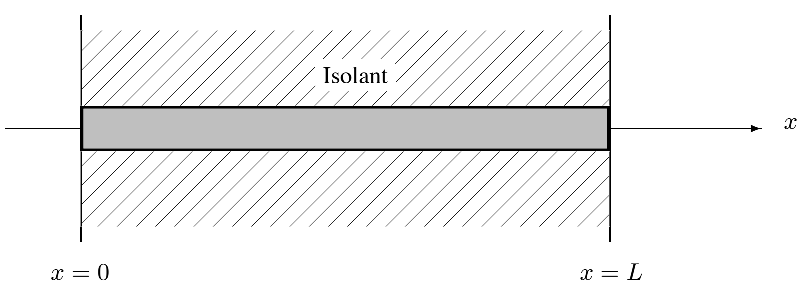
TD 1 – FOURIER

Table des matières

Exercice 1. — *Conduction de chaleur dans un milieu fini.*

Dans cet exercice on cherche à caractériser les phénomènes de propagation de chaleur dans un cylindre. Le cylindre est homogène, de longueur L, section S, densité ρ, capacité calorique C (par unité de masse) et conductivité thermique K. On note $T(x,t)$ la température du cylindre à l'instant t et à l'abscisse x, comme indiqué sur la figure suivante.



Les deux extrémités du cylindre baignent dans un milieu de température nulle i.e. on impose deux conditions aux limites : $T(0,t) = T(L,t) = 0$ à tout instant et ses parois latérales sont entourées d'un isolant parfait. Par ailleurs on se donne les conditions initiales ($t = 0$) de température : $T(x,0) = T_0(x)$ une fonction donnée.

Le flux de chaleur à travers une « tranche » du cylindre est proportionnel à la différence de température entre les deux extrémités, proportionnel à la surface de la section du cylindre et inversement proportionnel à la longueur de la tranche de cylindre considérée. Le coefficient de proportionnalité est K, la conductivité thermique. En considérant les échanges thermiques à travers une mince tranche de cylindre, on montre que le flux de chaleur en x est relié à la température par :

(Eq :Chaleur 1)
$$q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}\,.$$

c'est-à-dire que le flux est proportionnel au gradient de température et orienté dans le sens opposé à ce dernier.

Lorsqu'un élément du cylindre de masse m reçoit une quantité de chaleur ΔQ, sa température s'élève de ΔT, les deux quantités étant reliées par la relation classique de la thermodynamique : $\Delta Q = mC\Delta T$. En étudiant l'évolution d'une mince tranche de cylindre pendant une durée infiniment courte, on montre que la température et le flux de chaleur sont reliés par :

(Eq :Chaleur 2)
$$\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

(1) Équation différentielle pour $T(x,t)$. Déduire de (Eq:Chaleur 1) et (Eq:Chaleur 2) que T vérifie l'équation différentielle suivante

(Eq :Chaleur 3)
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0\,,$$

avec $a^2 = K/\rho C$. Montrer que c'est une équation linéaire.

On a $q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}$. Donc
$$\frac{\partial q}{\partial x} = -KS\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
et donc, comme $\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}$, on a
$$-KS\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}$$
i.e.
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{K}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

La suite de cet exercice est consacrée à la résolution de cette équation. On adopte la méthode dite de « séparation des variables » dûe à Bernoulli. Elle consiste à chercher les solution de (Eq:Chaleur 3) sous forme séparable $T(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$.

(2) Montrer qu'il existe nécessairement une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

(Eq :alpha)
$$a^2\alpha''(x) = \lambda\alpha(x)$$
(Eq :beta)
$$\beta'(t) = \lambda\beta(t)$$

Soit $T(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$. On a
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \beta(t)\alpha''(x) \text{ et } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(x)\beta'(t)$$

donc (pour $\beta(t) \neq 0$)

$$a^2\beta(t)\alpha''(x) = \alpha(x)\beta'(t) \text{ i.e. } a^2\alpha''(x) = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\alpha(x)$$

et nécessairement on a $\beta'(t) = \lambda_\beta \beta(t), \lambda_\beta \in \mathbb{R}$. Avec le même raisonnement on arrive à $a^2\alpha''(x) = \lambda_\alpha \alpha(x), \lambda_\alpha \in \mathbb{R}$. On voit de suite que nécessairement $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$.

(3) Résolution en α.

(a) Donner les conditions aux limites pour α.

$T(0,t) = T(L,t) = 0 = \alpha(0)\beta(t) = \alpha(L)\beta(t)\ \forall t$. Donc

$$\alpha(0) = \alpha(L) = 0$$

(b) Résoudre (Eq:alpha). Montrer qu'on obtient des solutions non triviales uniquement si $\lambda < 0$ et plus précisément si :

$$\lambda = \lambda_k = -\left(k\frac{\pi a}{L}\right)^2 .$$

L'équation différentielle (Eq:alpha) est linéaire, du second ordre, à coefficients constants. On a $\Delta = 4a^2\lambda$.

