Licence 3 Math/Phys
TRAITEMENT DU SIGNAL

TD : signaux aléatoires et autocorrélation

Table des matières

Exercice 1. — *Signal harmonique*.S

oit le signal aléatoire

$$X(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

avec $A, \nu \in \mathbb{R}$ et φ une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\pi, \pi]$

(1) Montrer que $x(t)$ est un signal stationnaire au sens large

On calcule d'abord la moyenne :

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{A}\cos(2\pi\nu\mathrm{t} + \varphi)\right] \\
&= A\mathrm{E}\left[\cos(2\pi\nu\mathrm{t} + \varphi)\right] \\
&= A\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu t + u) f_\varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= A\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi\nu t + u)\,\mathrm{d}u \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puis la fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned}
R_X(t,s) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)X(s)}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{A}\cos(2\pi\nu\mathrm{t}+\varphi)\mathrm{A}\cos(2\pi\nu\mathrm{s}+\varphi)\right] \\
&= A^2\mathrm{E}\left[\cos(2\pi\nu\mathrm{t}+\varphi)\cos(2\pi\nu\mathrm{s}+\varphi)\right] \\
&= A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi\nu t+u)\cos(2\pi\nu s+u)f_\varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= A^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi\nu t+u)\cos(2\pi\nu s+u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi\nu(t-s))+\cos(2\pi\nu(s+t)+2u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu(t-s))+\frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi\nu(s+t)+2u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu(t-s))+\frac{A^2}{4}\int_{-2\pi}^{2\pi}\cos(2\pi\nu(s+t)+v)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu(t-s)) \\
&= R_X(t-s)
\end{aligned}$$

(2) Montrer que la moyenne est ergodique

On doit montrer que

$$\mu_X(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-T/2}^{T/2}A\cos(2\pi\nu t+\varphi)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{2\pi\nu}\left[\sin(2\pi\nu t+\varphi)\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= \frac{A}{2\pi\nu}\left(\sin(\pi\nu T+\varphi)-\sin(-\pi\nu T+\varphi)\right)
\end{aligned}$$

et donc on a bien $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\,\mathrm{d}t=0$ (par encadrement)

(3) Montrer que la fonction d'autocorrélation est ergodique

On doit montrer que

$$R_X(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(u)X(t+u)\,\mathrm{d}u$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} X(u)X(t+u)\,\mathrm{d}u = A^2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi\nu u+\varphi) A\cos(2\pi\nu(t+u)+\varphi)\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{A^2}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi\nu(t+2u)+2\varphi)+\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu t)T + \frac{A^2}{2}\left[\frac{\sin(2\pi\nu(t+2u)+2\varphi)}{4\pi\nu}\right]_{T/2}^{T/2}$$

on a $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(2\pi\nu(t+2u)+2\varphi)}{4\pi\nu}\right]_{T/2}^{T/2} = 0$ (par encadrement), et

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu t)T = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi\nu t) = R_X(t)$$

Exercice 2. — *Signal harmonique modulé.*

Soit le signal
$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi\nu_0 t+\varphi)$$
avec $X(t)$ un signal stationnaire de moyenne nulle de fonction d'autocorrélation $R_X(t)$ et densité spectrale de puissance $S_X(\nu)$, $\omega \in \mathbb{R}$ et φ est une variable aléatoire uniforme sur $]-\pi,\pi]$. On suppose $X(t)$ et φ indépendants.

(1) Montrer que Y est stationnaire au sens large

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{Y(t)}\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\cos(2\pi\nu_0\mathrm{t}+\varphi)\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\right]\mathrm{E}\left[\cos(2\pi\nu_0\mathrm{t}+\varphi)\right] \text{ car } X \text{ et } \varphi \text{ sont indépendantes}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y(t,s) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Y(t)Y(s)}\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\cos(2\pi\nu_0\mathrm{t}+\varphi)\mathrm{X(s)}\cos(2\pi\nu_0\mathrm{s}+\varphi)\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)X(s)}\right]\mathrm{E}\left[\cos(2\pi\nu_0\mathrm{t}+\varphi)\cos(2\pi\nu_0\mathrm{s}+\varphi)\right]\\ &= R_X(t-s)\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu_0(t-s)) \text{ cf. exercice 1}\end{aligned}$$

