Licence 3 IST
Probabilités

SUJETS DE TD

Table des matières

Exercice 1. — *Calcul de loi continue.*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

On a bien $f(x) \geq 0 \, \forall x$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}\, x &= \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\, x \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) Soit X une variable aléatoire continue dont la loi a pour densité f. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = X^2$.

On part de la définition de la fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_Y(x) = P(Y \leq x) &= P(X^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}),\ x \geq 0 \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t) \mathrm{d}\, t, ,\ x \geq 0 \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} t e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}\, t,\ x \geq 0 \\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^{+\sqrt{x}},\ x \geq 0 \\ &= -e^{-\frac{x}{2}} + 1,\ x \geq 0 \end{aligned}$$

(3) En déduire la densité de la variable aléatoire Y.

On a

$$\begin{cases} f_Y(x) = F'_Y(x) & = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}},\ \text{pour } x \geq 0 \\ & = 0,\ \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

On reconnait une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$

(4) Calculer l'espérance et la variance de Y .

On calcule l'espérance

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{Y}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) \mathrm{d}\, x \\ &= \int_{-0}^{+\infty} x \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{2} \left[-2x e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} -2 e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}\, x \\ &= 0 + \left[-2 e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On calcule le moment d'ordre 2

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x) \mathrm{d}\, x &= \int_{-0}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{2} \left[-2x^2 e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 4x e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}\, x \\ &= 2 \int_0^{+\infty} 4x e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}\, x \\ &= 8 \text{ d'après le résultat ci-avant.} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sigma^2 = 8 - 2^2 = 4$$

Exercice 2. — *Loi exponentielle symétrique.*

Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle $\lambda > 0$ et ε une variable aléatoire discrète indépendante de Y et telle que $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon) = -1) = \frac{1}{2}$. Montrer que la loi de la variable aléatoire $Z = \varepsilon Y$ possède une densité et la calculer. Cette loi est appelée loi exponentielle symétrique.

$$\begin{aligned}
F_Z(x) = P(Z < x) = P(\varepsilon Y < x) &= P(Y < x et \varepsilon = 1) ou (-Y < x et \varepsilon = -1) \\
&= P(Y < x)P(\varepsilon = 1) + P(Y > -x)P(\varepsilon = -1) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}\int_{-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}\int_{-x}^{0} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}\int_{-x}^{0} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

— $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda |t|} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

— $x \leq 0$

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \frac{1}{2}\int_{-x}^0 \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{\lambda t} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda |t|} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \lambda e^{-\lambda |t|} \mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}$$

On en déduit

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda |t|} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. — *loi d'un couple à densité, lois conditionnelles.*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la densité est concentrée dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$ et vaut :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = ye^{-y(x+1)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}(x,y)$$

(1) Vérifier que c'est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

on a bien $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ye^{-y(x+1)}\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y \\
&= \int_0^{+\infty}\left[-e^{-y(x+1)}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}\,y \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}\,y \\
&= \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(2) Déterminer la densité marginale de Y

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}\,x = \int_0^{+\infty} ye^{-y(x+1)}\mathrm{d}\,x \\
&= e^{-y}
\end{aligned}$$

(3) Calculer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ (on constatera qu'il s'agit d'une densité exponentielle dont le paramètre dépend de y). Calculer l'espérance de cette loi conditionnelle.

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{ye^{-y(x+1)}}{e^{-y}} \\
&= ye^{-yx}
\end{aligned}$$

on a donc $X|Y \sim \mathcal{E}(y)$. Ce qui donne $\mathrm{E}\left[\mathrm{X|Y = y}\right] = \frac{1}{y}$

(4) Calculer la densité marginale de X , puis la densité conditionnelle de Y sachant X. Est-ce une loi connue ?

La densité marginale de X

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}\,y = \int_0^{+\infty} y e^{-y(x+1)}\mathrm{d}\,y \\
&= \left[\frac{-y}{x+1}e^{-y(x+1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+1}e^{-y(x+1)}\mathrm{d}\,y \\
&= \left[\frac{1}{(x+1)^2}e^{-y(x+1)}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

et la densité conditionnelle de Y sachant X

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= y(x+1)^2 e^{-y(x+1)}
\end{aligned}$$

qui n'est pas une loi connue.