— $\Delta > 0$. Les solutions sont de la forme $C_1 e^{2a\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{2a\sqrt{\lambda}x}$. Les conditions initiales donnent $C_1 = C_2 = 0$

— $\Delta = 0$. Les solutions sont de la forme $(Ax + B)e^{2a\sqrt{\lambda}x}$. Les conditions initiales donnent $A = B = 0$

— $\Delta < 0$. Les solutions sont de la forme $q\cos\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{a}x + r\right)$. Les conditions initiales ne donnent pas une solution triviale ici. De plus, $\Delta < 0$ ssi $\lambda < 0$.

Plus précisément, on a

$$\alpha(0) = 0 = q\cos(r) \text{ et } \alpha(L) = 0 = q\cos\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{a}L + r\right)$$

Si $q \neq 0$ (solution non triviale), alors $r = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$q\cos\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{a}L + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{|\lambda|}}{a}L + (2k+1)\frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}L = k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ afin d'assurer la positivité}$$

et donc

$$\lambda = -\left(k\frac{\pi a}{L}\right)^2, \ k \in \mathbb{N}^*$$

(c) Représenter les solutions correspondantes $\alpha_k(x)$ pour $k = 1, 2$ et 3.
$q\cos\left(k\frac{\pi}{L}x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k q\sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right)$
Puis il suffit de savoir représenter des sinus a différentes fréquences...

(4) Résoudre ensuite l'équation en β : déterminer les β_k solutions de (Eq:beta), pour les différentes valeurs de $\lambda = \lambda_k$. Représenter les solutions correspondantes $\beta(x)$ pour $k = 1, 2$ et 3.

Il suffit de résoudre une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants. Les solutions sont donc de la forme

$$\beta(t) = Ae^{\lambda_k t} = Ae^{-\left(k\frac{\pi a}{L}\right)^2 t}$$

(5) En déduire que les fonctions :

$$T(x,t) = \sum_k a_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\left(k\frac{a\pi}{L}\right)^2 t}$$

sont solutions de l'équation initiale (Eq:Chaleur 3).

Pour tout k, les

$$T_k(x,t) = \alpha_k(x)\beta_k(t) = (-1)^k q\sin\left(k\pi/Lx\right) Ae^{-\left(k\frac{\pi a}{L}\right)^2 t}$$

sont solutions de (Eq:Chaleur 3). Donc, toutes combinaisons linéaires de ces solutions est toujours solution de (Eq:Chaleur 3). Ainsi les fonctions

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\left(k\frac{a\pi}{L}\right)^2 t},\ a_k \in \mathbb{R}$$

sont solutions de (Eq:Chaleur 3)

(6) Utiliser les conditions initiales pour montrer que les a_k s'obtiennent comme coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction $\tilde{T}_0$ que l'on précisera.

On rappelle les conditions initiales : $T(0,t) = T(L,t) = 0$ et $T(x,0) = T_0(x)$. Donc

$$T_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right)$$

En posant $\tilde{T}_0(x) = T_0(x)$ sur $[0, L]$, et $\tilde{T}_0(x) = -T_0(x)$ sur $[-L, 0]$, de sorte que $\tilde{T}_0$ soit impaire, puis en périodisant de période $2L$, on reconnait les a_k comme coefficient du développement en série de Fourier de $\tilde{T}_0$.

(7) On s'intéresse pour terminer au cas particulier où la température initiale est uniforme sur l'ensemble du cylindre : $T_0(x) = T_0$ pour $x \in [0, L]$. Déterminer alors complètement $T(x,t)$.

On a alors

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{2L}\int_0^L T_0 \sin\left(\frac{2\pi}{2L}kx\right) \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{T_0}{k\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{L}kx\right)\right]_0^L \\ &= \frac{T_0}{k\pi}((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

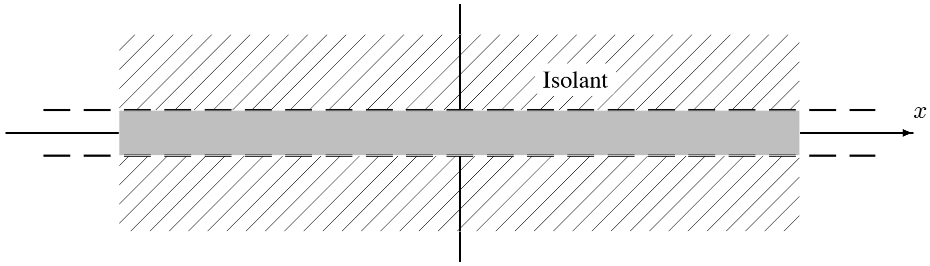
et donc

$$a_{2p} = 0$$
$$a_{2p+1} = -\frac{-2T_0}{(2p+1)\pi}$$

Rappel :

