

# Traitement du signal

Une introduction aux concepts fondamentaux

Matthieu Kowalski





# Table des matières

<b>1. Introduction générale</b>	<b>5</b>
1.1. Signaux	5
1.1.1. Signaux analogiques	6
1.1.1.1. Signaux périodiques	8
1.1.1.2. Signaux à temps fini	8
1.1.2. Signaux numériques	8
1.2. Signaux élémentaires	10
1.2.1. Impulsion de Dirac	10
1.2.2. Signal échelon (Heaviside)	11
1.2.3. Signal porte	11
1.2.3.1. Signal sinusoïdal	12
1.3. Systèmes	12
<b>2. Fourier pour les signaux analogiques</b>	<b>17</b>
2.1. Signaux périodiques : transformée en série de Fourier (TSF)	17
2.1.1. Base orthonormée de $L^2([0, T])$	18
2.1.2. Séries de Fourier et traitement du signal	22
2.2. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier continue (TFC)	23
2.3. Récapitulatif : Fourier analogique	26
<b>3. Filtrage analogique (i.e. à temps continu)</b>	<b>27</b>
3.1. Un outil d'analyse : la transformée de Laplace	27
3.2. Rappels et définitions	29
3.3. Exemple : le filtre RC	31
3.4. Filtres idéaux	32
3.4.1. Filtre passe-bas	32
3.4.2. Filtre passe-haut	32
3.4.3. Filtre passe-bande	33
3.4.4. Filtre coupe-bande	33
3.5. Filtres dynamiques continues	33
<b>4. Fourier pour les signaux à temps discret</b>	<b>35</b>
4.1. Signaux stable et/ou à énergie finie : transformée de Fourier discrète (TFD)	35
4.2. Signaux numériques finis : transformée de Fourier finie (TFF)	36
4.3. Récapitulatif : Fourier pour les signaux à temps discret	39
4.4. Récapitulatif général	40

*Table des matières*

<b>5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)</b>	<b>41</b>
5.1. Un outil d'analyse : la transformées en $z$ . . . . .	41
5.2. Filtrage : rappels et définitions . . . . .	43
5.2.1. Filtres FIR ou MA . . . . .	44
5.2.1.1. Définition . . . . .	44
5.2.1.2. synthèse par fenêtrage . . . . .	45
5.2.2. Filtre IIR . . . . .	47
5.2.3. Synthèse de filtre IIR . . . . .	49
5.2.3.1. Spécifications . . . . .	49
5.2.3.2. Filtres classiques . . . . .	49
<b>6. Échantillonnage</b>	<b>53</b>
6.1. Théorème d'échantillonnage . . . . .	53
6.2. Échantillonnage en pratique . . . . .	55
6.2.1. Repliement spectral . . . . .	56
6.2.2. Signaux à temps limité et à bande limitée . . . . .	57
<b>A. Rappels mathématiques</b>	<b>59</b>
A.1. Normes et convergences . . . . .	59
A.2. Produits scalaires et espaces de Hilbert . . . . .	61
A.3. Bases orthonormées . . . . .	63

# 1

## ■ Introduction générale

### **Objectifs:**

- Différencier le modèle discret (numérique) et le modèle continue (analogique)
- Connaître le vocabulaire propre aux signaux et systèmes
- Modélisation des systèmes
- **Application : détecteur de parole**

### **Contents**

---

<b>1.1. Signaux</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1. Signaux analogiques . . . . .	6
1.1.2. Signaux numériques . . . . .	8
<b>1.2. Signaux élémentaires</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1. Impulsion de Dirac . . . . .	10
1.2.2. Signal échelon (Heaviside) . . . . .	11
1.2.3. Signal porte . . . . .	11
<b>1.3. Systèmes</b> . . . . .	<b>12</b>

---

### **1.1. Signaux**

On appelle *signal* une représentation physique qui transporte une “information” depuis une source vers un destinataire. Le terme signal vient surtout du génie électrique : c’est une grandeur physiquement mesurable par un capteur, pouvant varier avec le temps. Ce terme désigne aujourd’hui une grande variété de signaux physiques rencontrés, comme les signaux de paroles ou de musiques, les signaux radars ou bien les images et les vidéos. Un signal aura donc souvent la dimension d’un temps (par exemple, un signal de parole est la mesure de la variation de la pression au cours du temps), mais aura de façon générale une dimension vectorielle (1D pour le temps, 2D pour les images – chaque dimension étant les coordonnées d’un point lumineux – 3D pour la vidéos etc.).

## 1. Introduction générale

Ce cours se limitera aux signaux temporels, et seront modélisés mathématiquement par une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$  ou par une suite numérique  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto f[t] = f_t$ . On se limitera aussi aux signaux dit *déterministes*, par opposition aux modèles *aléatoires*. Les signaux déterministes ont une évolution parfaitement définie par les lois physiques. Plusieurs types de signaux seront considérés, qu'on décrit ci-après.

### 1.1.1. Signaux analogiques

Les signaux analogiques sont des signaux à temps continu. Il seront représentés par des fonctions mathématiques d'une variable réelle (en général, le temps) à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto s(t).$$

Les signaux analogiques sont en général les signaux "naturels" mesurés à l'aide de divers capteurs physiques. On considérera deux grandes classes de signaux : les signaux périodiques et les signaux à temps fini. Lorsqu'un signal est rencontré, on commence par regarder s'il vérifie quelques propriétés simples, mais essentielles, qu'on définit ci-après.

#### Définition 1.1 (Signal analogique causal)

Un signal causal est un signal qui débute à une date  $t = 0$ . Plus précisément, soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal analogique.  $s$  est un signal causal ssi

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

Un signal qui n'est pas causal sera dit **acausal**. Un cas particulier de signal acausal est le signal anti-causal. De manière analogue, on peut définir les signaux anti-causaux :

#### Définition 1.2 (Signal analogique anti-causal)

Soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal analogique.  $s$  est un signal anti-causal ssi

$$s(t) = 0 \text{ pour } t > 0.$$

On représente sur la figure 1.1.1 un exemple de signal (sinusoïdal) acausal (1.1(a)), un exemple de signal causal (1.1(b)) (un sinusoïde qui démarre à  $t = 0$ ) et un signal anti-causal (1.1(c))

Pour un signal, la notion de causalité viendra surtout de l'origine des temps pris pour référence. Si l'on s'intéresse à l'évolution de la température depuis le *XVIII<sup>e</sup>* siècle jusqu'à nos jours, ce signal pourra être considéré comme causal si l'on prend pour origine des temps la date de première mesure, ou comme anticausal si l'origine des temps est aujourd'hui. La notion de causalité prendra toute son importance lorsqu'on parlera des *systèmes*. Un système (et plus particulièrement un filtre)

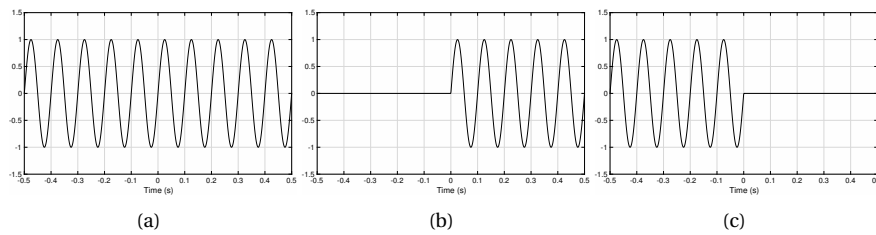


FIGURE 1.1. – (a) signal acausal. (b) signal causal. (c) signal anti-causal

causal sera un système qui "ne dépend pas du futur", et qui sera donc possible-ment implémentable en temps réel en pratique.