(2) Calculer la densité spectrale de puissance de Y

On utilise le théorème de Wiener-Khintchine

$$\begin{aligned}S_Y(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} R_y(t)e^{-i2\pi\nu t}\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} R_X(t)\cos(2\pi\nu(t))e^{-i2\pi\nu t}\\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} R_X(t)(e^{i2\pi\nu_0 t}+e^{-i2\pi\nu_0 t})e^{-i2\pi\nu t}\\ &= \frac{1}{4}\left(S_X(\nu-\nu_0)+S_X(\nu+\nu_0)\right) \text{ cf. TF et modulation !}\end{aligned}$$

Exercice 3. — *Filtre de Wiener numérique.*

Soit X et B des signaux aléatoires stationnaires en moyenne d'ordre 2 de densité spectrale respective S_X et S_B supposée connue. On suppose X et B indépendants et B de moyenne nulle. Soit Y la version bruité de X :

$$Y = X + B \ .$$

On suppose qu'on dispose d'une observation observation bruité de X sur une fenêtre de taille N. On note $Y_N = \{Y_0, \ldots, Y_{N-1}\}$ cette observation, et l'on note de même $X_N = \{X_0, \ldots, X_{N-1}\}$, $B_N = \{B_0, \ldots, B_{N-1}\}$. On a bien entendu

$$Y_n = X_n + B_n \ \forall n \in \{0, \ldots, N-1\} \ .$$

On cherche une estimation de X_N à partir d'une version filtrée de Y_N. Le but est d'estimer la réponse impulsionnelle h de ce filtre de sorte que l'erreur

$$e = \mathrm{E}\left[\|\mathrm{h} \star \mathrm{Y_N} - \mathrm{X_N}\|^2\right]$$

soit minimale. La convolution est ici une convolution circulaire de taille N.

(1) Montrer que Y est un signal stationnaire au sens large. Préciser sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{Y}] = \mathrm{E}[\mathrm{X} + \mathrm{B}] = \mathrm{E}[\mathrm{X}] + \mathrm{E}[\mathrm{B}] \\ = \mathrm{E}[\mathrm{X}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y[t, \tau] &= \mathrm{E}[\mathrm{Y[t]Y[\tau]}] = \mathrm{E}[(\mathrm{X[t]} + \mathrm{B[t]})(\mathrm{X[\tau]} + \mathrm{B[\tau]})] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{X[t]X[\tau]} + \mathrm{B[t]B[\tau]} + \mathrm{X[t]B[\tau]} + \mathrm{B[t]B[\tau]}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{X[t]X[\tau]}] + \mathrm{E}[\mathrm{B[t]B[\tau]}] + \mathrm{E}[\mathrm{X[t]B[\tau]}] + \mathrm{E}[\mathrm{B[t]B[\tau]}] \\ &= R_X[t - \tau] + R_B[t - \tau] + \mathrm{E}[\mathrm{X[t]}]\mathrm{E}[\mathrm{B[\tau]}] + \mathrm{E}[\mathrm{B[t]}]\mathrm{E}[\mathrm{B[\tau]}] \\ &= R_X[t - \tau] + R_B[t - \tau] \end{aligned}$$

donc Y est stationnaire au sens large.

(2) B_N étant un signal numérique fini, on peut calculer sa transformée de Fourier finie $\hat{B}_N$. Montrer que pour tout k, $\mathrm{E}\left[\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{N}[\mathrm{k}]\right] = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{N}[\mathrm{k}]\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{B_N[n]} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\mathrm{N}}\mathrm{kn}}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{E}[\mathrm{B_N[n]}] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) Exprimer e en fonction de S_X et S_B.

$$
\begin{aligned}
e &= \mathrm{E}\left[\|\mathrm{h} \star \mathrm{Y} - \mathrm{X}\|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\|\hat{\mathrm{h}} \star \hat{\mathrm{Y}} - \hat{\mathrm{X}}\|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} |\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{Y}}_\mathrm{k} - \hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} |\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}(\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k} + \hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}) - \hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} |\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}(\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1) + \hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} |\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}|^2|\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1|^2 + |\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}|^2|\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}|^2 + \hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}(\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1)\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k} + \overline{\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}(\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1)\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{E}\left[|\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}|^2|\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1|^2\right] + \mathrm{E}\left[|\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}|^2|\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}|^2\right] + \mathrm{E}\left[\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}(\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1)\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}\right] + \mathrm{E}\left[\overline{\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}(\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k} - 1)\hat{\mathrm{h}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{h}_k - 1|^2 \mathrm{E}\left[|\hat{\mathrm{X}}_\mathrm{k}|^2\right] + |\hat{h}_k|^2 \mathrm{E}\left[|\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}|^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{h}_k - 1|^2 S_X[k] + |\hat{h}_k|^2 S_B[k]
\end{aligned}
$$

(4) En déduire h en fonction de S_X et S_B. On dérive e par rapport à $\overline{h}_k$

$$\frac{\partial e}{\partial h_k} = 2\hat{h}_k S_X[k] - 2S_X[k] + 2\hat{h}_k S_B[k]$$

On annule la dérivée :

$$\hat{h}_k = \frac{S_X[k]}{S_X[k] + S_B[k]}$$

(5) Commenter.