- *Résolution des équations différentielles homogène d'ordre 1 à coefficients constants réels de la forme*
$$ay' + by = 0$$
Les solutions sont de la forme :
$$f(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x}$$
- *Résolution des équations différentielles homogène d'ordre 2 à coefficients constants réels de la forme*
$$ay'' + by' + cy = 0$$
On résout l'équation caractéristique associée :
$$ax^2 + bx + c = 0$$
  - *Si* $\Delta > 0$*. L'équation caractéristique a deux solutions réelles* λ_1 *et* λ_2*. La solution est de la forme :*
$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
où C_1 *et* C_2 *sont deux constantes réelles à déterminer par les conditions initiales.*
  - *Si* $\Delta = 0$*. L'équation caractéristique a un solution réelle* λ*. La solution est de la forme :*
$$f(x) = (Ax + B)e^{\lambda x}$$
où A *et* B *sont deux constantes réels à déterminer par les conditions initiales.*
  - *Si* $\Delta < 0$*. L'équation caractéristique ne possède pas de solution réelle, mais deux solutions complexes conjuguées* $\lambda_1 = u + iv$ *et* $\lambda_2 = u - iv$*. La solution s'écrit alors*
$$f(x) = qe^{ux}\cos(vx + r)$$
où q *et* r *sont deux constantes réelles à déterminer par les conditions initiales.*

Exercice 2. — *Conduction de chaleur dans un milieu infini.*



Dans cet exercice on cherche à caractériser les phénomènes de propagation de chaleur dans un cylindre de longueur infinie. Le cylindre est homogène, de section S, densité ρ, capacité calorique C (par unité de masse) et conductivité thermique K. On note $T(x,t)$ la température du cylindre à l'instant t et à l'abscisse x, comme indiqué sur la figure suivante. Par ailleurs on impose des conditions initiales ($t = 0$) de température : $T(x, 0) = T_0(x)$ une fonction donnée.

Une étude physique du système permet de relier le flux de chaleur en x à la température par :

$$q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}\,. \tag{1}$$

où K est la conductivité thermique. Ainsi, le flux est proportionnel au gradient de température et orienté dans le sens opposé à ce dernier.

Lorsqu'un élément du cylindre de masse m reçoit une quantité de chaleur ΔQ, sa température s'élève de ΔT, les deux quantités étant reliées par la relation classique de la thermodynamique : $\Delta Q = mC\Delta T$. En étudiant l'évolution d'une mince tranche de cylindre pendant une courte durée, on montre que la température et le flux de chaleur sont reliés par :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}\,. \tag{2}$$

On suppose que cette équation possède une solution T telle qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ qui vérifie

— $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$
— $\forall t\ |T(x,t)| \leq g(x)$,
— $\forall t\ |\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}(x,t)| \leq g(x)$
— $\forall t\ |\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}(x,t)| \leq g(x)$

(1) Déduisez de (1) et (2) que T vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = 0\,,$$

avec $a^2 = K/\rho C$. Montrez que c'est une équation linéaire.

On a $q(x) = -KS\,\frac{\partial T}{\partial x}$ donc $\frac{dq}{dx} = -KS\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.
Or $\frac{\partial q}{\partial x} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}$. Donc

$$-KS\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -S\rho C\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

ie.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho C}{K}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire du second ordre a coefficients constants.

La suite de cet exercice est consacrée à la résolution de cette équation en passant dans le domaine de Fourier. La transformée de Fourier de $T(x,t)$ par rapport <u>à la variable x</u> est une fonction de la fréquence f, qui dépend aussi du temps, que l'on note : $\hat{T}(\xi,t)$.

(2) Équation différentielle en $\hat{T}$.

(a) En utilisant les formules de « transformée de Fourier et dérivation », déterminer les transformées de Fourier de $\frac{\partial T}{\partial x}$ et de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, en fonction de $\hat{T}$.

$$\widehat{\frac{\partial T}{\partial x}}(\xi,t) = i\xi\hat{T}(\xi,t)$$

et

$$\widehat{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}(\xi,t) = -\xi^2\hat{T}(\xi,t)$$

(b) Montrer que

$$\widehat{\frac{\partial T}{\partial t}}(\xi,t) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi,t)$$

En dérivant la relation de transformée de Fourier reliant T en $\hat{T}$ sous le signe $\int$, calculez la transformée de Fourier de $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Par définition de la transformée de Fourier, on a

$$\hat{T}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} T(x,t)e^{-i2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\,x$$

et

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} T(x,t)e^{-i2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\,x$$

On peut intervertir dérivée et intégrale, donc

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}T(x,t)e^{-i2\pi\xi x}\,\mathrm{d}\,x = \widehat{\frac{\partial T}{\partial t}}(\xi,t)$$

(c) Déduisez de ce qui précède une équation différentielle simple pour $\hat{T}(\xi,t)$. Donnez également les conditions initiales pour $\hat{T}$ (on notera $\hat{T}_0$ la transformée de Fourier de T_0).

