Licence 3 Math/Phys
Traitement du signal

TD : TZ et Filtrage

Table des matières

Exercice 1. — *Étude d'un filtre donné par sa fonction de transfert en z.*

On considère le filtre dont le transfert en z est :

$$H(z) = \frac{z^2 - z - 36}{z^2 - z - 6}$$

(1) Calculez la transformée en z inverse $\{h_n\}_n$ de H. On distinguera tous les cas possibles selon la région de convergence considérée.

On décompose $H(z)$ en éléments simples pour reconnaitre les transformées usuelles. Les pôles de H sont

$$z = 3 \text{ et } z = -2$$

$$\begin{aligned}
\frac{z^2 - z - 36}{z^2 - z - 6} &= a_0 + \frac{a_1}{(z-3)} + \frac{a_2}{z+2} = H_0(z) + H_1(z) + H_2(z) \\
&= \frac{a_0(z^2 - z - 6) + a_1(z+2) + a_2(z-3)}{(z-3)(z+2)} \\
&= \frac{a_0 z^2 + z(-a_0 + a_1 + a_2) + (-6a_0 + 2a_1 - 3a_2)}{(z-3)(z+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ -a_0 + a_1 + a_2 & = -1 \\ -6a_0 + 2a_1 - 3a_2 & = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_2 & = -a_1 \\ 5a_1 & = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = -6 \\ a_2 & = 6 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned}H(z) &= 1 + \frac{-6}{(z-3)} + \frac{6}{z+2} \\ &= 1 - 6\frac{z^{-1}}{(1-3z^{-1})} + 6\frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}} \\ &= H_0(z) + H_1(z) + H_2(z)\end{aligned}$$

ce qui donne pour

- pour tout z $h_0[n] = \delta[n]$
- $|z| > 3$. On reconnait la TZ de $3^n\theta[n]$, qu'on décalle de 1 (multiplication de la TZ par z^{-1}) et multiplié par la constante -6 :

$$h_1[n] = -6 \cdot 3^{n-1}\theta[n-1] = -2 \cdot 3^n\theta[n-1]$$

- $|z| < 3$. On reconnait la TZ de $-3^n\theta[-n-1]$, qu'on décalle de 1 (multiplication de la TZ par z^{-1}) et multiplié par la constante -6 :

$$h_1[n] = 6 \cdot 3^{n-1}\theta[-n] = 2 \cdot 3^n\theta[-n]$$

- $|z| > 2$. On reconnait la TZ de $(-2)^n\theta[n]$, qu'on décalle de 1 (multiplication de la TZ par z^{-1}) et multiplié par la constante 6 :

$$h_2[n] = 6 \cdot (-2)^{n-1}\theta[n-1] = -3 \cdot (-2)^n\theta[n-1]$$

- $|z| < 2$. On reconnait la TZ de $-(-2)^n\theta[-n-1]$, qu'on décalle de 1 (multiplication de la TZ par z^{-1}) et multiplié par la constante 6 :

$$h_2[n] = -6 \cdot (-2)^{n-1}\theta[-n] = 3 \cdot (-2)^n\theta[-n]$$

On a

$$h[n] = h_0[n] + h_1[n] + h_2[n]$$

ce qui donne

- $|z| < 2$

$$h[n] = \delta[n] + 2 \cdot 3^n\theta[-n] + 3 \cdot (-2)^n\theta[-n]$$

  Le signal est stable et anti-causal (le cercle unité appartient bien au domaine de convergence)
- $2 < |z| < 3$

$$h[n] = \delta[n] + 2 \cdot 3^n\theta[-n] - 3 \cdot (-2)^n\theta[n-1]$$

  Le signal n'est pas stable et est a-causal
- $|z| > 3$

$$h[n] = \delta[n] - 2 \cdot 3^n\theta[n-1] - 3 \cdot (-2)^n\theta[n-1]$$

  Le signal n'est pas stable et causal

(2) Donnez, dans chaque cas, la condition de stabilité de H. Dans les cas stables, donnez la transformée de Fourier $\hat{h}$ de $\{h_n\}_n$. Donnez aussi le module au carré de $\hat{h}$.

La transformée de Fourier existe ssi le cercle unité appartient à la couronne de convergence. Donc pour $|z| < 2$

$$\begin{aligned}\hat{h}(\nu) &= H(e^{i2\pi\nu}) \\ &= \frac{e^{i4\pi\nu} - e^{i2\pi\nu} - 36}{e^{i4\pi\nu} - e^{i2\pi\nu} - 6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\hat{h}(\nu)|^2 &= \frac{e^{i4\pi\nu} - e^{i2\pi\nu} - 36}{e^{i4\pi\nu} - e^{i2\pi\nu} - 6} \cdot \frac{e^{-i4\pi\nu} - e^{-i2\pi\nu} - 36}{e^{-i4\pi\nu} - e^{-i2\pi\nu} - 6} \\ &= \frac{1 - e^{i2\pi\nu} - 36e^{i4\pi\nu} - e^{-i2\pi\nu} + 1 + 36e^{i2\pi\nu} - 36e^{-i4\pi\nu} + 36e^{-i2\pi\nu} + 1296}{1 - e^{i2\pi\nu} - 6e^{i4\pi\nu} - e^{-i2\pi\nu} + 1 + 6e^{i2\pi\nu} - 6e^{-i4\pi\nu} + 6e^{-i2\pi\nu} + 36} \\ &= \frac{1 - 72\cos(4\pi\nu) - 70\cos(2\pi\nu) + 1296}{1 - 12\cos(4\pi\nu) - 10\cos(2\pi\nu) + 36}\end{aligned}$$