**Définition 1.3 (Signal analogique stable)**

Soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal analogique. On dira que  $s$  est stable si  $s \in L^1(\mathbb{R})$ , ie

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < +\infty .$$

Une conséquence direct de la stabilité, est qu'un signal stable est **borné**. On voit que cette condition semble nécessaire afin qu'un signal puisse "réellement" exister.

**Définition 1.4 (Énergie d'un signal analogique)**

Soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal analogique. L'énergie d'un signal est sa norme 2 élevée au carré  $\|s\|_2^2$  :

$$\|s\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt .$$

**Définition 1.5 (Signal analogique à énergie finie)**

Soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal analogique.  $s$  est à énergie finie s'il est dans  $L^2(\mathbb{R})$ , ie sa norme 2 est bornée :

$$\|s\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 < +\infty .$$

Ces définitions permettent de définir la notion de signal "réalisable", c'est à dire qui puisse exister physiquement. Ici encore, cette notion prendra tout son sens pour les systèmes.

**Définition 1.6 (Signal réalisable)**

Soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal analogique.  $s$  est dit réalisable s'il est à la fois stable et causal.

## 1. Introduction générale

### 1.1.1.1. Signaux périodiques

Un signal  $s$  périodique de période  $T$  est défini comme une fonction  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $t$ ,  $s(t + T) = s(t)$ . Un exemple simple de signal périodique est le signal sinusoïdale  $s(t) = \sin(t)$  représentée sur la partie gauche de la figure 1.1.1 ainsi que sur la figure 1.2.3.1.

Ces signaux ne sont pas physiquement réalisables car à temps infini. Cependant, ils sont d'une importance majeure pour la modélisation et la compréhension des signaux rencontrés. Un exemple parlant est celui d'une note de musique (par exemple, une note de piano), qui peut être vue comme une somme de sinusoïdes qui oscillent à différentes fréquences (cf. figure 1.1.1.1)

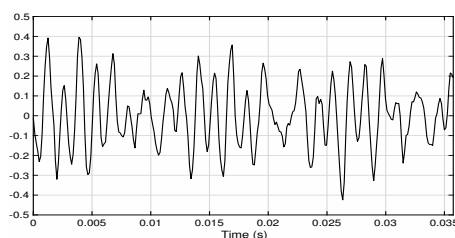


FIGURE 1.2. – Zoom sur une partie d'une note de piano. Cette partie oscillante peut être vue comme une somme de sinusoïdes qui oscillent à différentes fréquences

On voit immédiatement que les signaux périodiques non nuls ne sont ni causaux, ni à énergie finie (et donc non stables), et donc non réalisables.

### 1.1.1.2. Signaux à temps fini

Les signaux à temps fini sont les signaux rencontrés en pratique. Ce sont des signaux à support borné.

#### Définition 1.7 (Signal à support borné)

Soit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un signal.  $s$  est dit à support borné s'il existe  $T > 0$  tel que

$$\text{supp}(s) = \{t, s(t) \neq 0\} \subset [-T, T].$$

Une propriété importante des signaux à temps fini (par exemple, définis sur  $[0, T]$ ), est que  $L^2([0, T]) \subset L^1([0, T])$ . Un signal causal à temps fini et à énergie finie est donc réalisable.

### 1.1.2. Signaux numériques

Les signaux numériques sont obtenus à partir des signaux analogiques par échantillonnage et quantification. Ces signaux ont une importance particulière car ce



sont ceux-là qui pourront être manipulés sur un ordinateur. Ils sont modélisés en mathématiques par des suites à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$$s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$k \mapsto s[k] = s_k .$$

On adapte les définitions données pour les signaux analogique directement.

**Définition 1.8****(Signal numérique causal)**

Un signal causal est un signal qui débute à une date  $k = 0$ . Plus précisément, soit  $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  un signal numérique.  $s$  est un signal causal ssi

$$s_k = 0 \text{ pour } k < 0 .$$

**Définition 1.9****(Signal numérique stable)**

Soit  $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  un signal numérique. On dira que  $s$  est stable si  $s \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , ie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s_k| < +\infty .$$

**Définition 1.10****(Énergie d'un signal numérique)**

Soit  $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  un signal numérique. L'énergie d'un signal est sa norme 2 élevée au carré  $\|s\|_2^2$  :

$$\|s\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 .$$

**Définition 1.11****(Signal numérique à énergie finie)**

Soit  $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  un signal numérique.  $s$  est à énergie finie s'il est dans  $\ell^2$ , ie sa norme 2 est bornée :

$$\|s\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 < +\infty .$$

**Définition 1.12****(Signal numérique réalisable)**

Soit  $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  un signal numérique.  $s$  est dit réalisable s'il est à la fois stable et causal.

On rencontrera généralement deux types de signaux numériques :

- des signaux à temps infini (en général non causaux), ie. des suites  $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  définies sur tout  $\mathbb{Z}$ .

## 1. Introduction générale

- des signaux à temps fini (souvent causaux), ie. des suites  $s \in \mathbb{C}^Z$  ayant un support fini.

### Définition 1.13 (Signal à support fini)

Soit  $s \in \mathbb{C}^Z$  un signal numérique.  $s$  est dit à support fini si

$$\text{supp}(s) = \{k, s_k \neq 0\} \text{ est un ensemble fini .}$$

## 1.2. Signaux élémentaires

On présente ici quelques signaux élémentaires rencontrés fréquemment en traitement du signal. On donne la définition discrète et continue pour chaque signal.

### 1.2.1. Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac joue un rôle essentiel dans l'échantillonnage des signaux analogiques, mais aussi pour la caractérisation des filtres. Si sa définition discrète ne pose pas de problème, la définition continue fait appel à la notion mathématique de *distribution*.

### Définition 1.14 (Impulsion de Dirac discrète)

L'impulsion de Dirac, notée  $\delta_k$ , est la suite définie par :

$$\delta_k[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation discrète de l'impulsion de Dirac est donnée sur la figure 1.2.1.

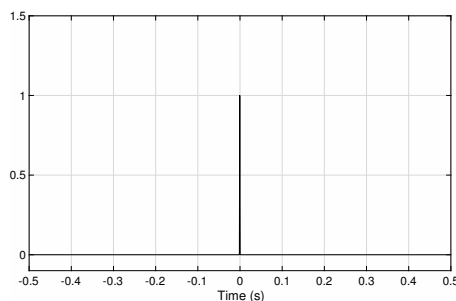


FIGURE 1.3. – Impulsion de Dirac  $\delta_0$ .

Dans le cas continue, on trouve (trop) souvent une définition dite *du physicien*, qui s'écrit comme

$$\delta_0(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tel que

$$\int \delta_0(t) dt = 1 .$$

Il faut cependant toujours avoir à l'esprit que cette définition n'a mathématiquement **aucun sens!** et est donc à proscrire. L'impulsion de Dirac *n'est pas une fonction* mathématique, mais une *distribution*. Sans entrer dans les détails, la distribution de Dirac  $\delta_0$  est une forme linéaire définie sur un espace de fonctions tests  $\mathcal{D}$ , telle que pour  $f \in \mathcal{D}$  :

$$\langle \delta_0, f \rangle = \int f(x) \delta_0(x) dx = f(0) .$$

Et de façon plus générale, on définit  $\delta_t$  la distribution de Dirac telle que pour  $f \in \mathcal{D}$

$$\langle \delta_t, f \rangle = \int f(x) \delta_t(x) dx = f(t) .$$

### 1.2.2. Signal échelon (Heaviside)

Une autre fonction élémentaire est la fonction de Heaviside, aussi appelée fonction échelon ou marche.

#### Définition 1.15 (Suite de Heaviside)

La suite de Heaviside est la suite notée  $\Theta$  définie par

$$\Theta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas continue, la définition s'adapte directement.

