

COURS 1: GÉNÉRALITÉS

---

# TRAITEMENT DU SIGNAL

# PRESENTATION

- ▶ Mail: [matthieu.kowalski@universite-paris-saclay.fr](mailto:matthieu.kowalski@universite-paris-saclay.fr)
- ▶ Site web: <http://hebergement.universite-paris-saclay.fr/mkowalski/>

# INTRODUCTION

## SIGNAL: DÉFINITION INTUITIVE

- ▶ On appelle signal une représentation physique qui transporte une "information" depuis une source vers un destinataire.
- ▶ C'est une grandeur physiquement mesurable par un capteur, pouvant varier avec le temps.



## EXEMPLE: SIGNAL DE MUSIQUE

- ▶ Grandeur mesurée: variation de la pression acoustique



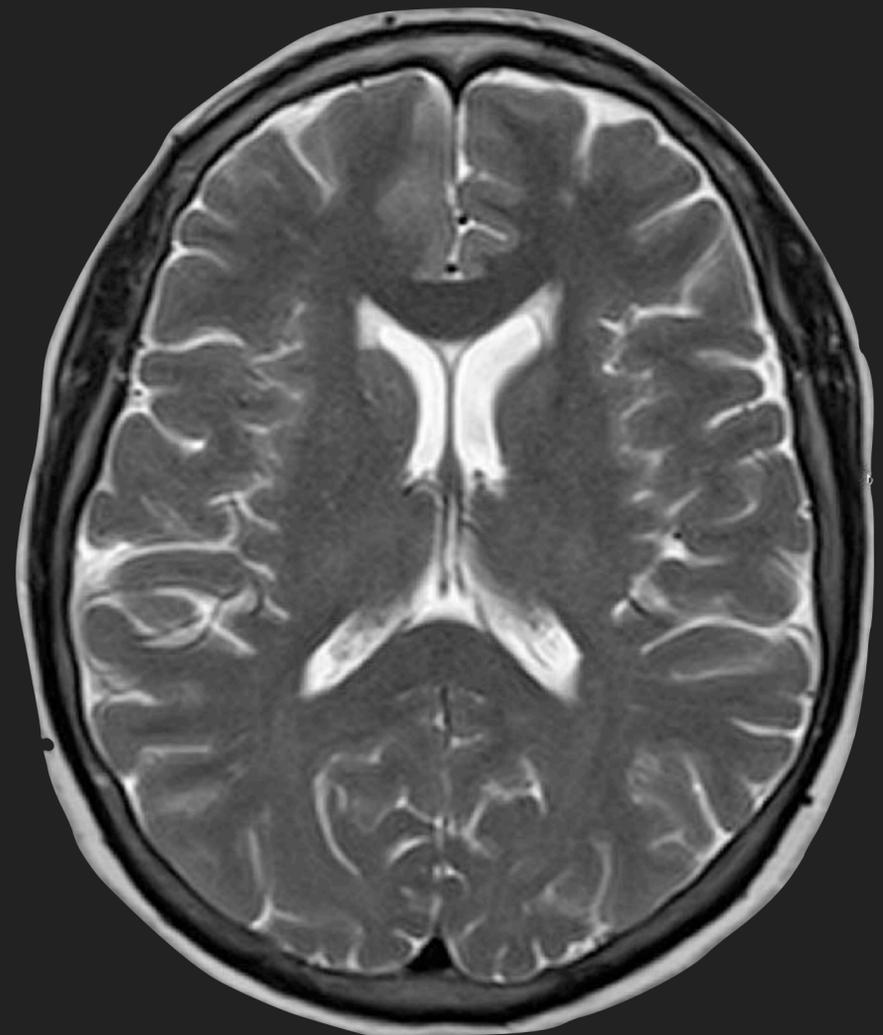
## EXEMPLE: PHOTOGRAPHIE

- ▶ Grandeur mesurée: effet photoélectrique



## EXEMPLE: IRM

- ▶ Grandeur mesurée: champs magnétique



## EXEMPLE: ECHOGRAPHIE

- ▶ Grandeur physique mesurée: effet doppler par ultrason



## DÉTERMINISTE VS ALÉATOIRE

- ▶ **Modèle déterministe:** signaux pouvant être prédits de manière "certaine" à l'aide de descripteurs simples (sa fonction, ses fréquences...)  
**Exemple:** enregistrement d'un chant, photographie...
- ▶ **Modèle aléatoire:** signaux issus de "processus stochastique": chaque "réalisation" partage des grandeurs communes, mais chaque signal est différent.  
**Exemple:** bruit de fond
- ▶ Les deux modèles sont complémentaires  
**Exemple:** signal bruité

# SIGNAUX DÉTERMINISTES: DÉFINITION MATHÉMATIQUE

- ▶ Un signal *analogique* est une fonction d'une variable continue, en général le temps "continue". Soit  $s$  un signal analogique temporel

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned}$$

- ▶ Un signal *numérique* est une fonction d'une variable discrète, en général le temps "discret", c'est à dire **une suite mathématique**. Soit  $s$  un signal numérique temporel

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s[t] = s_t \end{aligned}$$

**Attention !** Tels que définis, les signaux numériques ne sont pas forcément manipulable sur ordinateur, car les suites numériques peuvent être infinies. **C'est un modèle mathématique**

# OBJECTIFS DU TRAITEMENT DU SIGNAL

- ▶ Modéliser
- ▶ Analyser
- ▶ Restaurer
- ▶ Transmettre (Telecom)
- ▶ Compresser
- ▶ ...

# OUTILS DU TRAITEMENT DU SIGNAL

- ▶ Analyse de Fourier
- ▶ Analyse harmonique: temps-fréquence, ondelettes
- ▶ Processus aléatoires (probabilités « classiques » ou « Bayessiennes »)
- ▶ Estimation statistique
- ▶ Théorie de l'information
- ▶ ...

## BUT DE CE COURS

- ▶ Analyse spectrale des signaux déterministes analogiques et numériques
- ▶ Opérations sur les signaux numériques (filtrage)
- ▶ Échantillonnage: comment passer du monde analogique au monde numérique
- ▶ Analyse des signaux aléatoires

# SIGNAUX DÉTERMINISTES: DÉFINITIONS GÉNÉRALES

# CAUSALITÉ

Un signal  $s$  est

- ▶ causal ssi  $s(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- ▶ anti-causal ssi  $s(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$
- ▶ a-causal ssi il n'est ni causal, ni anti-causal

# STABILITÉ

Un signal  $s$  est stable ssi

▶ analogique:  $\|s\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < +\infty$

▶ numérique:  $\|s\|_1 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |s[t]| < +\infty$

# SIGNAL RÉALISABLE

Un signal réalisable est un signal stable et causal

# ÉNERGIE

l'énergie d'un signal est donnée par

▶ analogique:  $\|s\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$

▶ numérique:  $\|s\|_2^2 = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} |s[t]|^2$