On applique la transformée de Fourier à l'equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho C}{K}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

avec

$$\widehat{\frac{\partial T}{\partial t}}(\xi,t) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi,t) \quad \text{et} \quad \widehat{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}(\xi,t) = -\xi^2\hat{T}(\xi,t)$$

on obtient

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 \frac{\rho C}{K} \hat{T}(\xi, t)$$

ie

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\xi, t) + f^2 \frac{\rho C}{K} \hat{T}(\xi, t) = 0$$

Conditions initiales :

$$\hat{T}(0, t) = \int_{\mathbb{R}} T(x, t) \mathrm{d}\, t$$

$$\hat{T}(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} T(x, 0) e^{-i2\pi\xi x} \mathrm{d}\, x = \hat{T}_0(\xi)$$

(d) Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus et montrez que la solution se met sous la forme du produit de $\hat{T}_0(f)$ par une fonction $\Pi(\xi, t)$ que l'on précisera :

$$\hat{T}(\xi, t) = \hat{T}_0(\xi)\, \Pi(\xi, t)\,.$$

Comme c'est une équation différentielle du premier ordre a coefficients constants (en la variable de température t !), on a

$$\hat{T}(\xi, t) = \lambda e^{-f^2 \frac{\rho C}{K} t},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

En utilisant la condition initiale $\hat{T}(\xi, 0) = \hat{T}_0(\xi)$, on obtient

$$\hat{T}(\xi, t) = \hat{T}_0(f)\Pi(\xi, t) \text{ avec } \Pi(\xi, t) = e^{-f^2 \frac{\rho C}{K} t}$$

(3) En revenant dans le domaine spatial, i.e. par transformée de Fourier inverse, montrez que la température recherchée $T(x, t)$ s'écrit comme la convolution (par rapport à la variable x) de la température initiale $T_0(x)$ par une fonction $P(x, t)$ que l'on explicitera complètement et que l'on étudiera sommairement. Montrez par ailleurs que $P(x, t)$ est elle-même une solution de l'équation d'origine (1).

On revient dans le domaine spatial par transformée de Fourier inverse. En utilisant la propriété convolution et transformée de Fourier, on obtient

$$T(x, t) = T_0(f) \star P(x, t)$$

où $P(x, t)$ est la transformée de Fourier inverse de $\Pi(\xi, t)$ qui est une fonction gaussienne. On obtient donc

$$P(x, t) = \sqrt{2\pi \frac{K}{\rho C}} e^{-2\pi^2 \frac{K}{\rho C t} x^2}$$

On a de plus

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \sqrt{2\pi \frac{K}{\rho C}} \left(2\pi^2 \frac{K}{\rho C t} 2x \right)^2 e^{-2\pi^2 \frac{K}{\rho C t} x^2}$$

et

$$\frac{K}{\rho C} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{K}{\rho C} \sqrt{2\pi \frac{K}{\rho C}} \left(2\pi^2 \frac{K}{\rho C} x^2 \right) \frac{1}{t^2}$$

$P(x,t)$ est donc bien solution de l'equation différentielle (1)

Exercice 3. — *Transformée de Fourier des gaussiennes.*

Dans cet exercice on détermine la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$g_{\tau\sigma}(t) = e^{-\pi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On admettra le résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\ dx = 1\ . \tag{3}$$

Dans un premier temps on s'intéresse à la gaussienne centrée réduite $g = g_{01}$.

(1) Montrez simplement que sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{g}(\nu) = 2\int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi\nu t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Exprimons la transformée de Fourier $\hat{g}(\nu)$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose $t' = -t$ dans la première intégrale.

$$\begin{aligned}\hat{g}(\nu) &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t'^2} e^{2i\pi\nu t'}\ \mathrm{d}t' + \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} (e^{2i\pi\nu t'} + e^{-2i\pi\nu t})\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2i\pi\nu t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

(2) En dérivant sous le signe intégrale par rapport à la fréquence puis en intégrant par partie, déterminez une équation différentielle simple en $\hat{g}(\nu)$.

Exprimons $\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\cos(2\pi\nu t)\right)\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} - 2\pi t \sin(2\pi\nu t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Intégrons par partie on pose $u' = -2\pi t e^{-\pi t^2}$ et $v = \sin(2\pi\nu t)$. En déduit $u = e^{-\pi t^2}$ et $v = 2\pi\nu\cos(2\pi\nu t)$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= 2\left[e^{-\pi t^2}\sin(2\pi\nu t)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} 2\pi\nu\cos(2\pi\nu t)\ \mathrm{d}t \\ &= -2\pi\nu\hat{g}(\nu)\end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} + 2\pi\nu\hat{g}(\nu) = 0$$

(3) Résolvez l'équation différentielle et déterminez les constantes d'intégration en utilisant la relation (3).