#### Définition 1.16 (Fonction de Heaviside)

La fonction de Heaviside est la fonction  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation de la fonction de Heaviside est donnée sur la figure 1.2.2.

### 1.2.3. Signal porte

Le signal porte servira essentiellement lors des opérations de filtrage dans le domaine fréquentiel. Il est représenté sur la figure 1.2.3.

## 1. Introduction générale

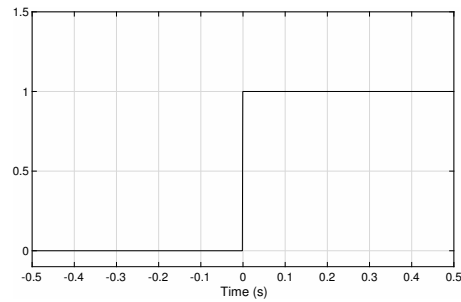


FIGURE 1.4. – Fonction de Heaviside.

### Définition 1.17 (Fonction porte)

La fonction porte est la fonction  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

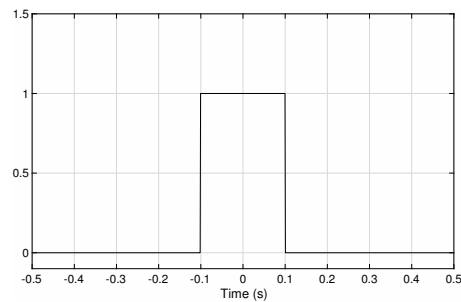


FIGURE 1.5. – Fonction porte.

### 1.2.3.1. Signal sinusoïdal

Enfin, le dernier signal élémentaire est le signal sinusoïdal. Ce dernier est essentiel dans les représentations de Fourier : c'est la brique de base des fonctions périodiques. On ne rappelle pas la définition de la sinusoïde (qu'on peut définir à partir du sinus du cercle unité) dont une représentation graphique est donnée figure 1.2.3.1.

## 1.3. Systèmes

Les notions de signal et de système sont intimement liées, un signal étant toujours véhiculé par un système de transmission. On représente généralement un

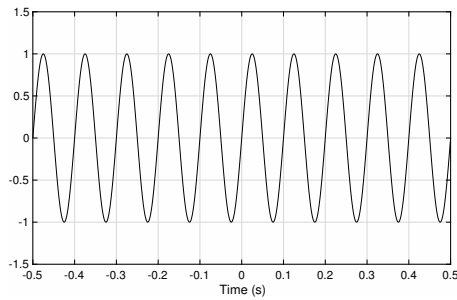


FIGURE 1.6. – Fonction sinus.

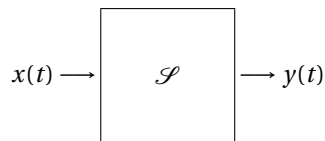


FIGURE 1.7. – Schéma d'un système.

système comme sur la figure 1.7. Le signal  $x(t)$  est appliqué à l'entrée du système  $\mathcal{S}$  qui délivre en réponse le signal  $y(t) = \mathcal{S}(x(t))$  en sortie. On peut donc modéliser un système comme un opérateur  $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  qui associe à un signal de l'espace des signaux d'entrée  $\mathcal{X}$ , un signal de l'espace de sortie  $\mathcal{Y}$ .

**Définition 1.18 (Excitation/Réponse)**

L'entrée d'un système s'appelle *l'excitation* et la sortie *la réponse*.

**Définition 1.19 (Système linéaire à temps continu)**

Soit  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces de signaux à temps continu. Un système  $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est linéaire s'il existe une fonction  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$y(t) = \mathcal{S}(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} h(t, \theta) x(\theta) d\theta .$$

**Définition 1.20 (Système linéaire à temps discret)**

Soit  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces de signaux à temps discret. Un système  $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est linéaire s'il existe une suite  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$y_k = \mathcal{S}(x_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k,n} x_n .$$

## 1. Introduction générale

Un système linéaire invariant dans le temps est simplement un système linéaire qui peut s'écrire comme une convolution et s'appelle alors un *filtre*.

### Définition 1.21 (Filtre à temps continu)

Soit  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces de signaux à temps continu. Un système linéaire  $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est invariant dans le temps s'il existe une fonction  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$y(t) = \mathcal{S}(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} h(t-\theta)x(\theta)d\theta = h \star x.$$

On appelle un tel système un filtre à temps continu.

### Définition 1.22 (Filtre à temps discret)

Soit  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux espaces de signaux à temps discret. Un système linéaire  $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est invariant dans le temps s'il existe une suite  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$y_k = \mathcal{S}(x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k-n}x_n = h \star x.$$

On appelle un tel système un filtre à temps discret.

Dans les définitions ci-dessus  $h$  s'appelle la *réponse impulsionnelle* du système. En effet, si on applique l'impulsion de Dirac comme excitation à l'entrée du système, on retrouve bien  $y = h$  comme réponse en sortie.

De même que pour les signaux, un système peut être causal, stable ou à énergie finie, si sa réponse impulsionnelle est causale, stable ou à énergie finie.

### Définition 1.23 (Filtre causal)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $h$  (à temps discret ou continu). Le filtre est dit causal si  $h$  est un signal causal (voir définitions 1.1 et 1.8)

### Définition 1.24 (Filtre stable)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $h$  (à temps discret ou continu). Le filtre est dit stable si  $h$  est un signal stable (voir définitions 1.3 et 1.9).

### Définition 1.25 (Filtre à énergie finie)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $h$  (à temps discret ou continu). Le filtre est dit à énergie finie si  $h$  est un signal à énergie finie (voir définitions 1.5 et 1.11).

### Définition 1.26 (Filtre réalisable)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $h$  (à temps discret ou continu). Le filtre

est dit réalisable si  $h$  est un signal réalisable (voir définitions 1.6 et 1.12).





# 2 ■ Fourier pour les signaux analogiques

## Objectifs:

- Connaître les **deux** transformées de Fourier **pour les signaux à temps continu**
- Signaux continus périodiques : transformée en Série de Fourier
- Signaux stable d'énergie finie : transformée de Fourier.
- Faire une analyse spectrale

## Contents

---

<b>2.1. Signaux périodiques : transformée en série de Fourier (TSF)</b>	<b>17</b>
2.1.1. Base orthonormée de $L^2([0, T])$	18
2.1.2. Séries de Fourier et traitement du signal	22
<b>2.2. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier continue (TFC)</b>	<b>23</b>
<b>2.3. Récapitulatif : Fourier analogique</b>	<b>26</b>

---

## 2.1. Signaux périodiques : transformée en série de Fourier (TSF)

Les séries de Fourier ont été introduites par Jean-Baptiste Fourier (dit Joseph Fourier) en 1822, dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur* : il propose de modéliser l'évolution de la température par des séries trigonométriques. Il énonce qu'une fonction peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci. Il juge même toute hypothèse de continuité inutile !

Le cadre de cette partie consacrée aux séries de Fourier est celui des fonctions  $T$ -périodiques. Dans la suite, sauf mention contraire, on considère des fonctions de l'espace de Hilbert  $L^2([0, T])$ , c'est à dire les fonctions de carré intégrable sur

## 2. Fourier pour les signaux analogiques

$[0, T]$  de période  $T$ . Le produit scalaire associé est défini, pour tout  $f, g \in L^2([0, T])$  par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt,$$

et la norme induite est donc

$$\|f\| = \left( \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Remarquons que  $L^2([0, T]) \subset L^1([0, T])$ , donc les fonctions considérées sont intégrables.

### 2.1.1. Base orthonormée de $L^2([0, T])$

#### Théorème 2.1 (Base des fonctions périodiques)

La famille des fonctions trigonométriques  $\{t \mapsto e^{i \frac{2\pi}{T} nt} = e_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2([0, T])$ .