## EXEMPLES ET EXERCICES

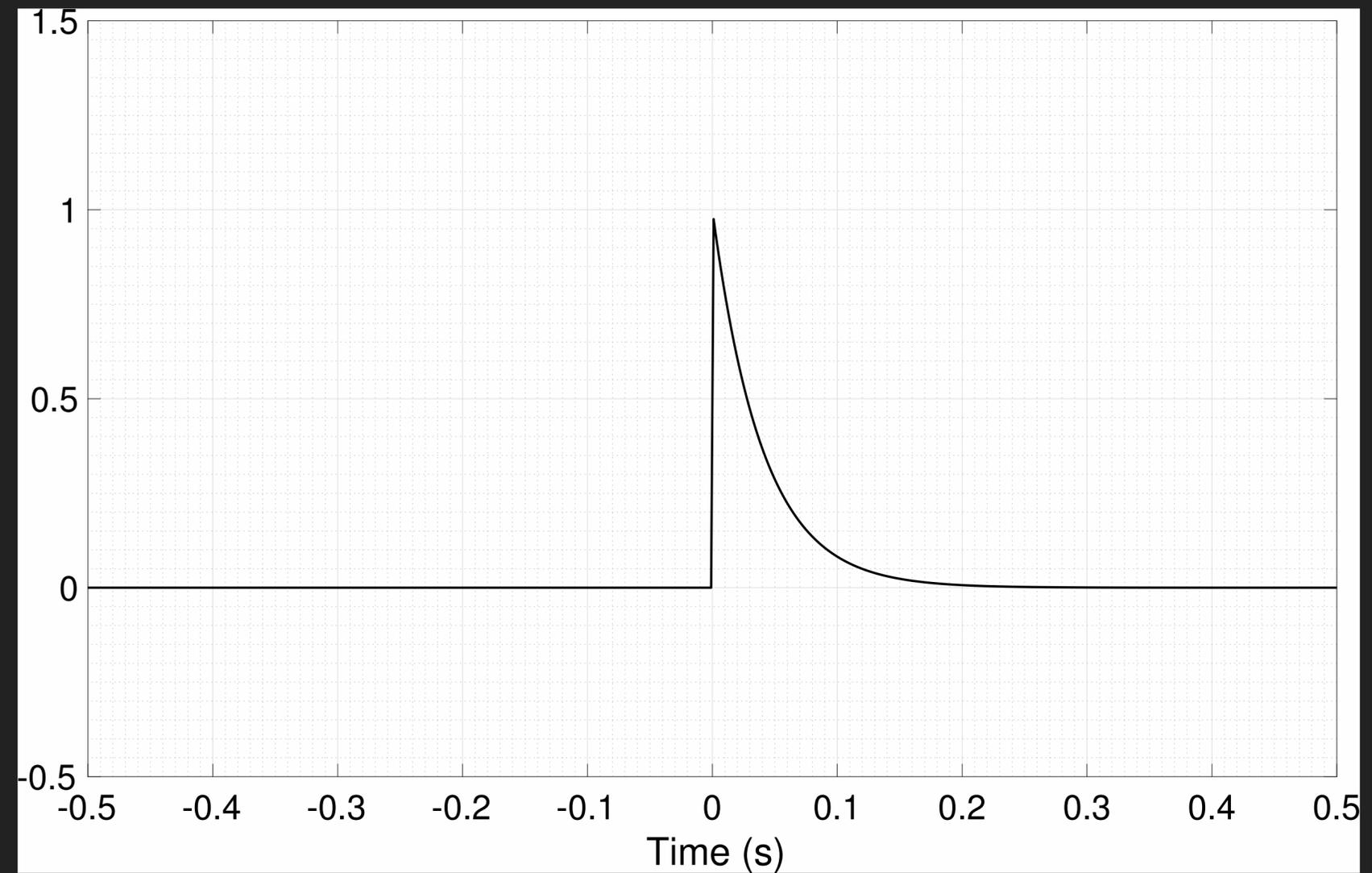
Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable

# EXERCICE 1

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

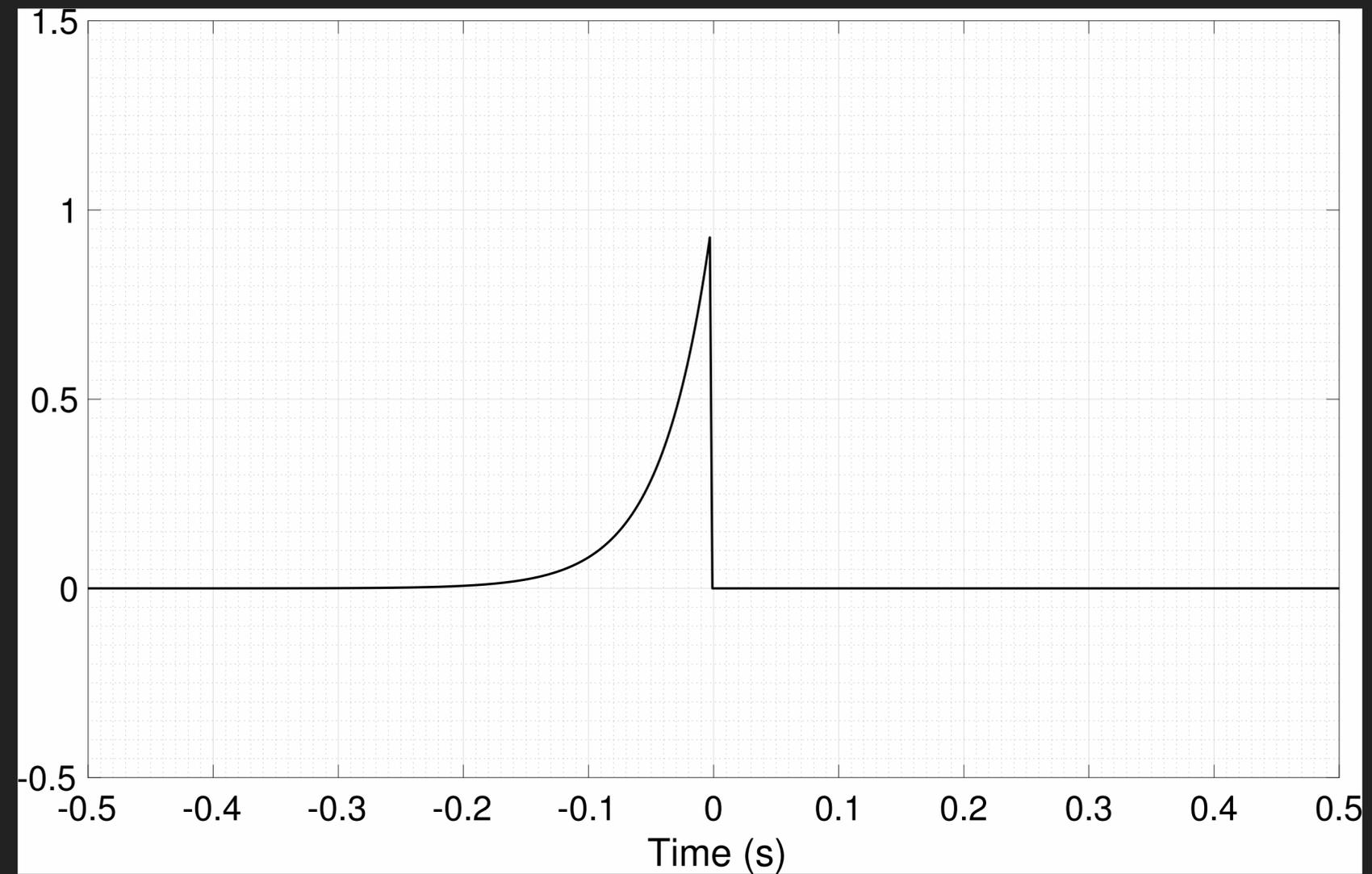
- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