Résolvons cette équation différentielle en supposant que $\hat{g}(\nu) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} + 2\pi\nu\hat{g}(\nu) = 0& \\ \frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} &= -2\pi\nu\hat{g}(\nu) \\ \frac{\mathrm{d}\hat{g}(\nu)}{G(\nu)} &= -2\pi\nu\ \mathrm{d}\nu \\ \log(\hat{g}(\nu)) &= -\pi\nu^2 + Cst \\ \hat{g}(\nu) &= Ke^{-\pi\nu^2}\end{aligned}$$

On vérifie bien que $\hat{g}(\nu) \neq 0,\ \forall\nu\in\mathbb{R}$. Pour déterminer K on utilise notre connaissance de $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\ \mathrm{d}t = 1$. On en déduit immédiatemtn que $K = 1$. On obtient finallement

$$\hat{g}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$$

(4) Déterminez finalement la transformée de Fourier $\hat{g}_{\tau\sigma}$ de $g_{\tau\sigma}$.

Déterminons $\hat{g}_{\tau\sigma}$ en utilisant les propriétées de dilatation et de décalage de la transformée de Fourier, mais profitons en pour les redémontrer.

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\tau\sigma}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} g_{\tau\sigma}(t)e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_{01}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)e^{-2i\pi\nu t}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $t' = \frac{t-\tau}{\sigma}$ le Jacobien du changement de variable est égale à $\frac{1}{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\tau\sigma}(\nu) &= \frac{1}{\sigma}\int_{\mathbb{R}} g_{01}(t')e^{-2i\pi\nu(\sigma t'+\tau)}\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{e^{-2i\pi\nu\tau}}{\sigma}\int_{\mathbb{R}} g_{01}(t')e^{-2i\pi\nu\sigma t'}\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{e^{-2i\pi\nu\tau}}{\sigma}\hat{g}(\sigma\nu) \\
&= \frac{e^{-2i\pi\nu\tau}}{\sigma}e^{-\pi\sigma^2\nu^2}
\end{aligned}$$

(5) Comparez les largeurs de $\hat{g}_{\tau\sigma}$ et de $g_{\tau\sigma}$ et commentez.

Les largeur à mi-hauteur sont inversement proportionelles ce qui est cohérent avec la propriété de dilatation/contraction de la transformée de Fourier.

Exercice 4. — *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Le but de cet exercice est de démontrer le principe d'incertitude d'Heisenberg, qu'on peut énoncer dans le théorème suivant

Théorème 1 (Inégalités d'Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$. On pose*

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|\mathrm{d}\,t\ ,\ \mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{f}(\xi)|\mathrm{d}\,\xi$$

et

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu_f)^2|f(t)|^2\mathrm{d}\,t\ ,\ \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\mu_{\hat{f}})^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\,\xi$$

Alors

$$\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}\ ,$$

avec égalité ssi f est de la forme

$$f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}\ .$$

Les nombres μ_f et $\mu_{\hat{f}}$ mesurent respectivement le temps central et la fréquence centrale du signal f. Les nombres σ_f et $\sigma_{\hat{f}}$ mesurent alors l'étalement, ou la dispersion, temporel et spectral. Ce théorème nous dit qu'un signal ne peut avoir à la fois un étalement temporel faible **et** un étalement spectral faible.

On suppose bien entendu que $\sigma_f < +\infty$ et $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$, sinon l'inégalité est trivialement satisfaite.

(1) On commence par supposer que $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$.

(a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)|^2\mathrm{d}\,t$$

Une intégration par partie sur le deuxième terme donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{d}{dt}|f(t)|^2 \mathrm{d}\,t = [t|f(t)|^2]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}\,t$$

Comme $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\,\xi < +\infty$, on a $f' \in L^2(\mathbb{R})$. En effet, le théorème de Parseval implique que $\|f'\|^2 = \|\widehat{f'}\|^2$, et l'on a $\widehat{f'}(\xi) = i2\pi\xi\hat{f}(\xi)$.

Reste à montrer que $\lim_{t\to\pm\infty} t|f(t)|^2 = 0$. Supposons que $\lim_{t\to+\infty} t|f(t)|^2 = \ell$, $\ell \neq 0$. Alors, quand $t \to +\infty$, on a $|f(t)|^2 \sim \ell/t$ ce qui est incompatible avec $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que

$$\|f\|^2 \leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2 \mathrm{d}\,t \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 \mathrm{d}\,t}$$

En prenant la valeur absolue dans l'égalité précédente, après avoir remarqué que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)|^2 = f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)}$, on a

$$\|f\|^2 \leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\overline{f'(t)}\mathrm{d}\,t\right| + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} tf'(t)\overline{f(t)}\mathrm{d}\,t\right|$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Swartz aux deux termes et l'on obtient l'inégalité voulue.

