

SUJETS DE TD

TABLE DES MATIÈRES

Gain et dé	1
Tu t'es vu quand t'as bu ?	1
Jeu de dé	1
Strategie pour QCM	2
Panne de machine	2
Commercialisation de lecteur MP3	2

Exercice 1. — *Gain et dé.*

- (1) On jette un dé équilibré. Si un nombre pair sort, on gagne 2 €. Si un nombre impair sort, on perd 3 €. Combien gagne-t-on en moyenne ?
- (2) On jette deux dé équilibrés. Si la somme est un nombre premier, on gagne 2€; si la somme est un multiple de 2 (autre que 2, qui lui est un nombre premier), on perd 3€; si la somme est un autre nombre, on gagne 5€. Quel est le gain moyen ?

Exercice 2. — *Tu t'es vu quand t'as bu ?.*

Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clefs dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. On pensera à utiliser l'événement $A_i \in \mathbb{N} = \text{"On ouvre la porte à l'essai } i\text{"}$

- (1) On suppose que le gardien essaie les clefs une à une sans utiliser deux fois la même. Donner la loi de X , son espérance et sa variance. On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (2) Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clefs à chaque tentative. Donner la loi de X son espérance et sa variance.
- (3) Le gardien est ivre un jour sur trois. Sachant qu'un jour n tentatives ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le gardien ait été ivre ce jour là? Calculer la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 3. — *Jeu de dé.*

On jette 5 dés non truqués. Après le premier lancer, on reprend et on lance les dés qui n'ont pas donné de six, jusqu'à ce qu'on obtienne 5 six. Soit X le nombre de lancers nécessaires. Soit $X_{i=1,\dots,5}$ le nombre de lancé nécessaires pour que le i ème dé amène un 6 pour la première fois.

- (1) Calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- (2) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geq k)$$

- (3) Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir les 5 six ?
-

Exercice 4. — *Strategie pour QCM.*

On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On notera $X_{i=1,\dots,20}$ le résultat de la question i . $X_i = 1$ si la réponse est correct, 0 sinon.

- (1) Quelle est la loi des X_i ?
 - (2) On lui attribue un point par bonne réponse. Soit Y le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de Y ?
 - (3) On propose au candidat de donner deux réponses possibles par questions (un premier vœux et un deuxième œux). On lui attribue alors 1 point si son premier vœux est correct et 1 point si son deuxième vœux est correct. Soit Z le nombre de 1 points obtenus lors de ces 22 seconds choix. Quelle est la loi de Z ?
 - (4) Soit S le nombre total de points obtenus. Déterminer k tel que $S = k$ pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.
-

Exercice 5. — *Panne de machine.*

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75%; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

- (1) Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
 - (2) Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
 - (3) Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X ?, son espérance, sa variance ?
 - (4) Calculer $P[X = 5]$.
-

Exercice 6. — *Commercialisation de lecteur MP3.*

Une entreprise fabrique des lecteurs mp3, dont 6% sont défectueux. Chaque lecteur mp3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité rejette 98% des lecteurs mp3 défectueux et 5% des lecteurs mp3 fonctionnant correctement. On note :

- D l'évènement : "le lecteur mp3 est défectueux";
- R l'évènement : "l'unité de contrôle rejette le lecteur mp3".

- (1) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
- (2) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur mp3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
- (3) Calculer la probabilité qu'un lecteur mp3 ne soit pas rejeté.
- (4) Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur mp3 peut être commercialisé. Un lecteur mp3 est commercialisé si
 - Commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs;
 - Détruit s'il est rejeté au moins deux fois;
 - Commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur mp3 s'élève à 50€. Son prix de vente est de 120€ pour un lecteur avec logo et 60€ pour un lecteur sans logo. On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur mp3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

- (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G
- (b) Calculer l'espérance de G . Interpréter le résultat.