## EXERCICE 2

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

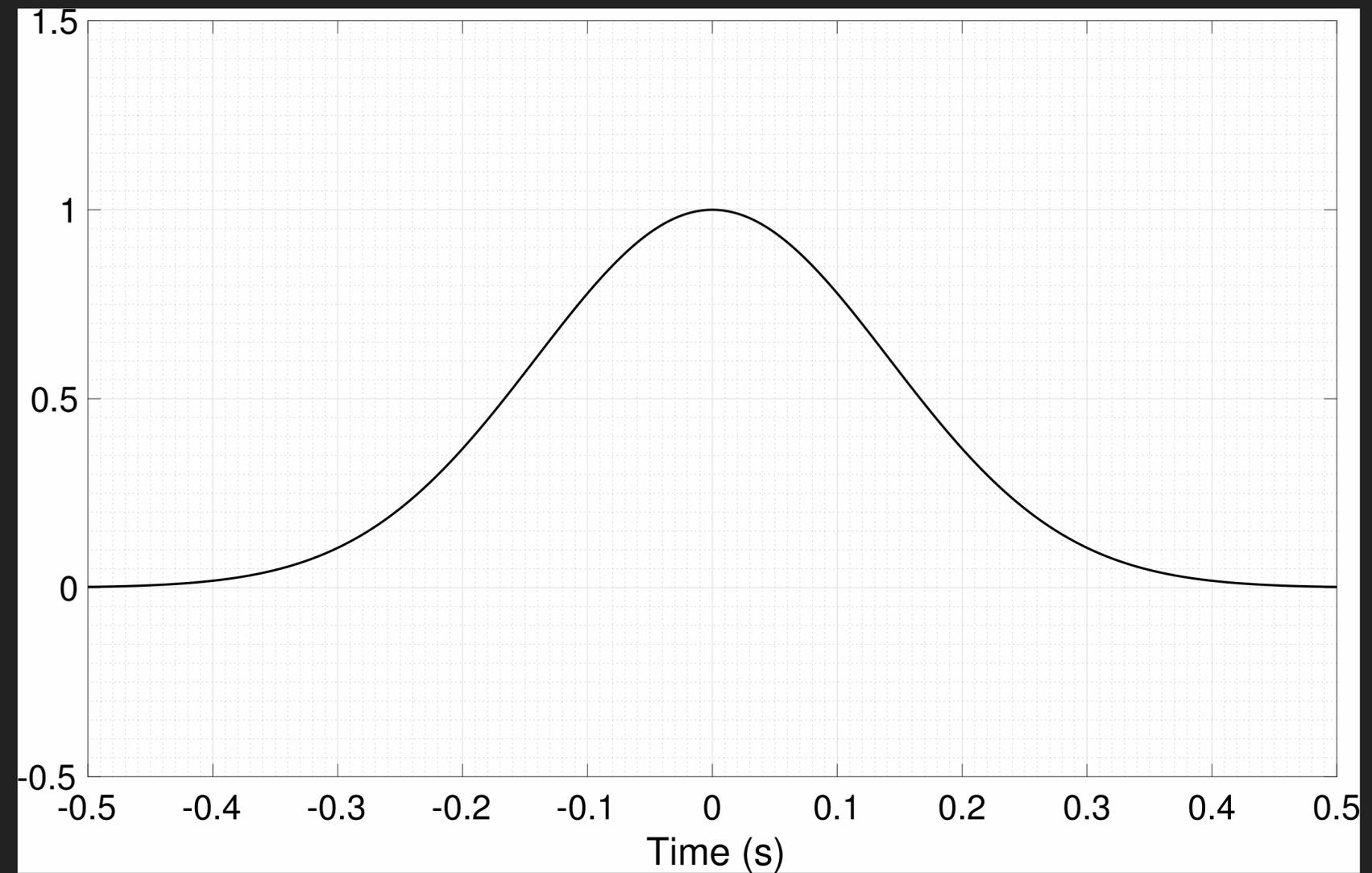
- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



## EXERCICE 3

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

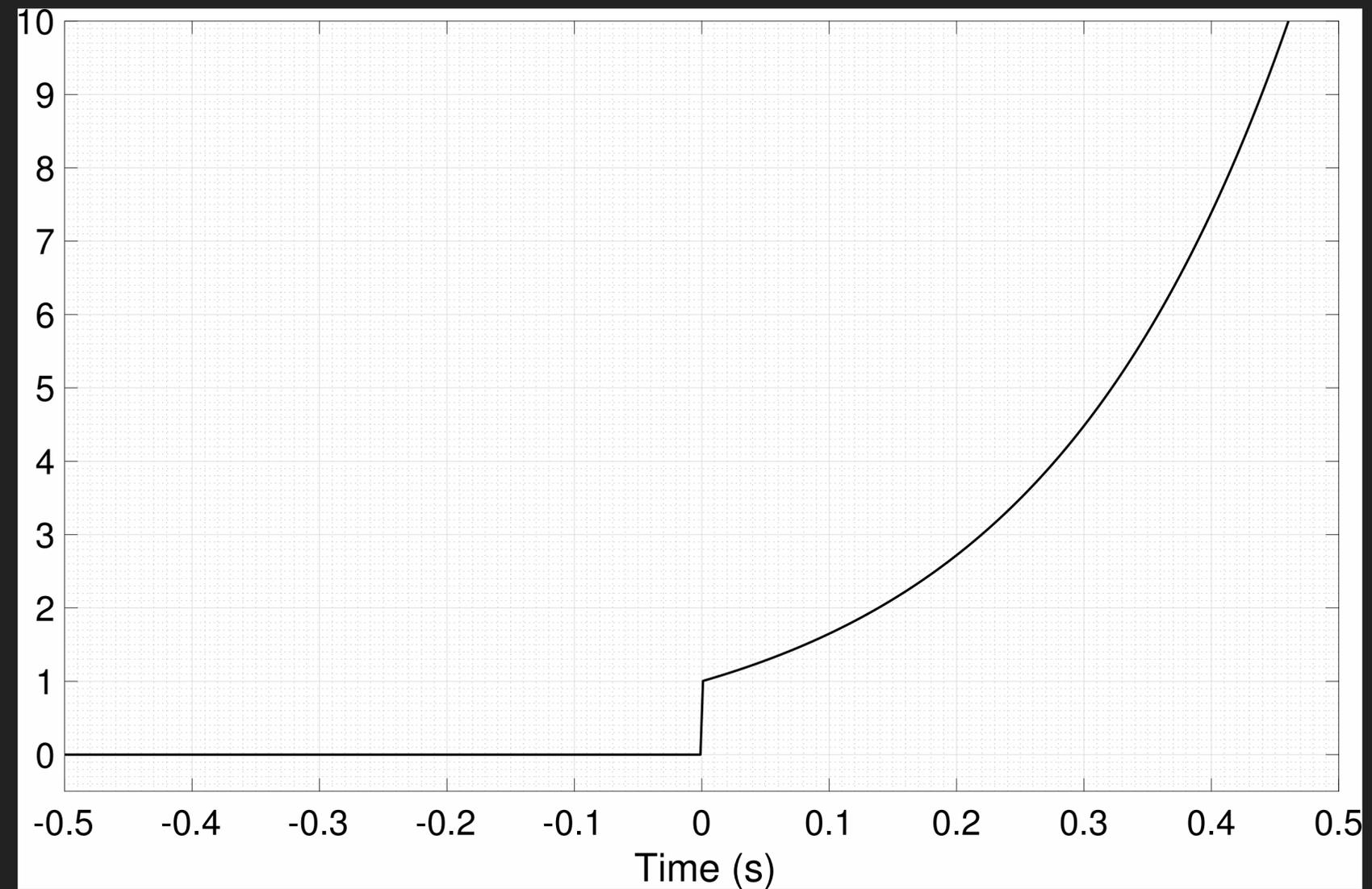
- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