(c) En utilisant la relation entre la transformée de Fourier et la dérivation, conclure sur l'inégalité d'Heisenberg dans le cas $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$

On a $\widehat{f'}(\xi) = i2\pi\xi\hat{f}(\xi)$. En appliquant le théorème de Plancherel-Parseval on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 \mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\xi^2|\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\,\xi = 4\pi^2\|\hat{f}\|^2\sigma_{\hat{f}}^2$$

Finalement, en reprenant l'inégalité montrée en (1.b), on a (sachant que $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$)

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\leq 2\sqrt{4\pi^2\|f\|^2\sigma_f^2\|f\|^2\sigma_{\hat{f}}^2} \\ &\leq 4\pi\|f\|^2\sigma_f\sigma_{\hat{f}}\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

(2) Montrer le cas général en appliquant une translation et une modulation adéquat à la fonction f, de sorte a appliquer le résultat précédent.

On considère la fonction g définie par

$$g(t) = e^{-i\mu_{\hat{f}}t} f(t + \mu_f) \ .$$

Les relations entre transformée de Fourier et translation et modulation donnent bien $\mu_g = \mu_{\hat{g}} = 0$. De plus, on a $\|g\| = \|f\|$ et

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\|g\|} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t+\mu_f)|^2 \mathrm{d}\,t = \sigma_f^2$$

et
$$\sigma_{\hat{g}}^2 = \frac{1}{\|g\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(t+\mu_{\hat{f}})|^2 \mathrm{d}\, t = \sigma_{\hat{f}}^2$$

(3) Enfin, montrer que l'égalité est atteinte ssi $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice "transformée de Fourier d'une gaussienne".

La démonstration du sens réciproque est facile. Soit $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}$. On reconnait une fonction de type "Gaussienne" modulée. Les résultats sur la transformée de Fourier d'une gaussienne permettent de conclure directement que $\sigma_f \sigma_{\hat{f}} = \frac{1}{4\pi}$.

Pour le sens direct, il faut regarder quand on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Swartz. Cette égalité a lieu ssi
$$tf(t) = K\overline{f'(t}$$
qui est une équation différentielle (qu'on peut résoudre en séparant partie réelle et imaginaire). On trouve alors la solution attendue.

Exercice 5. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps continu).*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique observé sur un horizon fini c'est-à-dire sur une durée finie. Pour cela on définit le signal « porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :
$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; +T/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-T/2; +T/2] \end{cases}$$
où T est un réel positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence f_0 multiplié par le signal porte précédent :
$$x_T(t) = e^{i2\pi f_0 t}\, \Pi_T(t)\,.$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_1(\nu)$, la transformée de Fourier de $\Pi_1(t)$. On pourra introduire la fonction *sinus cardinal* définie par $\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$. Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_1(f)$ en détail.

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_1(t) e^{-i2\pi t\nu}\ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi t\nu}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{-i2\pi\nu} e^{-i2\pi t\nu}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}}{i2\pi\nu} \\ &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \\ &= \mathrm{sinc}(\nu) \end{aligned}$$

sinc est une fonction paire, avec $\mathrm{sinc}(0) = 1$ et qui s'annule pour $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. On a $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty} \mathrm{sinc}(\nu) = 0$.

$$\hat{\Pi}_1'(\nu) = \frac{\cos(\pi\nu)\pi^2\nu - \sin(\pi\nu)\pi}{\pi^2\nu^2} = \frac{\cos(\pi\nu)\pi\nu - \sin(\pi\nu)}{\pi\nu^2}$$
$$\hat{\Pi}_1'(\nu) = 0 \Leftrightarrow \pi\nu = \tan(\pi\nu)$$

cette dernière équation a une unique solution sur charque intervalle $[k, k+1]$, $k \geq 1$, qu'on note α_k. En chaque α_k, la dérivée s'annule et change de signe, on a donc un extremum local.

(2) En déduire la valeur des deux intégrales de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{\pi}{2}\hat{\Pi}_1(0) = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\left\|\mathrm{sinc}\right\|^2 = \frac{\pi}{2}\left\|\Pi_1\right\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(3) En exploitant les relations « transformée de Fourier et dilatation du temps » déterminez la transformée de Fourier $\hat{\Pi}_T(\nu)$ du signal porte général $\hat{\Pi}_T(t)$.

On a $\Pi_T(t) = \Pi_1(t/T)$. Il vient directement

$$\hat{\Pi}_T(\nu) = T\hat{\Pi}_1(T\nu) = T\mathrm{sinc}(T\nu)$$

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_T(\nu)$ du signal $x_T(t)$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur T de la porte considérée et notamment le comportement lorsque $T \to \infty$.

$$\hat{x}_T(\nu) = \hat{\Pi}_T(\nu - f_0) = T\mathrm{sinc}(T(\nu - f_0))$$

$T\mathrm{sinc}(T(\nu - f_0))$ s'annule pour $\nu = k/T + f_0$ avec maximum global en $\nu = f_0$.

