; +T/2] \end{cases}$$

où T est un réel positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence f_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_T(t) = e^{i2\pi f_0 t}\, \Pi_T(t)\,.$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_1(\nu)$, la transformée de Fourier de $\Pi_1(t)$. On pourra introduire la fonction *sinus cardinal* définie par $\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$. Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_1(f)$ en détail.

(2) En déduire la valeur des deux intégrales de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

(3) En exploitant les relations « transformée de Fourier et dilatation du temps » déterminez la transformée de Fourier $\hat{\Pi}_T(\nu)$ du signal porte général $\hat{\Pi}_T(t)$.

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_T(\nu)$ du signal $x_T(t)$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur T de la porte considérée et notamment le comportement lorsque $T \to \infty$.

Exercice 6. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps discret).*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique à temsp discret observé sur une durée finie. Pour cela on définit le « signal porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-N; +N] \\ 0 & \text{si } t \notin [-N; +N] \end{cases}$$

où N est un entier positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence ν_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_N(n) = e^{2i\pi\nu_0 n}\, \Pi_N(n)\ .$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_N(\nu)$ la transformée de Fourier de $\Pi_N(n)$. On pourra introduire le *noyau de Dirichlet* défini par $\mathrm{Dir}_N(u) = \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(\pi u)}$.

(2) Vérifiez les propriétés de symétries de $\hat{\Pi}_N(\nu)$. Vérifiez que $\hat{\Pi}_N(\nu)$ est bien 1-périodique. Vérifiez également que :

$$\hat{\Pi}_N(0) = \sum_{\mathbb{Z}} \Pi_N(n)\,.$$

et donner :

$$\int_0^1 \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\,\mathrm{d}\nu\ .$$

(3) Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_N(\nu)$ en détail.

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_N(\nu)$ du signal $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur de la porte considérée et notamment le comportement lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 7. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles.*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha\,|t|}\,, t \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0\ ,$$

ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

(1) Calculer $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.

(2) Vérifier les propriétés de symétrie de X. Vérifiez également que :

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\,\mathrm{d}\nu \text{ et } \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\mathrm{d}t$$

et calculer ces quantités.

(3) Calculer Δt et $\Delta\nu$ les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $\hat{x}(\nu)$.

Exercice 8. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x(n) = \alpha^{|n|}\,, n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1,1[\ , \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

(2) Vérifiez les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{\mathbb{Z}} x(n)\,.$$

(3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, ... ?

(4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?