## EXERCICE 4

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

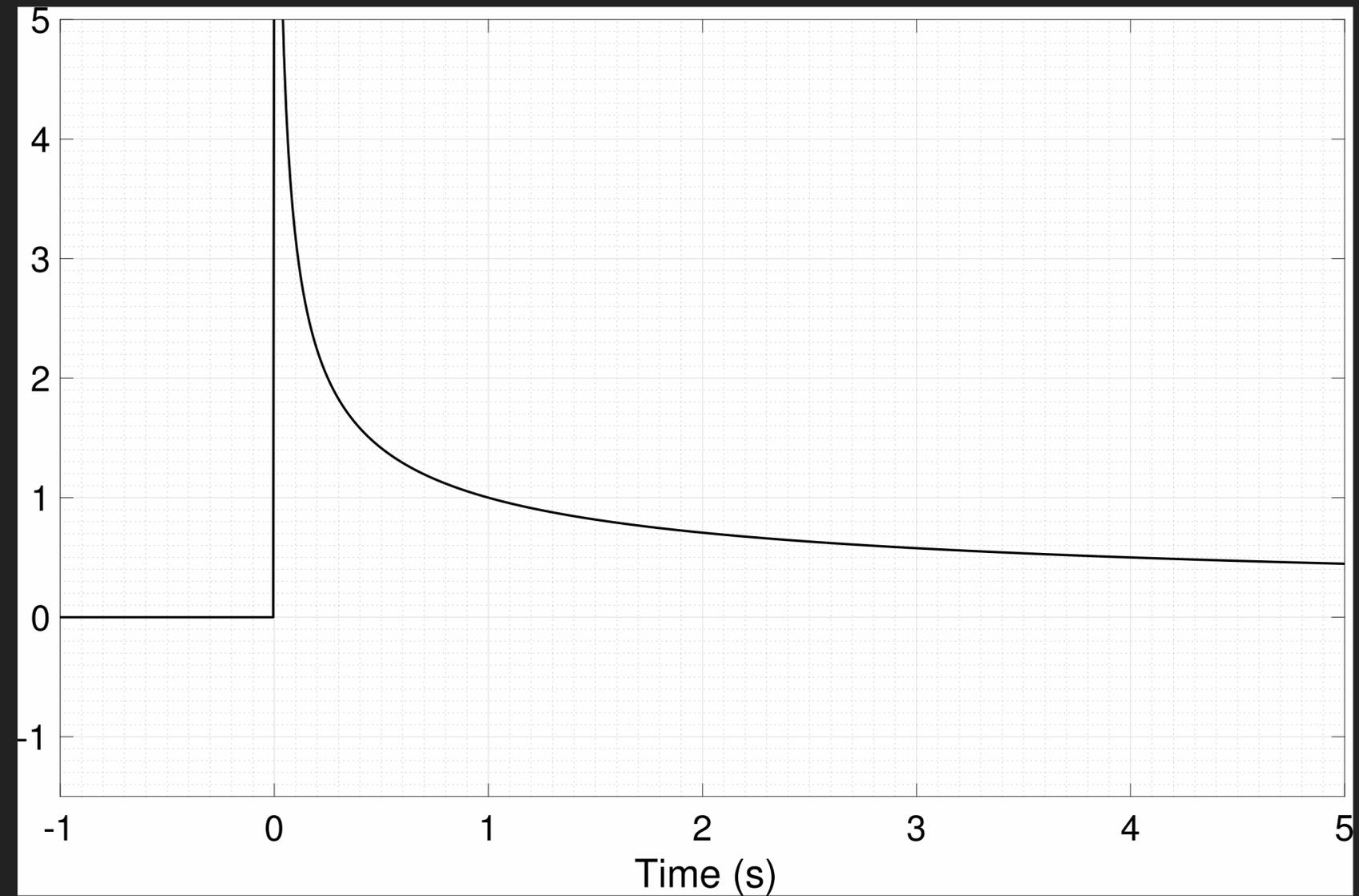
- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



## EXERCICE 5

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

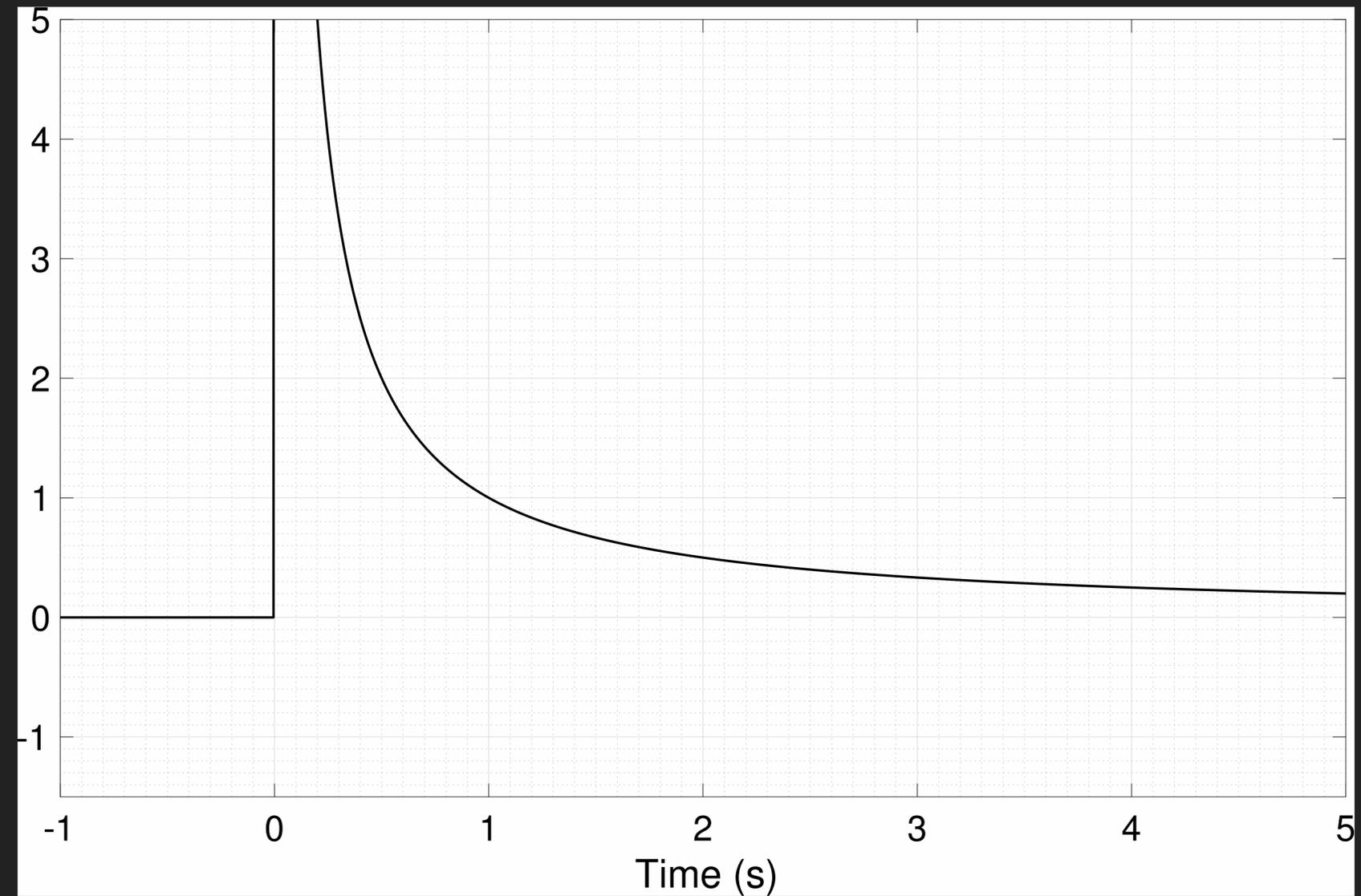
- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