Exercice 2. — *Étude d'un filtre intégrateur à temps discret.*

On considère le filtre $\mathcal{F}$ défini par la relation entrée-sortie suivante (e est l'entrée et s la sortie) :

$$s[n] = \frac{1}{2}(e[n] + e[n-1]) \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ .$$

(1) $\mathcal{F}$ est-il linéaire, invariant, causal ? Argumentez brièvement.

- linéaire : oui, car le filtre ne fait intervenir qu'une addition entre deux instants de l'entrée
- invariant : oui, pour les mêmes raisons (l'addition est invariante dans le temps)
- causal : oui, car la sortie ne dépend que des instants plus petits que n (et donc ne dépend pas du futur)

(2) Déterminez sa réponse impulsionnelle. Le filtre est-il stable ?

Soit h la réponse impulsionnelle du filtre.

$$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$$

on a donc

$$\begin{aligned}h[0] &= \frac{1}{2} \\ h[1] &= \frac{1}{2} \\ h[n] &= 0 \ \forall n \geq 2 \text{ et } n < 0\end{aligned}$$

On a

$$\|h\|_1 = h[0] + h[1] = 1$$

donc le filtre est stable.

(3) Déterminez $\hat{h}$ et $|\hat{h}(\nu)|^2$. Représenter $|\hat{h}(\nu)|^2$. Le filtre est-il passe haut, passe bas, passe bande ?

Le gain en fréquence est la transformée de Fourier de h. Donc

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i2\pi\nu} \\ &= \frac{1}{2}e^{-i\pi\nu}\left(e^{i\pi\nu} + e^{-i\pi\nu}\right) \\ &= e^{-i\pi\nu}\cos(\pi\nu) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$|H(\nu)|^2 = \cos^2(\pi\nu)$$

Ce filtre est donc un filtre passe-bas.

(4) Calculez la sortie de $\mathcal{F}$ lorsqu'il est attaqué par le signal :

$$e[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } \ n = 0, 1, \dots, N-1, N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s[n] &= \frac{1}{2}(e[n] + e[n-1]) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, N\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = 0, N+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

(5) On attaque maintenant le filtre $\mathcal{F}$ par un signal monochromatique à la fréquence ν_0 et d'amplitude $a_0 \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $e[n] = a_0 e^{2i\pi\nu_0 n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Quelle est la sortie du filtre ? Quelle est la fréquence en sortie du filtre ? Commentez.

La sortie du filtre est

$$\begin{aligned} s[n] &= \frac{1}{2}\left(a_0 e^{2i\pi\nu_0 n} + a_0 e^{2i\pi\nu_0(n-1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 e^{i\pi\nu_0(2n-1)}\left(e^{i\pi\nu_0} + e^{-i\pi\nu_0}\right) \\ &= a_0 e^{2i\pi\nu_0 n} e^{-i\pi\nu_0}\cos(\pi\nu_0) \end{aligned}$$

La fréquence en sortie est donc ν_0. Le signal $a_0 e^{2i\pi\nu_0 n}$ est donc un signal propre, associé à la valeur propre $e^{-i\pi\nu_0}\cos(\pi\nu_0)$.

Exercice 3. — *Étude d'un filtre donné par une équation aux différences.*

On considère le filtre causal défini par la relation d'entrée-sortie suivante :

$$s[n] = 2s[n-1] + 4e[n] + 3e[n-1]\,, \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

où $e[n]$ est l'entrée et $s[n]$ la sortie.

(1) Déterminez $H(z)$ la fonction de transfert en z de ce filtre.

On exploite la relation entre transformée en z et décallage

$$S(z) = 2z^{-1}S(z) + 4E(z) + 3z^{-1}E(z)$$

ce qui donne

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{4 + 3z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

avec $|z| > 2$, car le filtre est évidemment causal.

(2) Déduisez-en $h[n]$ sa réponse impulsionnelle.

On décompose $H(z)$ en éléments simples

$$H(z) = 4\frac{1}{1 - 2z^{-1}} + 3\frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

Et on reconnait les transformées en z classiques pouvant être décallées

$$\begin{aligned} h[n] &= 4 \cdot 2^n \Theta_n + 3 \cdot 2^n \Theta_{n-1} \\ &= 4\delta_n + 11 \cdot 2^{n-1}\Theta_{n-1} \end{aligned}$$

où Θ_n est le signal de Heaviside.

(3) Étudiez la stabilité du filtre La région de convergence $|z| > 2$ ne contient pas le cercle unité, le filtre est donc instable

(4) Déterminez, si elle existe, la réponse en fréquence $\hat{h}(\nu)$.

Le filtre étant instable, la réponse en fréquence n'est pas définie.