Exercice 4. — *Détection d'un signal harmonique.*

L'objectif de ce problème est de montrer comment la fonction d'autocorrélation peut être utilisée à des fins de détection. On considère le cas d'un processus harmonique plongé dans un bruit aléatoire, continu et stationnaire en moyennme d'ordre deux. Pour peu que l'autocorrélation du bruit soit une fonction assez rapidement décroissante, on peut alors se baser sur l'autocorrélation du signal bruité pour détecter la présence du signal non bruité.

(1) Modélisation du signal Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus harmonique :

$$X(t) = A\cos(\omega t + \phi) \ ,$$

d'amplitude A et pulsation ω déterministes (mais pas nécessairement connus), et de phase à l'origine ϕ aléatoire, distribuée sur $[0, 2\pi[$ avec une loi uniforme : la densité est donnée par

$$\rho_\phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\,\chi_{[0,2\pi]}(\varphi)\ .$$

avec χ la fonction indicatrice. Ce type de signal décrit par exemple des signaux émis par des étoiles pulsantes (pulsars), la pulsation ω étant caractéristique de la fréquence de rotation de l'étoile, et l'amplitude A décrivant la distance à laquelle elle se trouve.

(a) Montrer que la moyenne de X est nulle :

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\right] = 0\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\right] &= \int_{\mathbb{R}} A\cos(\omega t + \varphi)\rho_\phi(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\cos(\omega t + \phi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Calculer la fonction d'autocorrélation : $R_X(t,\tau) = \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)X(\tau)}\right]$. En déduire la variance σ_X^2 de $X(t)$ pour tout t, et en déduire que $X(t)$ est du second ordre et continu en moyenne d'ordre 2. Il est de plus stationnaire en moyenne d'ordre 2, au sens où

$$R_X(t,\tau) = R_X(t-\tau, 0) := R_X(t-\tau)\ .$$

$$\begin{aligned}
R_X(t,\tau) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)X(\tau)}\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} A\cos(\omega t + \varphi) A\cos(\omega\tau + \varphi)\rho_\phi(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega\tau + \varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega(t+\tau) + 2\varphi) + \cos(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega(t-\tau))
\end{aligned}$$

donc le processus est stationnaire au sens large.

De plus, $X(t)$ étant de moyenne nulle, on a $\mathrm{Var}\left[\mathrm{X(t)}\right] = R_X(t,t) = \frac{A^2}{2} = \sigma_X^2$ pour tout t.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[|\mathrm{X(t+\delta) - X(t)}|^2\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t+\delta)^2}\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)^2}\right] - 2\mathrm{E}\left[\mathrm{X(t+\delta)X(t)}\right] \\
&\sigma_X^2 + \sigma_X^2 - 2R_X(t+\delta, t)
\end{aligned}$$

On a $\lim_{\delta\to 0} R_X(t+\delta, t) = \sigma_X^2$ et donc $\lim_{\delta\to 0} \mathrm{E}\left[|\mathrm{X(t+\delta) - X(t)}|^2\right] = 0$ i.e. le processus est continue en mod.

(c) Mêmes questions dans le cas du processus

$$Y(t) = A\sin(\omega t + \phi) \ ,$$

sous les mêmes hypothèses pour A, ω et ϕ.

(2) Détection par autocorrélation On suppose que l'on observe un processus du second ordre $O = \{O(t), t \in \mathbb{R}\}$, continu et stationnaire en moyenne d'ordre 2, de la forme

$$O(t) = X(t) + B(t) \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

où X est le signal harmonique précédent, et $B = \{B(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un bruit, modélisé par un processus du second ordre, centré ($\mathrm{E}\left[\mathrm{B(t)}\right] = 0$ pour tout t), continu et stationnaire en moyenne d'ordre 2 :

$$R_B(t,\tau) = R_B(t-\tau, 0) := R_B(t-\tau) \ .$$

On suppose en outre que les processus X et B sont décorrélés : pour tous t, τ,

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)B(}\tau\mathrm{)}\right] = 0 \ .$$