## EXERCICE 6

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

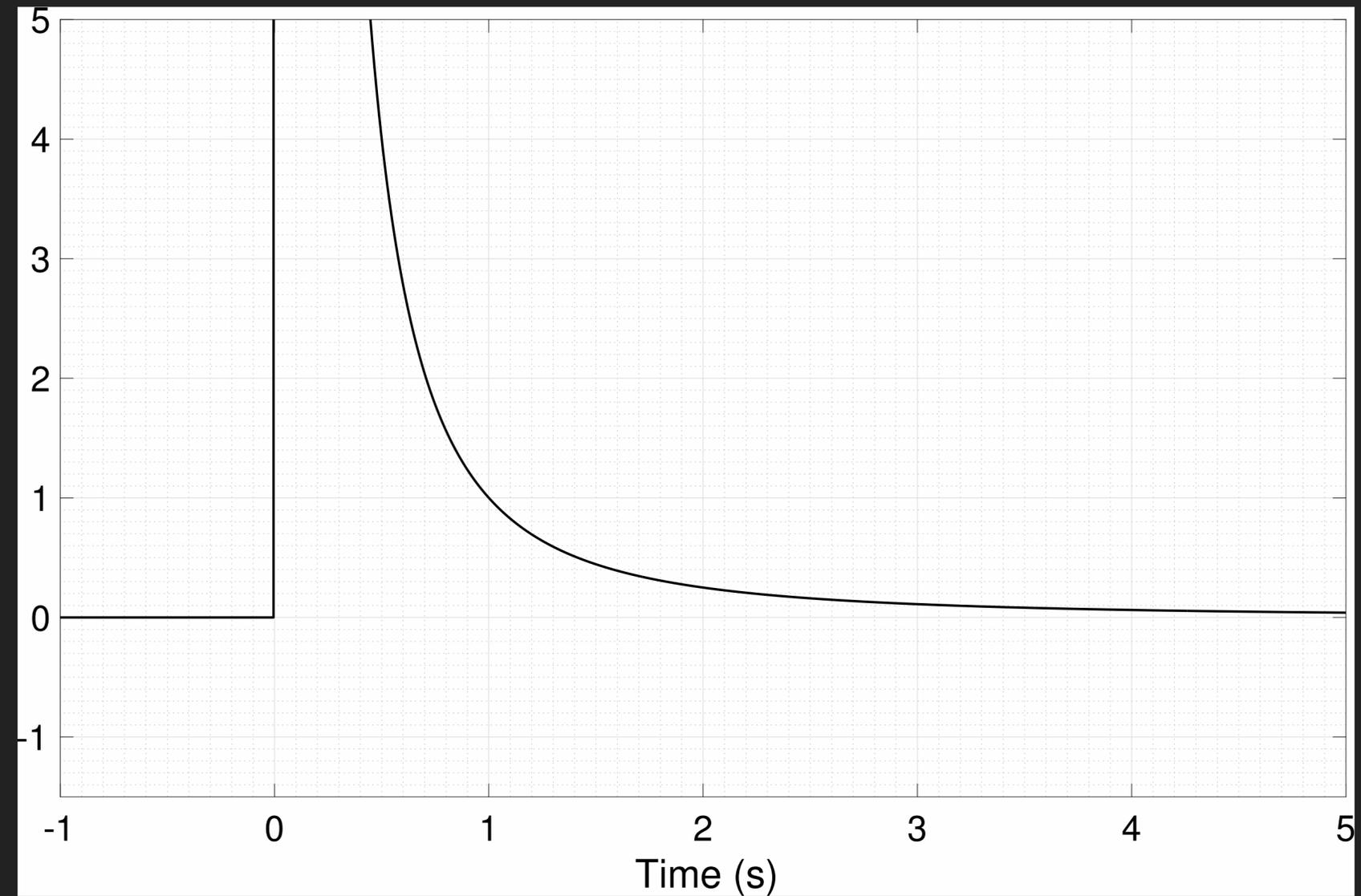
- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



## EXERCICE 7

Dire, graphiquement, si les fonctions suivantes sont

- ▶ Stable
- ▶ Causal
- ▶ D'énergie finie
- ▶ Réalisable



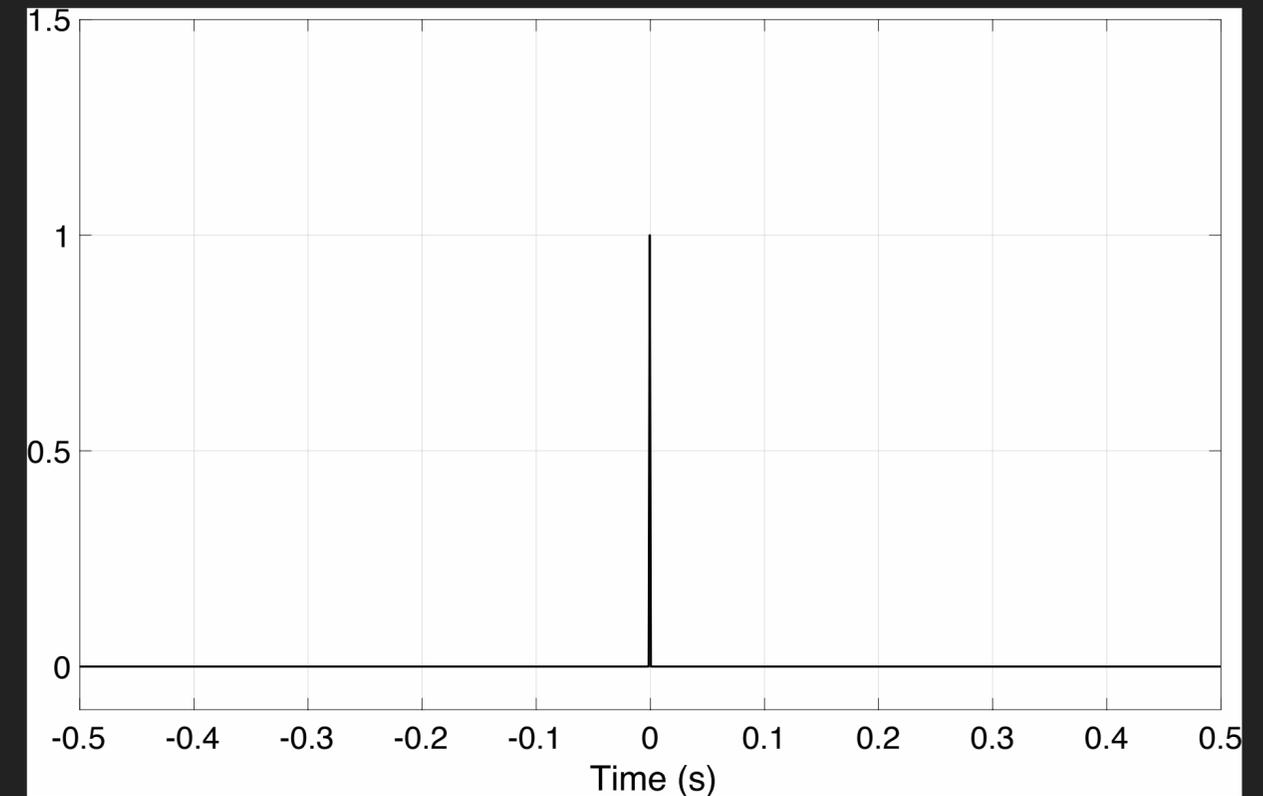
# SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: DIRAC NUMÉRIQUE

L'impulsion de Dirac, notée  $\delta_k[t]$ , est la suite définie par:

$$\delta_k[t] = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est :