Exercice 4. — *couple à densité gaussienne, conditionnement.*

On considère le couple $X = (X_1, X_2)$ de variable aléatoire admettant la densité

$$f_X(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

avec $-1 < \rho < 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $m_1 \in \mathbb{R}$, $m_2 \in \mathbb{R}$

(1) Vérifier que

$$f_X(x_1,x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x_2-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\}$$

Pour la constante de normalisation on a bien

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Pour la partie de l'exposant dans les exponentielles

$$\begin{aligned}
-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} &= -\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} - \frac{\rho^2(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \\
&\quad + \frac{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_2-m2)(x_1-m_1)}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \\
&= -\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} - \frac{(x_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} + \frac{\rho(x_2-m2)(x_1-m_1)}{2\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\
&= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]
\end{aligned}$$

(2) En déduire que la loi marginale de X_1 est la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$.

Loi marginale de X_1

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2)\mathrm{d}\, x_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x_2-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\} \mathrm{d}\, x_2 \\
&= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x_2-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\} \mathrm{d}\, x_2
\end{aligned}$$

On reconnait une densité normale $\mathcal{N}\left(m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1), 2\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$ à l'intérieur de l'intégrale qui vaut donc 1. Ainsi, on a

$$X_1 \sim \mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$$

(3) Quelle est l'espérance du couple $X = (X_1, X_2)$? Peut-on retrouver la loi du couple à partir des lois marginales ? A quelle condition X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

On peut intervertir les rôle de X_1 et X_2. On a donc $X_2 = \mathcal{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$. Et donc

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{X}_{1,2}\right] = (m_1, m_2)\,.$$

On ne peut pas retrouver la loi du couple a partir des marginales, sauf dans le cas $\rho = 0$, on a alors $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$, ie X_1 et X_2 sont indépendantes.

(4) Calculer la matrice de dispersion du couple $X = (X_1, X_2)$ et le coefficient de corrélation linéaire.

On repasse par la définition, plutôt que l'expression calculatoire équivalente

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\right] &= \mathrm{E}\left[(\mathrm{X}_1 - \mathrm{m}_1)(\mathrm{X}_2 - \mathrm{m}_2)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1-m_1)(x_2-m_2) f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)\mathrm{d}\, x_1 \mathrm{d}\, x_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1-m_1)\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2-m_2)\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x_2-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\} \mathrm{d}\, x_2 \mathrm{d}\, x_1
\end{aligned}$$

On pose les changements de variables $u_1 = x_1 - m_1$ et $u_2 = x_2 - m_2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\right] = &\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(u_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}u_1)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\} \mathrm{d}\,u_2 \mathrm{d}\,u_1 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} u_1 \mathrm{d}\,u_1 \\
&= \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2 \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\
&= \rho\sigma_2\sigma_1
\end{aligned}$$

et donc le coefficient de corrélation linéaire vaut ρ. La matrice de dispersion s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_2\sigma_1 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

(5) Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1 ? Quelle meilleure prédiction peut-on faire pour la valeur de X_2 si on observe $X1 = x1$?

$$\begin{aligned}
f_{X_2|X_1}(x_2) &= \frac{f_{(X_2,X_1)}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \\
&= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\}
\end{aligned}$$

La meilleure prédiction que l'on puisse faire est celle qui maximise les chances de se réaliser, autrement dit celle qui permet de maximiser $f_{X_2|X_1}(x_2)$, ie $x_2 = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1)$

Exercice 5. — *Système de communication numérique.*

Dans les systèmes de communications numériques (téléphone, lecteurs CD, ordinateurs...) les signaux sont souvent quantifiés sur 1 bit et ne prennent donc que les valeurs 0 ou 1. Soit X et Y les variables aléatoires donnant les valeurs d'un tel signal à deux instants distincts. Elles sont caractérisées par la distribution de probabilité conjointe

$$\begin{aligned}
P(X = 0, Y = 0) = a, \quad P(X = 0, Y = 1) = b \\
P(X = 1, Y = 0) = c, \quad P(X = 1, Y = 1) = d
\end{aligned}$$

(1) Quelle relation doivent vérifier les quatre nombre a, b, c et d ?

On doit avoir

$$a + b + c + d = 1$$

(2) Calculer l'espérance $\mathrm{E}[\mathrm{XY}]$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{XY}] &= 0\cdot 0\cdot a + 0\cdot 1\cdot b + 1\cdot 0\cdot c + 1\cdot 1\cdot d\\ &= d\end{aligned}$$

(3) Calculer les distributions marginales de X et de Y. En déduire leur espérance.