Par conséquence, pour  $f \in L^2([0, T])$ , la coordonnée de  $f$  selon le  $n$ -ième vecteur de base se calcule par produit scalaire entre  $f$  et  $e_n$ . Ces coordonnées sont appelées coefficients de Fourier complexes.

#### Définition 2.1 (Coefficients de Fourier complexes)

Soit  $f \in L^2([0, T])$ , on appelle coefficients de Fourier complexes de  $f$  les nombres :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

#### Proposition 2.1 (Quelques propriétés utiles)

Soit  $f, g \in L^2([0, T])$ . Alors

1.  $c_n(f + g) = c_n(f) + c_n(g)$
2.  $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
3. Soit  $g : t \mapsto f(-t)$ , alors  $c_n(g) = c_{-n}(f)$
4. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f_a : t \mapsto f(t - a)$ , alors  $c_n(f_a) = e^{i \frac{2\pi}{T} na} c_n(f)$
5. Si  $f$  est  $k$  fois dérivable, alors  $c_n(f^{(k)}) = \left(i \frac{2\pi}{T} n\right)^k c_n(f)$

*Démonstration.* 1. Conséquence de la linéarité de l'intégrale

2.

$$\begin{aligned} \overline{c_{-n}(f)} &= \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} dt} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{f}(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\ &= c_n \bar{f} \end{aligned}$$

2.1. Signaux périodiques : transformée en série de Fourier (TSF)

3.

$$\begin{aligned}
 c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(-t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= -\frac{1}{T} \int_0^{-T} f(u) e^{i \frac{2\pi}{T} nu} du \quad (u = -t) \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= c_{-n}(f)
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t-a) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-a}^{T-a} f(u) e^{-i \frac{2\pi}{T} n(u+a)} du \quad (u = t-a) \\
 &= \frac{e^{-i \frac{2\pi}{T} na}}{T} \int_0^T f(t) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= e^{-i \frac{2\pi}{T} na} c_n(f)
 \end{aligned}$$

5. On commence par calculer  $c_n(f')$  :

$$\begin{aligned}
 c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\
 &= \left[ f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} \right]_0^T + \frac{i \frac{2\pi}{T} n}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \quad (\text{I.P.P.}) \\
 &= i \frac{2\pi}{T} n c_n(f)
 \end{aligned}$$

La généralisation se fait par une récurrence immédiate.



On définit les séries de Fourier à partir de ces coefficients.

**Définition 2.2**

On appelle série de Fourier de  $f \in L^2([0, T])$ , notée  $S(f)$  la série

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} nt} .$$

## 2. Fourier pour les signaux analogiques

Immédiatement, la famille des  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  étant une base orthonormée, l'analyse hilbertienne nous donne le résultat de convergence suivant

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \right\| = 0$$

et la conservation de l'énergie :

### Théorème 2.2 (Plancherel-Parseval)

Soit  $f \in L^2([0, T])$  et  $\{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients de Fourier. Alors

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Soit  $g \in L^2([0, T])$  et  $\{c_n(g)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients de Fourier. Alors

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) c_n(g)$$

Lorsque la fonction  $f$  possède certaines propriétés de parités, on peut aussi définir les coefficients de Fourier trigonométriques.

### Définition 2.3 (Coefficients de Fourier trigonométriques)

Soit  $f \in L^2([0, T])$ , on appelle coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$  les nombres :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \quad \forall n \geq 1 \\ b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

On peut bien sûr déduire les coefficients trigonométriques à partir de coefficients complexes et vice-versa.

### Proposition 2.2

Soit  $f \in L^2([0, T])$

$$c_0(f) = a_0(f) \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Les coefficients trigonométriques sont particulièrement intéressants lorsque  $f$  possède certaines propriétés de symétries.

## 2.1. Signaux périodiques : transformée en série de Fourier (TSF)

### Proposition 2.3

Soit  $f \in L^2([0, T])$ .

- Si  $f$  est paire, alors  $\forall n \geq 1 \ b_n(f) = 0$  et  $a_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(\frac{2\pi}{T} nt) dt$
- Si  $f$  est impaire, alors  $\forall n \geq 0 \ a_n(f) = 0$  et  $\forall n \geq 1 \ b_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(\frac{2\pi}{T} nt) dt$

La série de Fourier de  $f$  s'écrit alors

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(\frac{2\pi}{T} nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(\frac{2\pi}{T} nt),$$

et le théorème de Plancherel-Parseval :

$$\|f\|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2.$$

Si la convergence des séries de Fourier est assurée au sens de la norme, reste la question de savoir quand une fonction est-elle égale à sa série de Fourier ? La réponse à cette question est donnée par le théorème de Dirichlet.

Avant d'établir la convergence ponctuelle et la relation entre  $f$  et sa série de Fourier, on peut déjà donner la propriété suivante :

### Proposition 2.4

Soit  $f \in L^2([0, T])$ , alors

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0 \quad \lim_{|n| \rightarrow +\infty} a_n(f) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(f) = 0$$

Il y a ainsi une atténuation des coefficients pour les "grandes fréquences". C'est une conséquence du principe de portée générale "plus la fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier convergent rapidement vers 0".

On donne maintenant une condition suffisante de convergence ponctuelle de la série de Fourier.

### Théorème 2.3 (Dirichlet)

On suppose  $f \in C^1$  par morceau sur  $[0, T]$ . Pour tout  $t_0 \in [0, T]$ , la série de Fourier de  $f$  en  $t_0$  converge vers la demie somme des limites à gauche et à droite de  $f$  en  $t_0$ . Autrement dit :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} n t_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}.$$

En particulier, si  $f$  est de plus continue en  $t_0$ , alors  $f(t_0)$  est égale à sa série de Fourier évaluée en  $t_0$ .

## 2. Fourier pour les signaux analogiques

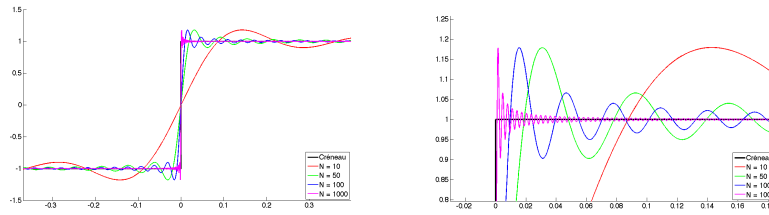


FIGURE 2.1. – Illustration du phénomène de Gibbs sur la fonction créneau. Gauche : 1 période. Droite : zoom sur une discontinuité.

### 2.1.2. Séries de Fourier et traitement du signal

Les séries de Fourier permettent de décomposer n'importe quelle fonction périodique comme une somme infinie d'éléments de bases, qui sont les fonctions trigonométriques. En pratique, on est obligé d'utiliser une somme finie. Il est donc important de connaître le comportement des sommes partielles des séries de Fourier.

Lorsque la fonction est partout continuellement dérivable, la série de Fourier converge ponctuellement très vite vers la fonction  $f$ . Les problèmes commencent lorsque  $f$  présente une singularité. Prenons par exemple la fonction créneaux : soit  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  telle que

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ f(t) = -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est impaire, on calcule donc les coefficients

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt .$$

Le calcul donne :

$$S(f)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t) .$$

La figure 2.1 illustre le comportement des sommes partielles de la série de Fourier associée à la fonction créneau, qui présente des discontinuités de première espèce. Quand  $N$  grandit, le graphe de  $S_N(f)$  présente un dépassement constant près des discontinuités de la fonction originale.