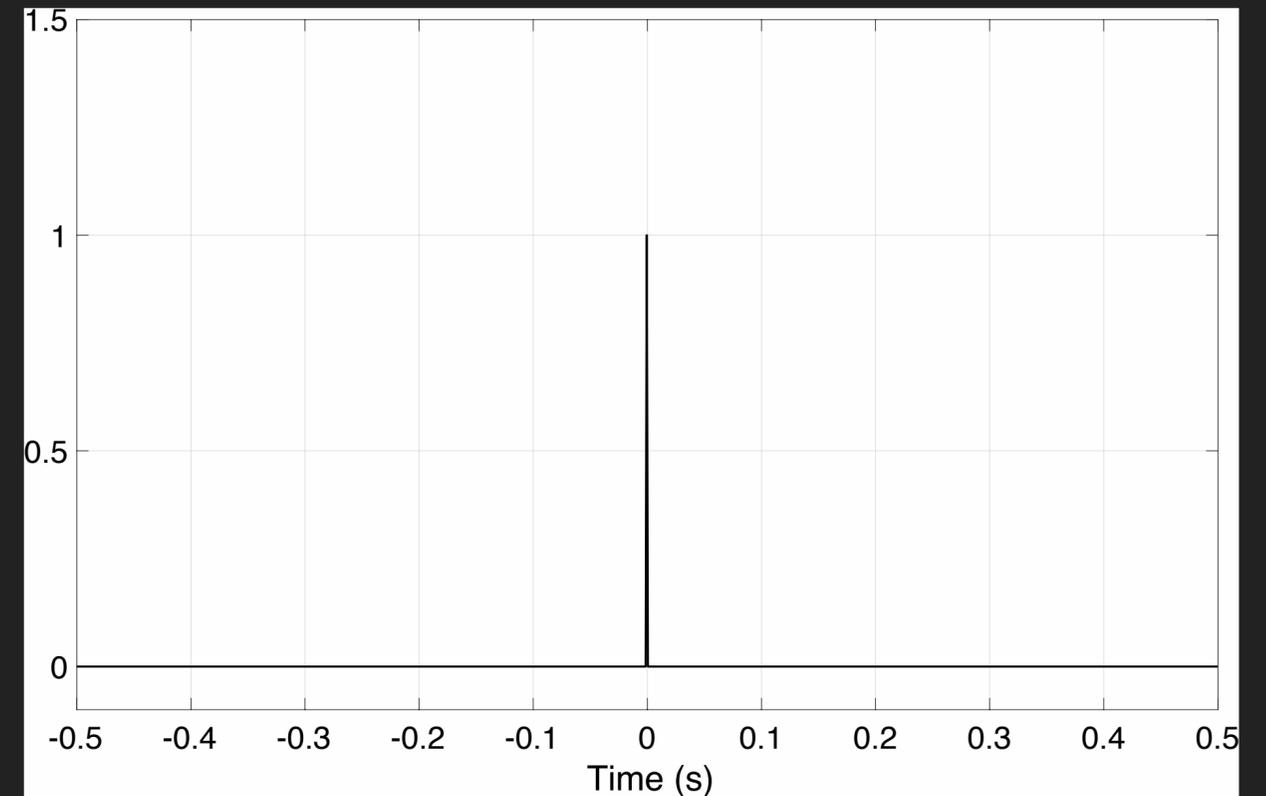
- ▶ Réalisable
- ▶ D'énergie finie



# SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: DIRAC ANALOGIQUE

L'impulsion de Dirac, notée  $\delta_x(t)$ , est la *distribution* telle que pour une fonction  $f$  continue en  $x$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_x(t) dt = f(x)$$



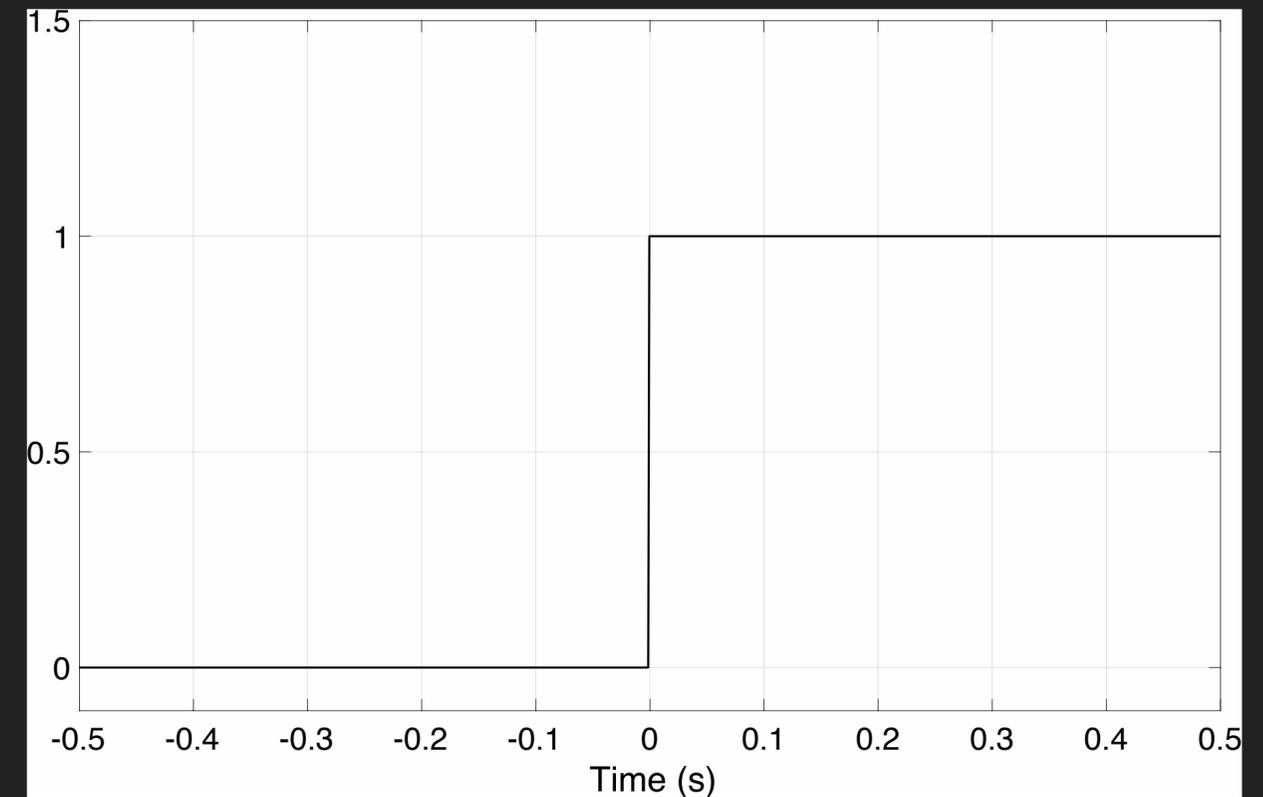
# SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: HEAVISIDE NUMÉRIQUE

Le signal de Heaviside, ou échelon, notée  $\Theta[t]$  est définie par

$$\Theta[t] = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- ▶ Causal
- ▶ Pas réalisable car non stable
- ▶ D'énergie infinie