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\sin(\pi T(\nu - f_0))}{\pi(\nu - f_0)} = \delta(\nu - f_0)$$

Exercice 6. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini (à temps discret).*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique à temsp discret observé sur une durée finie. Pour cela on définit le "signal porte" constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in [-N;+N] \\ 0 & \text{si } n \notin [-N;+N] \end{cases}$$

où N est un entier positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence ν_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_N[n] = e^{2i\pi\nu_0 n}\ \Pi_N[n]\ .$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_N(\nu)$ la transformée de Fourier de $\Pi_N[n]$. On pourra introduire le *noyau de Dirichlet* défini par $\mathrm{Dir}_N(u) = \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(\pi u)}$.

Calculons la transformée de Fourier à temps discret de $\pi_N(n)$

$$\begin{aligned}
\Pi_N(\nu) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_N(n) e^{-2i\pi\nu n} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} e^{-2i\pi\nu n} \\
&= \frac{e^{2i\pi\nu N} - e^{-2i\pi\nu(N+1)}}{1 - e^{-2i\pi\nu}} \\
&= \frac{e^{i\pi\nu}}{e^{i\pi\nu}} \frac{e^{2i\pi\nu N} - e^{-2i\pi\nu(N+1)}}{1 - e^{-2i\pi\nu}} \\
&= \frac{e^{i\pi\nu(2N+1)} - e^{-i\pi\nu(2N+1)}}{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}} \\
&= \frac{\sin\left((2N+1)\pi\nu\right)}{\sin\left(\pi\nu\right)} \\
\Pi_N(\nu) &= \mathrm{Dir}_{2N+1}(\nu)
\end{aligned}$$

(2) Vérifiez les propriétés de symétries de $\hat{\Pi}_N(\nu)$. Vérifiez que $\hat{\Pi}_N(\nu)$ est bien 1-périodique. Vérifiez également que :

$$\hat{\Pi}_N(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_N[n]\,.$$

et donner :

$$\int_0^1 \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\,\mathrm{d}\nu\ .$$

— Vérifions que $\Pi_N(\nu)$ est une fonction paire

$$\begin{aligned}\Pi_N(-\nu) &= \frac{\sin\left((2N+1)\pi-\nu\right)}{\sin\left(\pi-\nu\right)}\\ &= \frac{-\sin\left((2N+1)\pi\nu\right)}{-\sin\left(\pi\nu\right)}\\ &= \Pi_N(\nu)\end{aligned}$$

— Vérifions que $\Pi_N(\nu)$ est 1–périodique.

$$\begin{aligned}\Pi_N(\nu+1) &= \frac{\sin\left((2N+1)\pi(\nu+1)\right)}{\sin\left(\pi(\nu+1)\right)}\\ &= \frac{\sin\left((2N+1)\pi\nu+(2N+1)\pi\right)}{\sin\left(\pi\nu+\pi\right)}\\ &= \frac{-\sin\left((2N+1)\pi\nu\right)}{-\sin\left(\pi\nu\right)}\\ &= \Pi_N(\nu)\end{aligned}$$

— Vérifions que $\Pi_N(0)$ est bien égale à la somme du signal π_N.

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\sin\left((2N+1)\pi\nu\right)}{\sin\left(\pi\nu\right)} = 2N+1$$

On calcul cette limite facilement en utilisant le développement limité de la fonction sin. Évidemment $\sum_{\mathbb{Z}}\pi_N(n) = 2N+1$.

— Par définition de la transformée de Fourier à temps discret on a

$$\int_0^1 \frac{\sin\left((2N+1)\pi\nu\right)}{\sin\left(\pi\nu\right)}\,\mathrm{d}\nu = \int_0^1 \Pi_N(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \pi_N(0) = 1$$

(3) Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_N(\nu)$ en détail.

voir figure 1

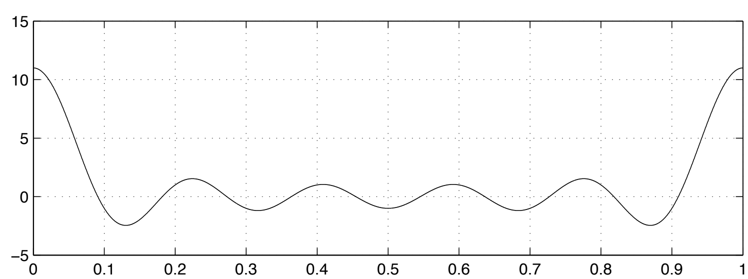


FIGURE 1. Noyaux de Dirichlet $N = 5$

(4) En exploitant les relation "transformée de Fourier et modulation" déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_N(\nu)$ du signal $\{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur de la porte considérée et notamment le comportement lorsque N tend vers l'infini.