Décomposer une fonction périodique en série de Fourier nous permet de connaître son contenu fréquentiel, ie. de savoir “combien” il y a de sinus et de cosinus pour les différentes fréquences d'oscillation. Le rapprochement avec les notes de musiques est immédiat : celle-ci est constituée d'une note *fondamentale*, puis d'une succession d'*harmoniques*. Une décomposition en série de Fourier fera apparaître un pic principal à sa fréquence fondamentale (la note), et des pics d'amplitudes décroissantes aux différents harmoniques venant avec les fréquences supérieures.

La représentation de l'amplitude des coefficients de la série de Fourier en fonction des fréquences est appelée *représentation spectrale* de la fonction.

## 2.2. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier continue (TFC)

On a vu dans la section précédente comment approcher n'importe quelle fonction périodique de  $L^2([0, T])$  comme une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques. Les coefficients de ces combinaisons forment le spectre et permettent de connaître le contenu fréquentiel. Une question naturelle est alors l'extension d'une telle analyse spectrale aux signaux à temps continu non périodiques ? Cette généralisation se fait avec l'analyse de Fourier.

### Définition 2.4 (Transformée de Fourier)

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\hat{f}$ , est définie par

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi vt} dt.$$

### Remarque 2.1

On peut trouver deux autres définitions de la transformée de Fourier, qui diffèrent légèrement. Elles sont données par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

La définition 2.1 utilise la variable  $\omega$  interprétée comme une fréquence en radian par seconde (ou "pulsation"), alors que dans la définition 2.4 la variable  $v$  s'interprète comme une fréquence en Herz. La définition 2.2 fait apparaître une constante multiplicative jouant le rôle de normalisation par rapport à 2.1

Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , ie.  $f$  est sommable, la quantité  $\hat{f}$  est bien définie pour tout  $v \in \mathbb{R}$ . On a alors les propriétés suivantes

### Proposition 2.5

si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est continue, bornée et

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \hat{f}(v) = 0.$$

Une propriété analogue de décroissance vers 0 a été vue avec les séries de Fourier. On retrouve cette propriété ici, où plus  $\hat{f}$  tend rapidement vers 0, plus  $f$  sera "régulière".

L'analyse spectrale d'un signal se fait en général en regardant l'énergie dans le domaine de Fourier. La conservation de l'énergie est donnée par le théorème de Parseval :

## 2. Fourier pour les signaux analogiques

### Théorème 2.4 (Plancherel-Parseval)

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier. Alors on a conservation de l'énergie :

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

ie.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu.$$

Soit  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{g}$  sa transformée de Fourier. Alors on a conservation du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

ie.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu$$

Maintenant qu'on est capable de faire l'analyse spectrale d'une fonction sommable, la question de sa reconstruction à partir de sa transformée de Fourier vient rapidement. L'information spectrale contenue dans  $\hat{f}$  permet effectivement de retrouver la fonction  $f$  originale. Il n'y a pas de "perte" d'information.

### Théorème 2.5 (Inversion de la transformée de Fourier)

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Si  $f$  est continue en  $t$ , alors

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu.$$

### Remarque 2.2

Avec les autres définitions, les formules de reconstruction deviennent respectivement :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.5)$$

Le théorème de Plancherel-Parseval s'adapte de façon adéquate.

### Remarque 2.3 (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ )

La définition de la transformée de Fourier a été donnée pour les fonctions  $L^1(\mathbb{R})$ . Cette définition se généralise aux fonctions  $L^2(\mathbb{R})$ , mais l'inversion doit être prise au sens des intégrales généralisées.

Outre donner un point de vue fréquentiel sur les fonctions, la transformée de Fourier possède un certain nombre de propriétés intéressantes.



2.2. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier continue (TFC)

**Proposition 2.6**

Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}, \hat{g}$  leurs transformées de Fourier respectives.

Inverse

$$\hat{\hat{f}}(t) = f(-v)$$

Convolution

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Multiplication

$$\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \star \hat{g}$$

Translation

$$\hat{f}(\cdot - u) = e^{-i2\pi uv} \hat{f}$$

Modulation

$$\widehat{e^{i2\pi v \cdot} f(\cdot)} = \hat{f}(v - \cdot)$$

Changement d'échelle

$$\hat{f}(\cdot/s) = |s| \hat{f}(s \cdot)$$

Dérivée temporelle

$$\widehat{f^{(p)}} = v \mapsto (i2\pi v)^p \hat{f}(v)$$

Dérivée fréquentielle

$$\widehat{(-i2\pi \cdot)^p f(\cdot)} = v \mapsto \hat{f}^{(p)}(v)$$

Complexe conjuguée

$$\widehat{\bar{f}} = v \mapsto \tilde{\hat{f}}(-v)$$

Symétrie hermitienne

$$f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{f}(-v) = \tilde{\hat{f}}(v)$$

Dans la pratique on s'intéressera à la *largeur de bande* des signaux et plus particulièrement aux signaux dits à *bande limitée*.

**Définition 2.5**

**(Largeur de bande)**

Soit  $s \in L^2(\mathbb{R})$  un signal analogique et  $\hat{s}$  sa transformée de Fourier.  $\text{supp}\{\hat{s}\}$  est appelé la *largeur de bande* du signal. Cela correspond à l'étendue des fréquences composant le signal. On parle aussi de *largeur de spectre*.

**Définition 2.6**

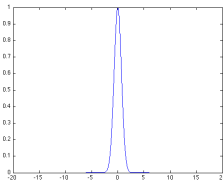
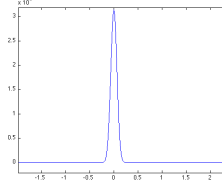
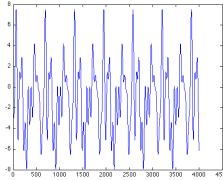
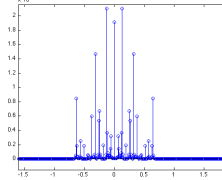
**(Signal à bande limitée)**

Soit  $s \in L^2(\mathbb{R})$  un signal analogique et  $\hat{s}$  sa transformée de Fourier.  $s$  est dit à bande limitée ssi il existe  $B > 0$  tel que

$$\text{supp}\{\hat{s}\} \subset [-B, B] .$$

Un résultat pratique important en traitement du signal est le théorème de Paley-Wiener

## 2. Fourier pour les signaux analogiques

signal temporel	transformée de Fourier
$s \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (signal analogique stable d'énergie finie)  $s(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(v) e^{i2\pi vt} dv$	$\hat{s} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (fonction continue)  $\hat{s}(v) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi vt} dt$
$s \in L^2([0, T])$ (signal analogique périodique)  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(s) e^{i\frac{2\pi}{T} nt}$	$\hat{s} = \{c_n(s)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (suite numérique d'énergie finie)  $c_n(s) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-i\frac{2\pi}{T} nt} dt$

### Théorème 2.6 (Paley-Wiener)

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction non nulle à support compact. Alors sa transformée de Fourier ne peut être nulle sur un intervalle. Inversement, si  $\hat{f}$  est à support compact, alors  $f$  ne peut s'annuler sur un intervalle.

Ce théorème nous dit qu'un signal analogique ne peut être à la fois à bande limitée *et* à support temporel limité!

### 2.3. Récapitulatif : Fourier analogique

On a vu deux types de transformées de Fourier. Au final, toutes ces transformées sont assez semblables, avec des formules adéquates pour l'inversion, ou encore la conservation de l'énergie. On insiste ici sur les *différences* pratiques, suivant qu'on choisisse un modèle plutôt qu'un autre.