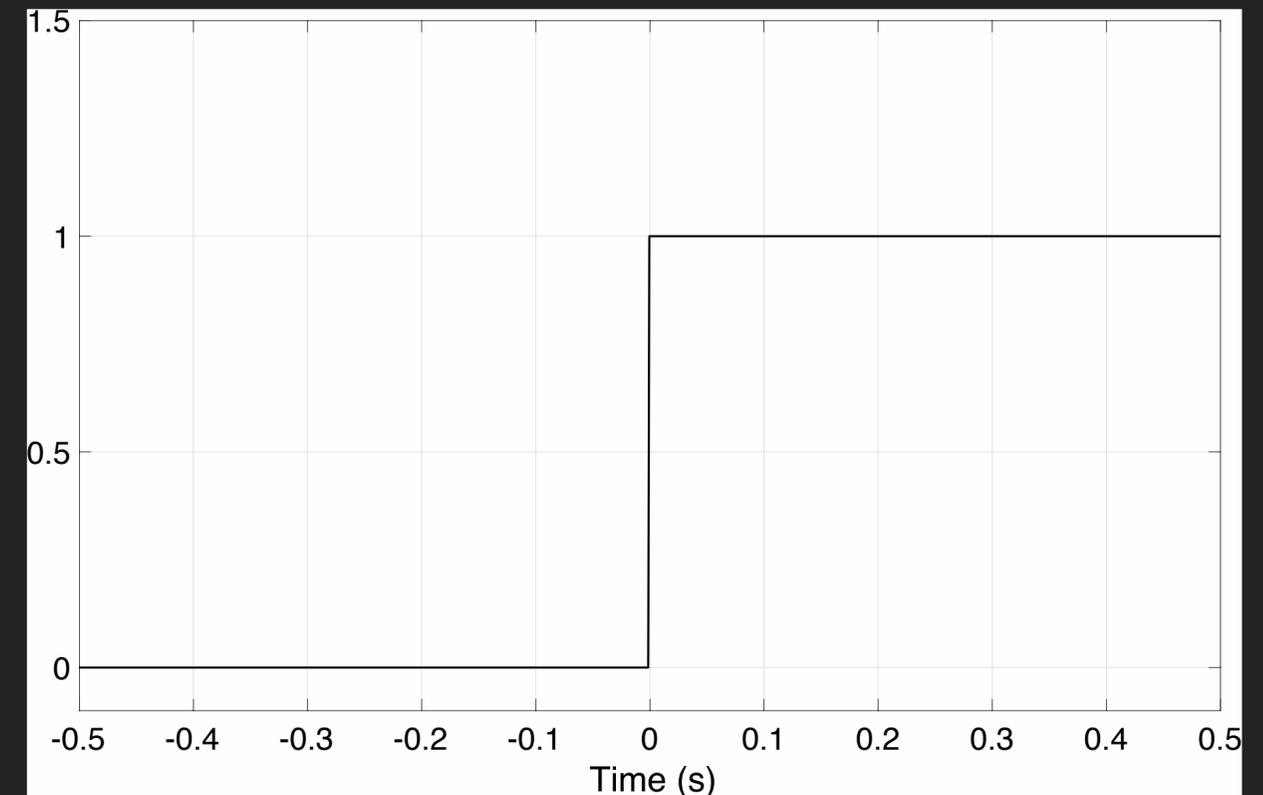
# SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: HEAVISIDE ANALOGIQUE

Le signal de Heaviside, ou échelon, notée  $\Theta(t)$  est définie par

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- ▶ Causal
- ▶ Pas réalisable car non stable
- ▶ D'énergie infinie



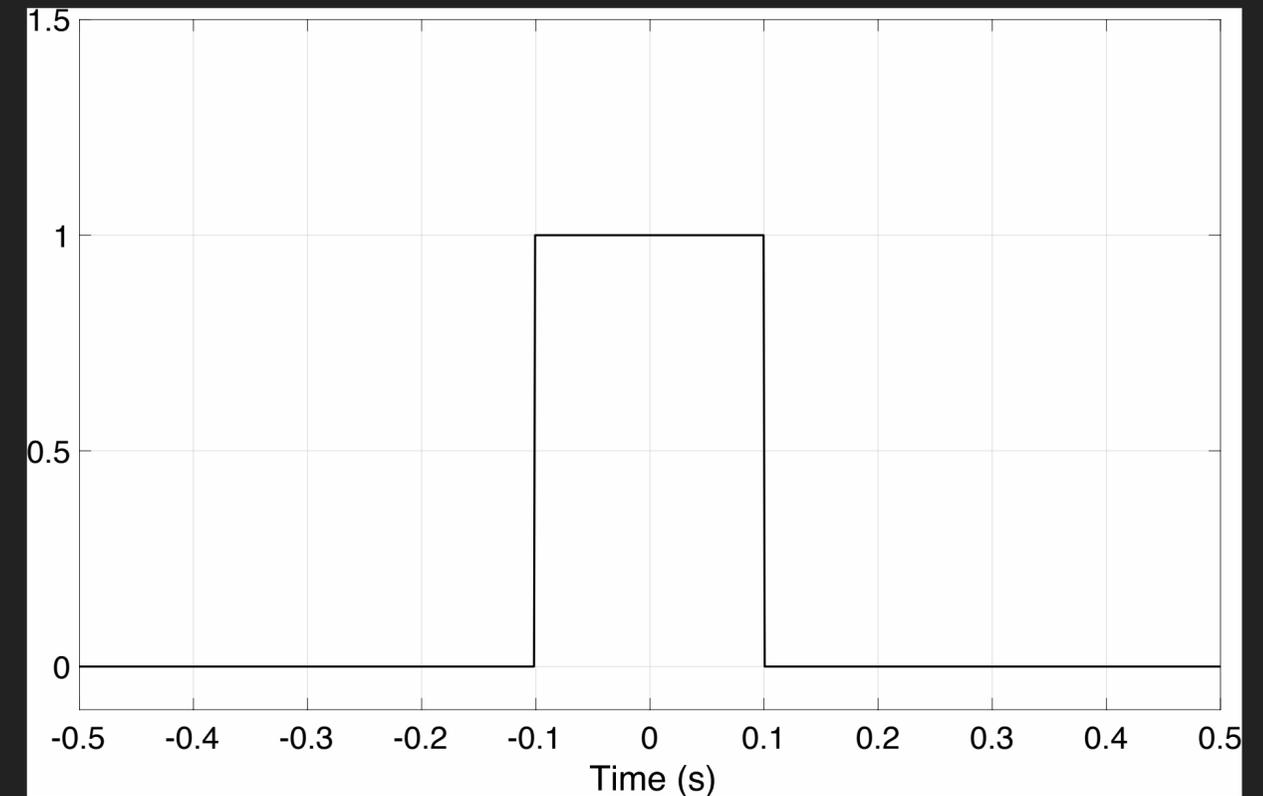
# SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: PORTE NUMÉRIQUE

Le signal porte est la suite définie par

$$\Pi_N[t] = \begin{cases} 1 & \text{si } -N \leq t \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- ▶ Stable
- ▶ Non réalisable car acausal
- ▶ D'énergie finie



