SUJETS DE TD

Table des matières

Exercice 1. — *Loi géométrique.* Soit X une variable de loi géométrique de paramètre p. Calculer sa fonction génératice.

Exercice 2. — *Loi binomiale.*
Calculer les 3 premiers moments d'une variable binomiale $S_n \sim b(n, \alpha)$, à l'aide de sa fonction génératrice.

Exercice 3. — *Chasse aux champignons.* On modélise le nombre de champignons ramassés par une variable de Poisson N de paramètre λ. Chaque champignon, indépendamment des autres, a la probabilité p d'être vénéneux et $(1-p)$ d'être comestible.

(1) Quelle est la probabilité d'avoir ramassé au moins un champignon vénéneux ?

(2) Quel est le nombre moyen de champignons vénéneux ?

Exercice 4. — *Nombres d'amis.* On s'intéresse à modéliser deux variables aléatoires

$$X = \text{“nombre de personnes rencontrées au cours de la vie”},$$

et,

$$N = \text{“nombre d'amis faits au cours de la vie”}.$$

On suppose que X est une variable de Poisson de paramètre λ et que chaque personne rencontrée à la probabilité p de devenir un ami, et la probabilité $1-p$ de devenir un ennemi.

(1) Trouver la probabilité de se faire exactement k amis sachant qu'on a rencontré n personnes, c'est à dire $P(N = k/X = n)$.

(2) Calculer $P(N = k)$ pour tout entier $k \geq 0$. Quel type de loi est-ce ?

(3) Quelle est la probabilité de se faire au moins un ami, pour $\lambda = 100$ et $p = 0,01$?

(4) En moyenne, combien d'amis se fait-on au cours de la vie dans notre modèle ?

On rappelle que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Exercice 5. — *Collecte.* A l'occasion d'une quête pour la croix bleue, des bénévoles vont de porte en porte demander des pièces de 1,2 ou 5 centimes. Ils ramènent un nombre aléatoire N de pièces et on suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que chaque pièce peut-être, indépendamment de tout, une pièce de 1,2 ou 5 centimes avec les probabilités suivantes

$$P(\text{ pièce de } 5c) = \frac{1}{6}, \quad P(\text{ pièce de } 2c) = \frac{1}{3}, \quad P(\text{ pièce de } 1c) = \frac{1}{2}.$$

(1) Lorsque $N = 2$, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une pièce de 5c ?

(2) En général, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une pièce de 5c ?

(3) Pour un entier i, on définit X_i comme étant la valeur de la i-ème pièce (donc $X_i \in \{1, 2, 5\}$), et la fortune, notée C, s'écrit comme

$$C = X_1 + \cdots + X_N, \quad \text{pour } N \geq 1, \quad \text{et } C = 0 \text{ pour } N = 0.$$

Trouver une expression de $G_c(z) = E[z^C]$, en fonction de $g(z) := E[z^{X_1}]$ et de $G_N(z) = E[z^N]$.

(4) Calculer $E[C]$.