# 3 ■ Filtrage analogique (i.e. à temps continu)

**Objectifs:**

- Transformée de Laplace
- Filtrés idéaux
- Filtrés Dynamiques

**Contents**

---

<b>3.1. Un outil d'analyse : la transformée de Laplace</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.2. Rappels et définitions</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>3.3. Exemple : le filtre RC</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>3.4. Filtrés idéaux</b> . . . . .	<b>32</b>
3.4.1. Filtre passe-bas . . . . .	32
3.4.2. Filtre passe-haut . . . . .	32
3.4.3. Filtre passe-bande . . . . .	33
3.4.4. Filtre coupe-bande . . . . .	33
<b>3.5. Filtrés dynamiques continus</b> . . . . .	<b>33</b>

---

## 3.1. Un outil d'analyse : la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une sorte de généralisation de la transformée de Fourier. Elle est basée sur l'utilisation des signaux propres des filtres  $t \mapsto e^{st}$ ,  $s \in \mathbb{C}$ .

**Définition 3.1 (Transformée de Laplace bilatérale)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . La transformée de Laplace de  $f$  est donnée par :

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad p = \sigma + i\omega.$$

Cette intégrale converge dans une bande du plan complexe  $B(\sigma_1, \sigma_2)$  limitée par deux droites parallèles à l'axe imaginaire et d'abscisses  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

### 3. Filtrage analogique (i.e. à temps continu)

#### Remarque 3.1

On peut écrire la transformée de Laplace bilatérale comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(p) &= \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \\ &= \mathcal{L}_{f-}(p) + \mathcal{L}_{f+}(p).\end{aligned}$$

La partie  $\mathcal{L}_{f+}(p)$  est en général appelée transformée de Laplace (unilatérale). Elle est équivalente à la transformée de Laplace bilatérale pour les signaux causaux. On considère dans ce cours la transformée de Laplace bilatérale.

La transformée de Laplace peut être vue comme la transformée de Fourier de la fonction  $f(t)e^{-\sigma t}$  :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(f(t)e^{-\sigma t})(\omega).$$

Deux fonctions peuvent avoir la même transformée de Laplace. La différence se fait alors par la région de convergence de leur transformée notée  $\mathcal{R}(p)$ .

#### Exemple 3.1

1. Soit  $f(t) = H(t)e^{-at}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_{\mathbb{R}} H(t)e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{a+p}, \mathcal{R}(p) = \sigma > -a$$

2. Soit  $f(t) = H(-t)e^{-at}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_{\mathbb{R}} H(-t)e^{-at} e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{a+p}, \mathcal{R}(p) = \sigma < -a$$

L'inversion de la transformée de Laplace s'obtient en appliquant le théorème de Dirichlet (inversion de la transformée de Fourier) à  $f(t)e^{-\sigma t}$ .

#### Définition 3.2

##### (Transformée de Laplace inverse)

Soit  $f$  une fonction admettant pour transformée de Laplace  $\mathcal{L}_f$ .

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}_f(p)) = f(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\sigma^+ - i\infty}^{\sigma^- + i\infty} \mathcal{L}_f(p)e^{pt} dp$$

Pour déterminer la région de convergence d'une transformée de Laplace, il suffit de déterminer  $\sigma^+ = \inf\{\sigma, \mathcal{L}_{f+}(p), p = \sigma + i\omega < +\infty\}$  et  $\sigma^- = \sup\{\sigma, \mathcal{L}_{f-}(p), p = \sigma + i\omega < +\infty\}$ . La région de convergence est alors  $R(p) = ]\sigma^+, \sigma^-[$ .

#### Proposition 3.1

Soit  $f$  une fonction ayant pour transformée de Laplace  $\mathcal{L}_f$ .

- Si  $f$  est causale, alors la région de convergence de  $\mathcal{L}_f$  est de la forme  $R(p) = \sigma > \sigma^+$ . De plus  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} |\mathcal{L}_f(p)| = 0$ .

- Si  $f$  est anti-causale, alors la région de convergence de  $\mathcal{L}_f$  est de la forme  $R(p) = \sigma < \sigma^-$ . De plus  $\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} |\mathcal{L}_f(p)| = 0$ .

**Proposition 3.2**

Soit  $f$  une fonction ayant pour transformée de Laplace  $\mathcal{L}_f(p) = \mathcal{L}(f)(p)$  et  $R(p) = ]\sigma^+, \sigma^-[$ .

- La transformée de Laplace est linéaire.
- Translation :  $\mathcal{L}(f(t - t_0))(p) = e^{-pt_0} \mathcal{L}_f$
- Modulation :  $\mathcal{L}(e^{pt} f(t))(p) = \mathcal{L}_f(p - p_0)$
- Changement d'échelle :  $\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}_f(\frac{p}{a})$  et  $R(p) = ]a\sigma^+, a\sigma^-[$
- Dérivation :  $\mathcal{L}(f'(t))(p) = p \mathcal{L}(f)(p)$
- Intégration :  $\mathcal{L}(\int f)(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}_f(p)$  et  $R = ]\sigma^+, \sigma^- \cup ]0, +\infty[$
- Convolution : Soit  $g$  une fonction ayant pour transformée de Laplace  $\mathcal{L}_g$  et  $R_g(p) = ]\tilde{\sigma}^+, \tilde{\sigma}^-]$ .  $\mathcal{L}(f \star g)(p) = \mathcal{L}_f(p) \mathcal{L}_g(p)$  et  $R = ]\max(\tilde{\sigma}^+, \sigma^+), \min(\tilde{\sigma}^-, \sigma^-)[$
- Lien avec la TFC :  $\hat{f}(v) = \mathcal{L}_f(i2\pi v)$  seulement si  $1 \in \mathcal{R}(p)$  ! Sinon la TFC n'est pas définie.

**Théorème 3.1 (Valeur initiale)**

Soit  $f$  un signal causal et  $\mathcal{L}_f$  sa transformée de Laplace. Alors, quand les limites existent,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma \mathcal{L}_f(p).$$

**Théorème 3.2 (Valeur finale)**

Soit  $f$  un signal causal et  $\mathcal{L}_f$  sa transformée de Laplace. Alors, quand les limites existent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma \mathcal{L}_f(p).$$

### 3.2. Rappels et définitions

On a vu dans le chapitre 1 qu'un filtre est système linéaire et invariant dans le temps, et qu'on peut l'écrire comme une convolution avec sa réponse impulsionnelle, cette dernière le caractérisant parfaitement (on confondra souvent par la suite un filtre avec sa réponse impulsionnelle). Un filtre pourra se caractériser aussi par sa fonction de transfert ou son gain complexe.

### 3. Filtrage analogique (i.e. à temps continu)

$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	$R$
$\delta(t)$	1	$\mathbb{C}$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$	$\sigma > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\sigma > 0$
$e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\sigma > \text{Re}(a)$
$\sin(\omega t)H(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sigma > 0$
$\cos(\omega t)H(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\sigma > 0$

TABLE 3.1. – Transformées de Laplace usuelles

#### Définition 3.3 (Réponse impulsionnelle)

Soit un filtre  $\mathcal{S}$  continu. La réponse impulsionnelle d'un filtre est sa réponse à l'impulsion unité. C'est-à-dire  $\mathcal{S}(\delta_t) = h_t$ . Ainsi, pour tout signal numérique  $x$ ,  $\mathcal{S}(x)[k] = h \star x[k] = \sum_n x[k-n]h[n]$

#### Définition 3.4 (Fonction de transfert)

Soit  $\mathcal{S}$  un filtre à temps continue. La fonction de transfert du filtre est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle. Pour un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , on la note en général  $H(s)$ .

#### Définition 3.5 (Réponse en fréquence ou gain complexe)

C'est la restriction de la fonction de transfert à l'axe imaginaire en temps continue. Cela correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (lorsque qu'elle converge). On la note en général  $G(\nu)$ .