Déterminons la transformée de Fourier de $x_N(n)$ à partir de ce qui précède.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_N(\nu) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_N[n]e^{-2i\pi\nu n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_N[n]e^{2i\pi\nu_0 n}e^{-2i\pi\nu n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_N[n]e^{-2i\pi(\nu-\nu_0)n} \\
&= \Pi_N(\nu-\nu_0)
\end{aligned}$$

Lorsque La largeur de la porte augmente la largeur du noyaux de Dirichlet diminue. Enfin lors que N tend vers $+\infty$ alors on tend vers la distribution de Dirac, l'horizon devient infini.

Exercice 7. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles.*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha\,|t|}\,, t\in\mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0\ ,$$

ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

(1) Calculer $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.

Calculons $\hat{x}(\nu)$

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|t|}e^{-2i\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(2i\pi\nu+\alpha)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{-(2i\pi\nu-\alpha)t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2i\pi\nu+\alpha}\left[e^{-(2i\pi\nu+\alpha)t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2i\pi\nu-\alpha}\left[e^{-(2i\pi\nu-\alpha)t}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{2i\pi\nu+\alpha} - \frac{1}{2i\pi\nu-\alpha} \\
&= \frac{2i\pi\nu-\alpha-(2i\pi\nu+\alpha)}{(2i\pi\nu+\alpha)(2i\pi\nu-\alpha)} \\
&= \frac{-2\alpha}{-4\pi^2\nu^2-\alpha^2} \\
&= \frac{2\alpha}{4\pi^2\nu^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

(2) Vérifier les propriétés de symétrie de X. Vérifiez également que :

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\,\mathrm{d}\nu \text{ et } \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\mathrm{d}t$$

et calculer ces quantités. On vérifie bien que la transformée de Fourier d'un signal pair réel est bien paire et réel.

On a

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t}\, \mathrm{d}\nu$$

et donc

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\, \mathrm{d}\nu$$

De plus,

$$x(0) = e^{\alpha 0} = 1\ .$$

De même, on vérifie que

$$\hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

et

$$\hat{x}(0) = \frac{2}{\alpha}$$

(3) Calculer Δt et $\Delta\nu$ les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $\hat{x}(\nu)$.

Calculons tout d'abord Δt. On cherche les instants t tels que $x(t) = \frac{1}{2}$. La fonction étant paire, on cherche t tel que

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} &= \frac{1}{2} \\ -\alpha t &= -\log(2) \\ t &= \frac{\log(2)}{\alpha} \end{aligned}$$

et donc $\Delta t = 2\frac{\log(2)}{\alpha}$.

Calculons $\Delta\nu$. On cherche les intants t tels que $\hat{x}(\nu) = \frac{1}{2}$. La fonction étant paire, on cherche t tel que

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{4\pi^2\nu^2 + \alpha^2} &= \frac{1}{2} \\ 4\alpha &= 4\pi^2\nu^2 + \alpha^2 \\ \nu^2 &= \frac{\alpha^2 + 4\alpha}{4\pi^2} \\ \nu &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2\pi} \end{aligned}$$

et donc $\Delta\nu = \frac{\sqrt{\alpha^2+4\alpha}}{\pi}$.

On remarque qu'en première approximation $\Delta\nu$ est proportionnelleà α et Δt est proportionnelle à $\frac{1}{\alpha}$

Exercice 8. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x[n] = \alpha^{|n|}\ , n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1, 1[\ , \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} e^{-i2\pi n\nu} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^{-n} e^{-i2\pi n\nu} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n} e^{-i2\pi n\nu} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{i2\pi\nu})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{e^{i2\pi\nu}}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\alpha e^{i2\pi\nu}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-i2\pi\nu}} - 1 \\
&= \frac{2-2\alpha\cos(2\pi\nu)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi\nu)} - 1 \\
&= \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi\nu)}
\end{aligned}$$

(2) Vérifiez les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\,.$$

La transformée de Fourier est réel et paire, comme attendu pour un signal réel pair.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} e^{-i2\pi n0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)
\end{aligned}$$

(3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, ... ? On a

$$\hat{x}'(\nu) = \frac{(1-\alpha^2)4\pi\alpha\sin(2\pi\nu)}{\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos(2\pi\nu)\right)^2}$$

avec $\hat{x}'(\nu) = 0$ pour $\nu = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. sur $[0, 1/4]$, $\hat{x}'(\nu)$ est du signe de α et sur $[1/4, 1/2]$, $\hat{x}'(\nu)$ est du signe contraire.

— $\alpha > 0$, signal haute fréquence

— $\alpha < 0$, signal basse fréquence

(4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?

— $\alpha \to 0$, $x \to \delta_n$ et $\hat{x} \to 1$

— $\alpha \to 1$, $x \to 1$ et $\hat{x} \to \delta$

— $\alpha \to -1$, $x \to -1$ et $\hat{x} \to -\delta$