Licence 3 Math/Phys
TRAITEMENT DU SIGNAL

TD 1 – FOURIER

TABLE DES MATIÈRES

Exercice 1. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles.*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha\,|t|}\,, t \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0\ ,$$

ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

(1) Calculer $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.

(2) Vérifier les propriétés de symétrie de X. Vérifiez également que :

$$x(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu)\ \mathrm{d}\nu \text{ et } \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\ \mathrm{d}t$$

et calculer ces quantités.

(3) Calculer Δt et $\Delta\nu$ les largeurs à mi-hauteur de $x(t)$ et $\hat{x}(\nu)$.

Exercice 2. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x(n) = \alpha^{|n|}\,, n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1,1[\ , \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

(2) Vérifiez les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{\mathbb{Z}} x(n) \,.$$

(3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, … ?

(4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?

Exercice 3. — *Transformée de Fourier des gaussiennes.*

Dans cet exercice on détermine la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$g_{\tau\sigma}(t) = e^{-\pi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2} \;,\; t \in \mathbb{R} \;,$$

paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On admettra le résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \; dx = 1 \;. \tag{1}$$

Dans un premier temps on s'intéresse à la gaussienne centrée réduite $g = g_{01}$.

(1) Montrez simplement que sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{g}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi\nu t) \; \mathrm{d}t \;.$$

(2) En dérivant sous le signe intégrale par rapport à la fréquence puis en intégrant par partie, déterminez une équation différentielle simple en $\hat{g}(\nu)$.

(3) Résolvez l'équation différentielle et déterminez les constantes d'intégration en utilisant la relation (1).

(4) Déterminez finalement la transformée de Fourier $\hat{g}_{\tau\sigma}$ de $g_{\tau\sigma}$.

(5) Comparez les largeurs de $\hat{g}_{\tau\sigma}$ et de $g_{\tau\sigma}$ et commentez.

Exercice 4. — *Principe d'incertitude d'Heisenberg.*

Le but de cet exercice est de démontrer le principe d'incertitude d'Heisenberg, qu'on peut énoncer dans le théorème suivant

Théorème 1 (Inégalités d'Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$. On pose*

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|\mathrm{d}\,t\ ,\ \mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{f}(\xi)|\mathrm{d}\,\xi$$

et

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu_f)^2|f(t)|^2\mathrm{d}\,t\ ,\ \sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\mu_{\hat{f}})^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\,\xi$$

Alors

$$\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}\ ,$$

avec égalité ssi f est de la forme

$$f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}\ .$$

Les nombres μ_f et $\mu_{\hat{f}}$ mesurent respectivement le temps central et la fréquence centrale du signal f. Les nombres σ_f et $\sigma_{\hat{f}}$ mesurent alors l'étalement, ou la dispersion, temporel et spectral. Ce théorème nous dit qu'un signal ne peut avoir à la fois un étalement temporel faible **et** un étalement spectral faible.

On suppose bien entendu que $\sigma_f < +\infty$ et $\sigma_{\hat{f}} < +\infty$, sinon l'inégalité est trivialement satisfaite.

(1) On commence par supposer que $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$.

(a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f(t)|^2\mathrm{d}\,t$$

(b) En déduire que

$$\|f\|^2 \leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2\mathrm{d}\,t\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2\mathrm{d}\,t}$$

(c) En utilisant la relation entre la transformée de Fourier et la dérivation, conclure sur l'inégalité d'Heisenberg dans le cas $\mu_f = \mu_{\hat{f}} = 0$

(2) Montrer le cas général en appliquant une translation et une modulation adéquat à la fonction f, de sorte a appliquer le résultat précédent.

(3) Enfin, montrer que l'égalité est atteinte ssi $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/d}$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice "transformée de Fourier d'une gaussienne".

Exercice 5. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini.*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique observé sur un horizon fini c'est-à-dire sur une durée finie. Pour cela on définit le signal « porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2; +T/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-T/2; +T/2] \end{cases}$$

où T est un réel positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence f_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_T(t) = e^{i2\pi f_0 t}\ \Pi_T(t)\,.$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_1(\nu)$, la transformée de Fourier de $\Pi_1(t)$. On pourra introduire la fonction *sinus cardinal* définie par $\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$. Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_1(f)$ en détail.

(2) En déduire la valeur des deux intégrales de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

(3) En exploitant les relations « transformée de Fourier et dilatation du temps » déterminez la transformée de Fourier $\hat{\Pi}_T(\nu)$ du signal porte général $\hat{\Pi}_T(t)$.

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_T(\nu)$ du signal $x_T(t)$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur T de la porte considérée et notamment le comportement lorsque $T \to \infty$.

Exercice 6. — *Transformée de Fourier de fréquences pures observées sur un horizon fini.*

Cet exercice est dédié à l'étude de la transformée de Fourier d'un signal monochromatique à temsp discret observé sur une durée finie. Pour cela on définit le « signal porte » constant égal à un à l'intérieur d'un intervalle et nul à l'extérieur :

$$\Pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-N;+N] \\ 0 & \text{si } t \notin [-N;+N] \end{cases}$$

où N est un entier positif. On définit ensuite le signal d'intérêt, c'est-à-dire un signal monochromatique, de fréquence ν_0 multiplié par le signal porte précédent :

$$x_N(n) = e^{2i\pi\nu_0 n}\ \Pi_N(n)\ .$$

(1) Calculez $\hat{\Pi}_N(\nu)$ la transformée de Fourier de $\Pi_N(n)$. On pourra introduire le *noyau de Dirichlet* défini par $\mathrm{Dir}_N(u) = \frac{\sin(N\pi u)}{\sin(\pi u)}$.

(2) Vérifiez les propriétés de symétries de $\hat{\Pi}_N(\nu)$. Vérifiez que $\hat{\Pi}_N(\nu)$ est bien 1-périodique. Vérifiez également que :

$$\hat{\Pi}_N(0) = \sum_{\mathbb{Z}} \Pi_N(n)\,.$$

et donner :

$$\int_0^1 \frac{\sin((2N+1)\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\,\mathrm{d}\nu\ .$$

(3) Étudiez la fonction $\hat{\Pi}_N(\nu)$ en détail.

(4) En exploitant les relation « transformée de Fourier et modulation » déterminez la transformée de Fourier $\hat{x}_N(\nu)$ du signal $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Commentez le résultat obtenu en fonction de la largeur de la porte considérée et notamment le comportement lorsque N tend vers l'infini.