

SUJETS DE TD

TABLE DES MATIÈRES

Tirage de carte.....	1
Anniversaires.....	1
Jeu.....	3
Jeu télévisé.....	3
Loi.....	3
Proba et évènements.....	3
Tirages dans des urnes.....	3
Test PCR.....	4
Rendez-vous et probabilités.....	4

Exercice 1. — *Tirage de carte.*

On tire 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités que la première carte soit un 6 ; la deuxième carte soit un 6 ; la première soit un 6, la deuxième un roi de trèfle et la troisième un cœur.

Exercice 2. — *Anniversaires.*

On s'intéresse aux probabilités des coïncidences, que nous allons illustrer avec les dates d'anniversaire d'un ensemble de personnes.

- (1) Cherchons tout d'abord la probabilité pour que les anniversaires de n personnes soient tous à des dates différentes. Quelle est alors la probabilité pour que deux personnes au moins aient le même anniversaire (faire le calcul pour $n = 23$) ?
- (2) Quelle est la probabilité P_2 pour que, parmi 23 personnes, il y en ait exactement deux qui ont le même anniversaire, tous les autres étant distincts ?
- (3) Dans son article (Pour la Science numéro 249) Ian Stewart affirme que :
 - la probabilité pour que parmi 23 personnes il y ait exactement 2 anniversaires communs à 2 personnes chacun, tous les autres étant distincts, est environ 0,111
 - la probabilité pour que parmi 23 personnes il y ait exactement 3 anniversaires communs à 2 personnes chacun, tous les autres étant distincts, est environ 0,018

- la probabilité pour que parmi 23 personnes il y ait exactement 1 anniversaire commun à 3 personnes, tous les autres étant distincts, est environ 0,007.

Vérifiez ces affirmations.

Exercice 3. — *Jeu.*

On dépose au hasard un cadeau derrière l'une d'entre trois portes. Un jeu consiste à trouver ce cadeau en deux étapes. D'abord vous choisissez une porte ; puis l'organisateur vous montre parmi les deux portes restantes, une porte derrière laquelle le cadeau ne se trouve pas. Vous avez alors la possibilité entre changer de choix où le garder : que faites-vous ?

Exercice 4. — *Jeu télévisé.*

16 candidats participent à un jeu télévisé. Chaque semaine, les téléspectateurs votent, et à la majorité, éliminent un candidat. On suppose que pour les téléspectateurs, tous les candidats sont équivalents sauf Zazie, qu'ils choisissent avec une fréquence deux fois moins élevée que les autres candidats. Ainsi, si à la semaine n ($n \geq 1$), Zazi est parmi les $16 - n + 1$ restants, alors les autres candidats ont la probabilité p_n d'être éliminés, alors que Zazie a la probabilité $p_n/2$.

- (1) Montrer que $\frac{1}{2}p_n + (16 - n)p_n = 1$
- (2) Modéliser l'évolution de Zazie dans ce jeu
- (3) Quelle est la probabilité pour que Zazie ne soit pas éliminée les 15 premières semaines ?

Exercice 5. — *Loi.*

- (1) On choisit au hasard deux numéros distincts dans l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, et l'on note X leur produit. Donner la loi de X .
- (2) On tire simultanément 3 jetons d'une urne contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5, et on note X le plus petit nombre obtenu. Donner la loi de X .

Exercice 6. — *Proba et évènements.*

Soient deux évènements A et B définis sur le même espace de probabilité.

- (1) Si A est négligeable, montrer que A et B sont indépendants ; même chose si A est presque sûr.
- (2) Si A et B sont deux évènements incompatibles, montrer que A et B sont indépendants ssi $P(A)$ ou $P(B)$ est nulle.
- (3) Si A et B sont deux évènements indépendants, montrer que \bar{A} et B , A et \bar{B} , \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

Exercice 7. — *Tirages dans des urnes.*

L'urne A contient 6 boules blanches et 5 boules rouges. On tire au hasard deux boules de A.

- (1) Calculer les probabilités des évènements suivants, lorsque le tirage est effectué avec remise et sans remise :
 - les deux boules sont blanches

- les deux boules sont de la même couleur
 - l'une au moins des deux boules est blanche
- (2) On considère une deuxième urne B contenant 4 boules blanches et 8 boules rouges. On transfère au hasard 2 boules de B dans A puis on tire au hasard une boule de A . Calculer les probabilités des évènements suivants :
- la boule tirée est blanche.
 - une au moins des boules transférées est blanche, sachant que la boule tirée de A est blanche.

Exercice 8. — *Test PCR.*

Pour savoir si une personne est atteinte du COVID-19, on procède à un test PCR. Si la personne est effectivement malade, ce test donne un résultat positif dans 83% des cas (sensibilité). Mais ce test donne aussi un résultat positif pour 1% des personnes non atteintes (spécificité). Sachant que la prévalence de la maladie dans la population globale est de 1 pour 100, calculer la probabilité pour qu'une personne prise au hasard soit malade si son test est positif. Calculer également la probabilité qu'une personne prise au hasard soit en bonne santé si son test est négatif. Discuter.

Exercice 9. — *Rendez-vous et probabilités.*

Aglaë et Sidonie ont décidé de se retrouver au restaurant universitaire entre 12h00 et 13h00. Chacune a promis à l'autre de ne pas l'attendre plus de 10 minutes. Aglaë et Sidonie arrivent au restaurant de façon indépendante. Aglaë peut arriver à 12h et x minutes ($x \in \{0, 1, \dots, 59\}$) avec la même probabilité pour tout x . Sidonie peut arriver au restaurant à 12h00, 12h15 ou 12h30 avec la même probabilité.

- (1) Modéliser la situation
- (2) Quelle est la probabilité qu'Aglaë et Sidonie se rencontrent ?
- (3) Aglaë arrive à 12h24. Quelle est la probabilité qu'elle rencontre Sidonie ?
- (4) Aglaë arrive à 12h24 et ne trouve pas Sidonie. Quelle est la probabilité que Sidonie arrive avant le départ d'Aglaë ?