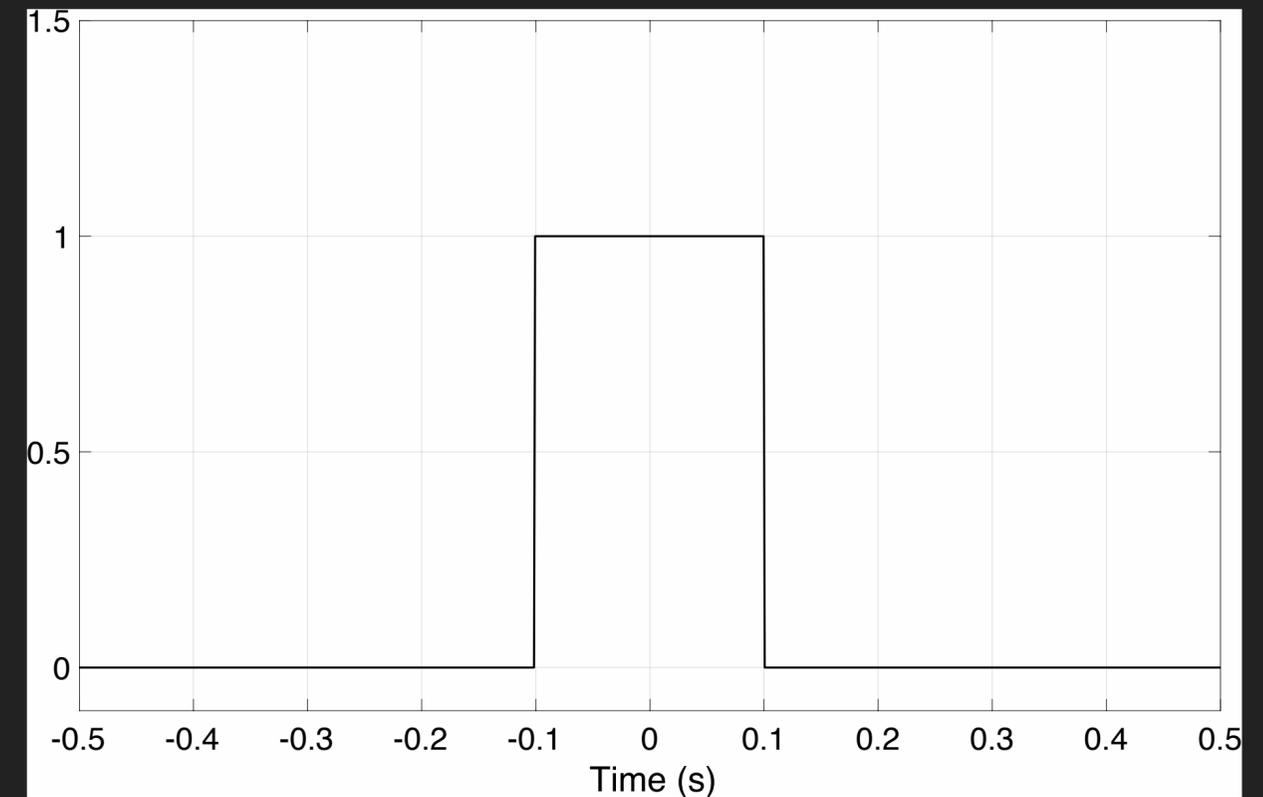
# SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES: PORTE ANALOGIQUE

Le signal porte est la fonction définie par

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -A \leq t \leq A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est:

- ▶ Stable
- ▶ Non réalisable car acausal
- ▶ D'énergie finie



## SIGNAUX « DIGITALS »

Sur machine, les signaux considérés sont des signaux numériques particuliers:

- ▶ Ils sont de taille finie: ils contiennent  $T$  échantillons
- ▶ Ils prennent des valeurs quantifiées (précision finie)
- ▶ Ils sont donc forcément stables et d'énergie finie
- ▶ La causalité dépend uniquement du choix de l'origine des temps

# OPERATIONS SUR LES SIGNAUX

## MODIFICATION D'UN SIGNAL

- ▶ Changement d'amplitude:  $v(t) = a u(t)$
- ▶ Translation :  $v(t) = u(t - k)$
- ▶ Dilatation d'un signal:  $v(t) = u(ct)$  (attention, cette opération change la grille des temps pour les signaux numériques)
- ▶ Modulation: la modulation du signal  $u(t)$  par  $v(t)$  est défini par

$$w(t) = v(t)u(t)$$

## PRODUIT DE CONVOLUTION ANALOGIQUE

- ▶ Soit  $u(t)$  et  $v(t)$  deux signaux analogiques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$w(t) = (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)v(x) dx$$

- ▶ Le produit de convolution est commutatif

$$w(t) = (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)v(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t-x)dx = (v * u)(t)$$

- ▶ Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)(t) = (u * \delta)(t) = u(t)$$

# PRODUIT DE CONVOLUTION NUMÉRIQUE

- ▶ Soit  $u[t]$  et  $v[t]$  deux signaux numériques réels. Leur produit de convolution s'écrit

$$w[t] = (u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k]$$

- ▶ Le produit de convolution est commutatif

$$w[t] = (u * v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[t-k]v[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t-k] = (v * u)[t]$$

- ▶ Le Dirac est l'élément neutre de la convolution

$$(\delta * u)(t) = (u * \delta)(t) = u(t)$$

# INTER-CORRÉLATION ENTRE DEUX SIGNAUX ANALOGIQUES

- ▶ Soit  $u(t)$  et  $v(t)$  deux signaux analogiques réels. Leur inter-corrélation s'écrit

$$C_{uv}(t) = (u \star v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t+x) \, dx$$

- ▶ L'inter-corrélation **n'est pas** commutatif

$$\begin{aligned} C_{uv}(t) &= (u \star v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(t+x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)v(x) \, dx \\ &= C_{vu}(-t) \end{aligned}$$

- ▶ Lien avec la convolution: soit  $w(t) = v(-t)$ , alors

$$C_{uv}(t) = (u \star v)(t) = (u * w)(t)$$

- ▶ L'inter-corrélation mesure la ressemblance entre deux signaux, pour un décalage donné.

# INTER-CORRÉLATION ENTRE DEUX SIGNAUX NUMÉRIQUES

- ▶ Soit  $u[t]$  et  $v[t]$  deux signaux numériques réels. Leur inter-corrélation s'écrit

$$C_{uv}[t] = (u \star v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t+k]$$

- ▶ L'inter-corrélation **n'est pas** commutatif

$$\begin{aligned} C_{uv}[t] &= (u \star v)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]v[t+k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-t]v[k] \\ &= C_{vu}[-t] \end{aligned}$$

- ▶ Lien avec la convolution: soit  $w[t] = v[-t]$ , alors

$$C_{uv}[t] = (u \star v)[t] = (u * w)[t]$$

- ▶ L'inter-corrélation mesure la ressemblance entre deux signaux, pour un décalage donné.

# AUTO-CORRÉLATION D'UN SIGNAL ANALOGIQUE

- ▶ Soit  $u(t)$  un signal analogique réel. Son auto-corrélation s'écrit

$$C_{uu}(t) = (u \star u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)u(t+x) \, dx$$

- ▶ L'auto-corrélation est symétrique:

$$C_{uu}(t) = C_{uu}(-t)$$

- ▶ Lien avec la convolution: soit  $w(t) = u(-t)$ , alors

$$C_{uu}(t) = (u \star u)(t) = (u * w)(t)$$

- ▶ L'auto-corrélation mesure la ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps

# AUTO-CORRÉLATION D'UN SIGNAL NUMÉRIQUE

- ▶ Soit  $u[t]$  un signal numérique réels. Son auto-corrélation s'écrit

$$C_{uu}[t] = (u \star u)[t] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[t+k]$$

- ▶ L'auto-corrélation est symétrique:

$$C_{uu}[t] = C_{uu}[-t]$$

- ▶ Lien avec la convolution: soit  $w[t] = u[-t]$ , alors

$$C_{uu}[t] = (u \star u)(t) = (u * w)(t)$$

- ▶ L'auto-corrélation mesure la ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps

## CONCLUSION

- ▶ Différents modèles de signaux (analogique, numérique)
- ▶ Vocabulaire de base (causalité, stabilité etc.)
- ▶ Ressources: <http://hebergement.universite-paris-saclay.fr/mkowalski/>
- ▶ Questions: [matthieu.kowalski@universite-paris-saclay.fr](mailto:matthieu.kowalski@universite-paris-saclay.fr)