Distributions marginales de X

$$\begin{aligned}P(X=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1) = a+b\\ P(X=1) &= P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1) = c+d\end{aligned}$$

Distributions marginales de Y

$$\begin{aligned}P(Y=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0) = a+c\\ P(Y=1) &= P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1) = b+d\end{aligned}$$

et leurs espérances

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{X}] &= 0\cdot P(X=0)+1P(X=1) = c+d\\ \mathrm{E}[\mathrm{Y}] &= 0\cdot P(Y=0)+1P(Y=1) = b+d\end{aligned}$$

(4) Montrer que X et Y sont décorrélées si

$$d-(c+d)(b+d) = (c+d)(c+a)-c = 0$$

$$\mathrm{Cov}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{E}[\mathrm{XY}]-\mathrm{E}[\mathrm{X}]\mathrm{E}[\mathrm{Y}] = d-(c+d)(b+d)$$

avec $a+b+c+d=1$, on utilise le fait que $(b+d)=1-(a+c)$ et on obtient

$$d-(c+d)(b+d) = (c+d)(c+a)-c$$

(5) Calculer les probabilités $P(X=1|Y=0)$ et $P(X=1|Y=1)$. Que deviennent ces probabilités lorsque la distribution pour X et Y est décorrélée ? Conclusion ?

$$\begin{aligned}P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{c}{a+c} = c+d = P(X=1)\\ P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{d}{b+d} = c+d = P(X=1)\end{aligned}$$

Ici, la décorrélation entraine l'indépendance

Exercice 6. — *Rendez-vous.*

Deux personnes se donnent rendez-vous en un lieu déterminé entre midi et 13 heures. On modélise leur instant d'arrivée par deux variables aléatoires indépendantes X et Y de distribution uniforme sur l'intervalle $[12\text{h}00, 13\text{h}00]$

(1) Soit Z la variable aléatoire désignant le temps d'attente de la première personne arrivée. Quelle est sa densité ?

On a $Z = |Y - X|$

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(|Y - X| < z) = P(-z < X - Y < z) = P(-z + X < Y < z + X)$$

Y est compris entre les deux droites d'équation $y = x + z$ et $y = x - z$, avec $0 \leq z \leq 1$. On trouve que

$$F_Z(z) = P(Z < z) = 1 - (1 - z)^2 = 2z - z^2 \ \forall z \in [0, 1]$$

et donc

$$f_Z(z) = 2 - 2z = 2(1 - z) \ \forall z \in [0, 1]$$

(2) En supposant que la première personne arrivée s'en aille au bout d'une attente égale à E [Z], quelle est la probabilité que les deux personnes se rencontrent ?

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{Z}] = \int_0^1 z2(1 - z)\mathrm{d}\,z = \left[z^2 - \frac{2}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 20 \text{ min}$$

On cherche la probabilité pour que le temps d'attente soit inférieur à 20 min.

$$P\left(Z < \frac{1}{3}\right) = F_Z\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

Exercice 7. — *Durée de vie d'un circuit électronique.*

La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit électronique est une variable aléatoire T dont la fonction de répartition F est définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Donner la densité de probabilité f_T de T

$$f_T(t) = F'(t) = \begin{cases} te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(2) Calculer l'espérance de T

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right] &= \int_{\mathbb{R}} t f_T(t) \mathrm{d}\, t = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}\, t \\ &= \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}\, t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}\, t\end{aligned}$$

On sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 \text{ (densité d'une loi normale)}$$

donc

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{T}\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

(3) Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue à fonctionner encore durant au moins 2 ans ?

On cherche

$$\begin{aligned}P(T \geq 3 | T \geq 1) &= \frac{P(T \geq 3 \text{ et } T \geq 1)}{P(T \geq 1)} \\ &= \frac{P(T \geq 3)}{P(T \geq 1)} \\ &= \frac{1 - F_T(3)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-\frac{3^2}{2}})}{1 - (1 - e^{-\frac{1^2}{2}})} \\ &= e^{-4} \simeq 2\%\end{aligned}$$

Remarque : $P(T \geq 3 | T \geq 1) \neq P(T \geq 2) = e^{-2}$, on dit que la loi est à mémoire.

Un équipement électronique est composé de dix circuits identiques et indépendants. Au circuit i ($1 \leq i \leq 10$) est associé la variable aléatoire X_i, avec $X_i = 1$ si la durée de vie du circuit i est inférieure à un an et $X_i = 0$ sinon.

(4) Quelle est la loi du nombre N de circuits dont la durée de vie est inférieure à 1 an ?