(a) Exprimer la fonction d'autocorrélation $R_O(t)$ en fonction de R_X et R_B, et en déduire une relation entre les variances respectives σ_X^2, σ_B^2 et σ_O^2 de X, B et O.

$$\begin{aligned} R_O(t) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{O(t)O(0)}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{(X(t)+B(t))(X(0)+B(0))}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)X(0)}\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)B(0)}\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{B(t)X(0)}\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{B(t)B(0)}\right] \\ &= R_X(t) + \mathrm{E}\left[\mathrm{X(t)}\right]\mathrm{E}\left[\mathrm{B(0)}\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{B(t)}\right]\mathrm{E}\left[\mathrm{X(0)}\right] + R_B(t) \\ &= R_X(t) + R_B(t) \end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_O^2 = R_0(0) = \sigma_X^2 + \sigma_B^2$$

(b) Soit $\epsilon > 0$. Donner une condition suffisante sur la fonction d'autocorrélation $R_B(t)$ assurant que la condition

$$|R_O(t) - R_X(t)| \le \epsilon\sigma_O^2 \ , \quad \forall |t| \ge \tau_0(\epsilon) \ ,$$

(où $\tau_0(\epsilon)$ est un réel positif) soit satisfaite ? En déduire que si cette condition est remplie, il est possible de détecter le signal X, en observant R_O dans un intervalle approprié, et donc de déterminer la valeur de la constante ω. $|R_O(t) - R_X(t)| = |R_B(t)|$ Il suffit d'avoir $|R_B(t)| \le \epsilon\sigma_O^2 \quad \forall |t| \ge \tau_0(\epsilon)$ qui est vérifié si

$$\lim_{t\to\infty} |R_B(t)| = 0 \ .$$

Soit $t_0 \ge \tau_0(\epsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} R_O(t) &= R_X(t) + R_B(t) \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(\omega t) + r \end{aligned}$$

avec $|r| \le \epsilon\sigma_O^2$. On a donc $R_O(t) \simeq R_X(t)$, on peut donc détecter le signal X.

(c) Supposons ω connu, soit $\epsilon > 0$ un réel positif fixé, et soit $\tau \geq \tau_0(\epsilon)$. Montrer que

$$A^2 = \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} R_O(t)\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t + \tilde{\epsilon}\ ,$$

et estimer l'erreur $\tilde{\epsilon}$, en fonction de ϵ, σ_O^2 et ω.

$$\begin{aligned}
\frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} R_O(t)\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} (R_X(t) + R_B(t))\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} (\frac{A}{2}\cos(\omega t) + R_B(t))\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} \frac{A}{2}\cos^2(\omega t) + R_B(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} \frac{A}{2}\cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} R_B(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\omega}{\pi}\frac{A^2\pi}{2\omega} + r \\
&= A^2 + r
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
|r| &\leq \epsilon\sigma_X^2 \frac{2\omega}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} |\cos(\omega t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2\omega}{\pi}\frac{4}{\omega}\epsilon\sigma_X^2 \\
&\leq \frac{8}{\pi}\epsilon\sigma_X^2
\end{aligned}$$

et donc $A^2 = \frac{2\omega}{\pi}\int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} R_O(t)\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t + \tilde{\epsilon}$ avec $|\tilde{\epsilon}| \leq \frac{8}{pi}\epsilon\sigma_O^2$

(d) Cas particulier : Supposons que le bruit soit tel que

$$R_B(t) = \sigma_B^2 \frac{\sin\gamma t}{\gamma t}\ .$$

Donner une estimation de $\tau_0(\epsilon)$ adaptée à ce cas de figure, et l'exprimer en fonction du *rapport signal à bruit*

$$\rho^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2}\ .$$

Si $R_B(t) = \sigma_B^2 \frac{\sin\gamma t}{\gamma t}$ alors

$$|R_B(t)| \leq \sigma_B^2 \frac{1}{\gamma t}$$

avec $t > \frac{1}{\gamma}\frac{\sigma_B^2}{\sigma_0^2}\frac{1}{\epsilon}$, on a bien

$$|R_B(t)| \leq \epsilon\sigma_O^2$$

et donc

$$\tau_O(\epsilon) = \frac{1}{\gamma\epsilon}\frac{1}{1+\rho^2}$$

(e) Commenter. Plus la précision est grande, plus τ_0 est élevé. τ_0 est une fonction croissante de ρ