La réponse en fréquence d'un filtre donne un sens essentiel à la notion de filtrage. En effet, notons  $h$  la réponse impulsionnelle d'un filtre. On a vu que la réponse en sortie  $\nu(t)$  d'un filtre s'obtient par définition comme la convolution de l'entrée  $u(t)$  par la réponse impulsionnelle  $h(t)$  :

$$\nu(t) = h \star u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)u(x-t) dx . \quad (3.1)$$

Si l'on prend la transformée de fourier de l'équation précédente, on trouve :

$$\hat{\nu}(\nu) = \hat{h}(\nu)\hat{u}(\nu).$$

On voit donc clairement qu'une opération de filtrage permet d'agir directement sur le contenu fréquentiel d'un signal : certaine fréquence vont être atténuées (voire annulée) et d'autres vont être renforcées. La valeur critique d'une fréquence qui annule les fréquence d'un signal est appelée *fréquence de coupure* (voir plus bas).

### 3.3. Exemple : le filtre RC

Les signaux “exponentielles complexes” jouent un rôle particulier pour les filtres à temps continu, car ce sont les *signaux propres*. En effet, appliquons l’excitation  $t \mapsto x(t) = e^{st}$ ,  $s \in \mathbb{C}$  au filtre  $\mathcal{S}$  de réponse impulsionnelle  $h$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x(t)) &= \mathcal{S}(e^{st}) = \int_{\mathbb{R}} h(t - \theta) e^{s\theta} d\theta \\ &= e^{st} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-su} du \\ &= H(s) e^{st} = H(s) x(t) \end{aligned}$$

avec  $H(s) = \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-su} du$  la valeur propre associée au signal propre  $t \mapsto e^{st}$ .

### 3.3. Exemple : le filtre RC

Prenons pour exemple le filtre RC de la figure 3.3.

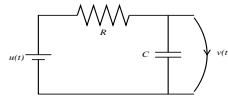


FIGURE 3.1. – Filtre RC.

La tension  $v(t)$  aux bornes du condensateur est donnée par l’équation différentielle :

$$RCv'(t) + v(t) = u(t), \quad (3.2)$$

qui a pour solution

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{RC}} u(s) ds. \quad (3.3)$$

Le système est clairement linéaire : cela se voit dès l’équation différentielle (3.2), étant donné que l’opérateur de dérivation est linéaire. La linéarité se voit donc aussi dans la solution (3.3) avec la linéarité de l’intégrale.

Montrons que de plus, on a bien affaire à un filtre. Il suffit pour cela d’exprimer la sortie  $v(t)$  comme une convolution de l’entrée  $u(t)$ . En posant

$$h(t) = \frac{1}{RC} \Theta(t) e^{-\frac{t}{RC}},$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside. On vérifie immédiatement que

$$v(t) = h \star u(t).$$

Ce résultat se retrouve en utilisant la transformée de Laplace et ses propriétés. La transformée de Laplace de (3.2) s’écrit :

$$p\mathcal{L}_v(p) + \frac{1}{RC}\mathcal{L}_v(p) = \frac{1}{RC}\mathcal{L}_u(p),$$

### 3. Filtrage analogique (i.e. à temps continu)

avec un domaine de convergence de type  $p \in ]\sigma, +\infty[$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ , le système étant clairement causal. On obtient donc

$$\mathcal{L}_v(p) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + p} \mathcal{L}_u(p).$$

On identifie alors la transformée de Laplace  $\mathcal{L}_h$  de la réponse impulsionnelle du filtre :

$$\mathcal{L}_h(p) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + p},$$

qu'il suffit d'inverser pour obtenir la réponse impulsionnelle du filtre RC :

$$h(t) = \frac{1}{RC} \Theta(t) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

## 3.4. Filtres idéaux

Les filtres idéaux sont des filtres qui permettent d'annuler parfaitement certaines fréquences des signaux à partir d'une fréquence de coupure donnée. On présente les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande idéaux.

### 3.4.1. Filtre passe-bas

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bas idéal est donnée par

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < \nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\nu_0$  est la *fréquence de coupure* du filtre : toutes les composantes haute fréquence (au delà de la fréquence de coupure) d'un signal filtré par un passe-bas idéal sont annulées.

On peut alors chercher à exprimer la réponse impulsionnelle de ce filtre. Il suffit pour cela d'inverser sa transformée de Fourier (3.4). On montre alors que

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi\nu_0 t)}{\pi t}.$$

On remarque immédiatement que ce filtre *n'est pas causal!* Il n'est donc pas réalisable et ne peut pas être mis en oeuvre sur un circuit analogique.

### 3.4.2. Filtre passe-haut

La réponse en fréquence d'un filtre passe-haut idéal est donnée par

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| > \nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\nu_0$  est la *fréquence de coupure* du filtre : toutes les composantes basse fréquence (au dessous de la fréquence de coupure) d'un signal filtré par un passe-haut idéal sont annulées.



### 3.4.3. Filtre passe-bande

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bande idéal est donnée par

$$\hat{h}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_0 < |v| < v_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $v_0$  et  $v_1$  sont les *fréquences de coupure* du filtre : toutes les composantes basse fréquence au dessous de la fréquence de coupure  $v_0$ , et hautes fréquences au dessus de la fréquence de coupure  $v_1$  d'un signal filtré par un passe-bande idéal sont annulées.

### 3.4.4. Filtre coupe-bande

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bande idéal est donnée par

$$\hat{h}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_0 < |v| < v_1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $v_0$  et  $v_1$  sont les *fréquences de coupure* du filtre : seules les composantes basse fréquence au dessous de la fréquence de coupure  $v_0$ , et hautes fréquences au dessus de la fréquence de coupure  $v_1$  d'un signal filtré par un passe-bande idéal sont conservées. Ce filtre est "l'inverse" du filtre précédent.

Tout comme le filtre passe-basse idéal, les filtres passe-haut, passe-bande et coupe bande ne sont pas réalisables. Il faudra en pratique se contenter d'une approximation par des filtres analogiques.

## 3.5. Filtres dynamiques continues

L'exemple du filtre RC peut se généraliser à des filtres gouvernés par une équation différentielle de la forme :

$$a_0 v(t) + a_1 v'(t) + a_2 v''(t) + \dots + a_N v^{(N)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + b_2 u''(t) + \dots + b_M u^{(M)}(t)$$

où les  $a_i, b_j$  sont des constantes. La transformée de Laplace d'une telle équation donne :

$$a_0 \mathcal{L}_v(p) + a_1 p \mathcal{L}_v(p) + a_2 p^2 \mathcal{L}_v(p) + \dots + a_N p^N \mathcal{L}_v(p) = b_0 \mathcal{L}_u(p) + b_1 p \mathcal{L}_u(p) + b_2 p^2 \mathcal{L}_u(p) + \dots + b_M p^M \mathcal{L}_u(p)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(p) &= \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_M p^M}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_N p^N} \mathcal{L}_u(p) \\ &= H(p) \mathcal{L}_u(p) \end{aligned}$$

### 3. Filtrage analogique (i.e. à temps continu)

La fonction de transfert  $H(p)$  d'un tel filtre est donc une fraction rationnelle (i.e. le quotient de deux polynômes) que l'on peut factoriser comme :

$$H(p) = C \frac{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_M)}{(p - q_1)(p - q_2) \dots (p - q_N)},$$

où les  $p_1, \dots, p_M$  sont les racines du numérateur et les  $q_1, \dots, q_N$  sont les racines du dénominateur (ie, les pôles de la fraction rationnelle).