On a

$$N = \sum_{i=1}^{10} X_i$$

où on a $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p = P(X \leq 1) = F_T(1) = 1 - e^{-1/2} \simeq 39\%$. Les X_i étant indépendants, on a N qui suit une loi binomiale : $N \sim \mathcal{B}(p, 10)$.

(5) L'équipement est dit en série si la défaillance de l'un de ses circuits entraîne sa défaillance. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1-p)^{10} = 1 - e^{-10/2} \simeq 99\%$$

(6) L'équipement est dit en parallèle si sa défaillance ne peut se produire que si tous ses circuits sont défaillants. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?

$$P(N = 10) = p^1 0 = \left(1 - e^{-1/2}\right)^{10} \simeq 0.009\%$$

Exercice 8. — *Stockage de déchets toxiques.*

On utilise des fûts pour stocker un déchet toxique liquide. On suppose que sur la très longue période de stockage les fûts se déradent. En particulier, des perforations aléatoires apparaissent sur les fûts à cause de la corrosion. Le liquide toxique s'écoule alors par ces perforations. On considère m fûts de hauteur h et on suppose que le nombre de perforations N par fût suit une loi de Poisson de paramètre θ et que ces perforations sont uniformément répartis sur la hauteur du fût. On notera Z_k la variable aléatoire réelle donnant la hauteur de la $k-$ième perforation.

On s'intéresse d'abord à un seul fût.

(1) Quelle est la densité de probabilité des Z_k et leurs propriétés statistiques entre elles et vis-à-vis de N ?

Les Z_k suivent une loi uniforme. On a donc

$$f_{Z_k}(z) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } z \in [0, h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les Z_k sont indépendantes entre elles, et indépendante de N.

On note Z la variable aléatoire correspondant à la hauteur de la perforation la plus basse sur le coté du fût.

(2) Écrire $P(Z > z|N = n)$ en fonction de $P(Z_k > z)$. Puis, en utilisant la fonction de répartition, donner la densité de Z conditionnellement à N (ie. $Z|N$)

$$P(Z > z|N = n) = P(Z_1 > z \cap Z_2 > z \cap \ldots \cap Z_n > z|N = n)$$

les Z_k étant indépendants entre eux et indépendant de N on a

$$\begin{aligned} P(Z > z|N = n) &= \prod_{i=1}^{n} P(Z_1 > z) \\ &= (1 - P(Z_1 < z))^n \\ &= \left(1 - \int_0^z \frac{1}{h} \mathrm{d}\, t\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{z}{h}\right)^n \end{aligned}$$

donc

$$P(Z < z|N = n) = 1 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^n$$

et l'on en déduit la densité

$$f_{Z|N} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} P(Z < z|N = n) = \frac{n}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{n-1}$$

(3) Calculer le pourcentage moyen $\tau_N = \frac{\mathrm{E[Z|N]}}{h}$ de liquide qu'on peut espérer conserver sachant le nombre de perforations N.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{Z|N}\right] &= \int_0^h z\frac{n}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{n-1} \mathrm{d}\,z \\
&= \frac{n}{h}\left(\left[-z\frac{h}{n}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^n\right]_0^h - \int_0^h -\frac{h}{n}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^n \mathrm{d}\,z\right) \\
&= \frac{n}{h}\left[-\frac{h}{n+1}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{n+1}\right]_0^h \\
&= \frac{h}{n+1}
\end{aligned}$$

donc

$$\tau_N = \frac{1}{n+1}$$

On considère maintenant l'ensemble des m fûts, avec m grand

(4) Quel pourcentage moyen du liquide toxique peut-on espérer conserver, c'est-à-dire $\tau = \frac{\mathrm{E[Z]}}{h}$? On utilisera le fait que $\mathrm{E}\left[\mathrm{Z}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{Z|N}\right]\right]$. Application numérique : $\theta = 5$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{Z}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{Z|N}\right]\right] = \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{N}+1}\right]$$

On sait que $N \sim \mathcal{P}(\theta)$ donc

$$\begin{aligned}
\tau = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}+1}\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{\theta^n}{n!}e^{-\theta} \\
&= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\theta^{n}}{(n)!} \\
&= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\theta^{n}}{(n)!} - \frac{e^{-\theta}}{\theta} \\
&= \frac{e^{-\theta}}{\theta}(e^{\theta}-1) \\
&= \frac{1-e^{-\theta}}{\theta}
\end{aligned}$$

avec $\theta = 5$

$$\tau \simeq 20\%$$