TD

Table des matières

Exercice 1. — *Formule sommatoire de Poisson.*

Soit f une fonction a décroissance rapide. Soit

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)$$

telle que que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+nT)| < +\infty$.

(1) Montrer que S est T périodique

(2) Calculer la décomposition en série de Fourier de S

(3) en déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

(4) en déduire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}\,(m)$$

(5) Soit $\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$. Montrer que

$$\hat{\delta}_\tau(\nu) = e^{-i2\pi\nu\tau}$$

et donc,

$$\widehat{e^{i2\pi\nu\tau}}(t) = \delta_\tau(\nu)$$

(6) Appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f = \delta$. En déduire que la transformée de Fourier d'un peigne de dirac est un peigne de dirac

Exercice 2. — *Filtre moyenneur et bruit blanc.*

$$s[n] = \frac{1}{2}\left(e[n] + e[n-1]\right)$$

(1) Le système est-il linéaire, causal, invariant ?

(2) déterminer la réponse impulsionnelle h du système. Le système est il stable ?

(3) donner la fonction de transfert $H(z)$ de h avec sa région de convergence. Donner les pôles et les zeros

(4) donner la réponse en fréquence et $|\hat{h}(\nu)|^2$

(5) On suppose que e est un bruit blanc centré de densité spectrale σ^2. Donner la moyenne de s, la densité spectrale de s. s est-il toujours un bruit blanc ?

Exercice 3. — *Multiplexage numérique.*

Pour transmettre deux signaux, il est souvent plus simple de les mélanger et de n'en transmettre qu'un, à condition d'être capable de les séparer après réception. C'est ce que l'on appelle le multiplexage.

On cherche à coder simultanément deux signaux $x, y \in \ell_2(\mathbb{Z})$ On suppose que les TFD respectives de x et y sont telles que $\hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$.

(1) On pose $z_n = (-1)^n y_n$ (z est une copie "modulée" de y), et $w_n = x_n + z_n$. Montrer que $\hat{z}(\omega) = \hat{y}(\omega + \pi)$, et étudier le support de $\hat{z}$.

(2) Montrer que x peut être obtenu à partir de w par filtrage passe-bas (qui supprime la bande de fréquence $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$), et expliciter ce filtrage.

(3) Montrer que y peut être obtenu à partir de w par modulation (c'est à dire une translation dans l'espace des fréquences) suivie d'un filtrage passe-bas.

(4) Généraliser cette méthode au problème du multiplexage de N signaux $x^{(0)}, \dots x^{(N-1)}$ tels que pour tout $n = 0, \dots N-1$

$$\widehat{x^{(n)}}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [-\pi, -\pi/N] \cup [\pi/N, \pi] \ .$$