Afin de synthétiser des filtres, il suffit donc *a priori* de se donner une fraction rationnelle. Encore faut-il que le filtre soit réalisable. Ceci impose des contraintes sur les racines du dénominateur données par le théorème suivant

#### Théorème 3.3

Soit un filtre de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{n(p)}{d(p)}$$

où le numérateur  $n$  et le dénominateur  $p$  sont deux polynômes tels que  $\text{dř}(n) \leq \text{dř}(d)$ . Le filtre est réalisable si et seulement si les racines  $q_1, \dots, q_M$  du dénominateur  $d$  ont une partie réelle négative.

En pratique, on commence par se donner un candidat pour  $\left| \frac{n(i\nu)}{d(i\nu)} \right|^2$  sous la forme d'un quotient de deux polynômes  $\frac{\mathcal{N}(i\nu)}{\mathcal{D}(i\nu)}$ . Sous les hypothèses appropriées, il est possible de s'assurer qu'un tel quotient est en effet le module carré de la fonction de transfert d'un filtre réalisable. Plus précisément

#### Théorème 3.4

Soient  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{D}$  deux polynômes à coefficients réels positifs et pairs. Alors il existe deux polynômes  $n$  et  $d$  tels que l'on ait

$$\frac{\mathcal{N}(i\nu)}{\mathcal{D}(i\nu)} = \left| \frac{n(i\nu)}{d(i\nu)} \right|^2.$$

De plus,  $d$  peut être choisi de sorte que le filtre de réponse en fréquence  $\frac{n(i\nu)}{d(i\nu)}$  soit réalisable.

# 4

## Fourier pour les signaux à temps discret

### Objectifs:

- Connaître les **deux** transformées de Fourier **pour les signaux à temps discret**
- Signaux stables et à énergie finie : transformée Fourier à temps discret
- Signaux discret à support fini : transformée de Fourier Finie.
- Faire une analyse spectrale

### Contents

---

4.1. Signaux stable et/ou à énergie finie : transformée de Fourier discrète (TFD) . . . . .	35
4.2. Signaux numériques finis : transformée de Fourier finie (TFF) . . . . .	36
4.3. Récapitulatif : Fourier pour les signaux à temps discret . . . . .	39
4.4. Récapitulatif général . . . . .	40

---

Le chapitre 2 a introduit l'analyse de Fourier dans le cas des signaux analogiques. Les outils informatiques aidant, la majorité des signaux sont traités numériquement. Cette section adapte donc l'analyse de Fourier pour les signaux numériques.

### 4.1. Signaux stable et/ou à énergie finie : transformée de Fourier discrète (TFD)

On commence par introduire l'analyse de Fourier pour les suites numériques  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Une façon pratique de passer de l'analyse continue à l'analyse discrète, est l'utilisation d'un peigne de Dirac. On peut en effet associer au signal discret

#### 4. Fourier pour les signaux à temps discret

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un signal à temps continu (en fait, une distribution) :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n \delta(t-n).$$

On peut très facilement définir la transformée de Fourier pour les distributions en reprenant le travail précédent. On trouve alors la définition suivante.

##### Définition 4.1 (Transformée de Fourier discrète)

Soit  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La transformée de Fourier discrète de  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est la fonction 1-périodique de la variable *continue* :

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i2\pi n\nu}.$$

Cette fonction est une **fonction périodique de période 1**. Cette transformée est inversible, et l'on retrouve le signal original par le théorème suivant

##### Théorème 4.1 (Inversion de la TFD)

Soit  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  et  $\hat{s}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$s_n = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi n\nu} d\nu.$$

Lorsque le signal est à énergie fini, on dispose toujours de la formule de Plancherel-Parseval.

##### Théorème 4.2 (Plancherel-Parseval)

Soit  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et  $\hat{s}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$\|s\|_2^2 = \|\hat{s}\|_2^2$$

ie.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

Tout comme pour la transformée de Fourier continue, la transformée de Fourier discrète possède les mêmes propriétés utiles de calcul (en particulier, la convolution dans le domaine temporel devient une multiplication dans le domaine fréquentiel).

## 4.2. Signaux numériques finis : transformée de Fourier finie (TFF)

En pratique, un traiteur de signal s'intéresse à des signaux numériques à support temporel limité, c'est-à-dire des suites numériques de longueur finie. On définit

#### 4.2. Signaux numériques finis : transformée de Fourier finie (TFF)

alors la transformée de Fourier finie du signal, qui est en fait la série de Fourier discrète du signal périodisé.

##### Définition 4.2 (Transformée de Fourier finie)

Soit  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tel qu'il existe un  $N > 0$  et  $s_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, \dots, N-1\}$ . Alors la transformée de Fourier discrète finie de  $s$  est donnée par :

$$\hat{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} .$$

On peut reconstruire le signal avec la formule d'inversion idoine.

##### Théorème 4.3 (Inversion de la TFF)

Soit  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tel qu'il existe un  $N > 0$  et  $s_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, \dots, N-1\}$  et soit  $\hat{s}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn} .$$

Les formules de Plancherel-Parseval s'adaptent directement :

##### Théorème 4.4 (Plancherel-Parseval)

Soit  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tel qu'il existe un  $N > 0$  et  $s_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, \dots, N-1\}$  et soit  $\hat{s}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$\|s\|_2^2 = \frac{1}{N} \|\hat{s}\|_2^2 ,$$

ie.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{s}_k|^2 .$$

Soit  $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tel que  $v_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, \dots, N-1\}$  et soit  $\hat{v}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$\langle s, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{s}, \hat{v} \rangle$$

ie.

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_n v_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k \hat{v}_k .$$

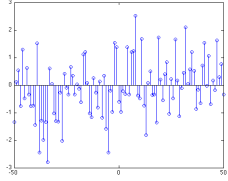
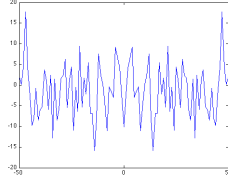
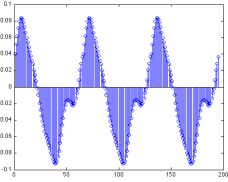
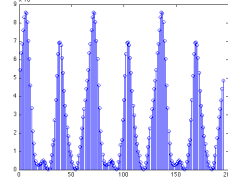
Ici encore, la convolution dans le domaine temporel devient une multiplication dans le domaine fréquentiel et vice-versa. Attention cependant, la convolution discrète est ici une convolution *circulaire*, c'est-à-dire que le signal considéré doit être périodisé, de période  $N$ .

#### 4. *Fourier pour les signaux à temps discret*

En pratique, la TFF s'implémente grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT pour Fast Fourier Transform).

### 4.3. Récapitulatif : Fourier pour les signaux à temps discret

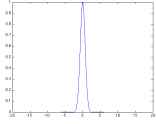
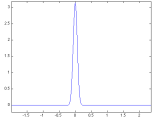
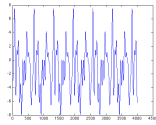
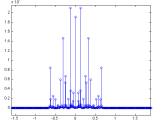
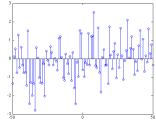
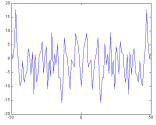
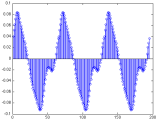
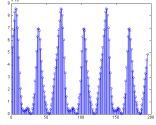
On a vu en tout deux types de transformées de Fourier. Au final, toutes ces transformées sont assez semblables, avec des formules adéquates pour l'inversion, ou encore la conservation de l'énergie. On insiste ici sur les *différences* pratiques, suivant qu'on choisisse un modèle plutôt qu'un autre.

signal temporel	transformée de Fourier
$s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (signal numérique d'énergie finie)  $s_n = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{s}(v) e^{i2\pi v n} dv$	$\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ (fonction continue périodique)  $\hat{s}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i2\pi v n}$
$s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\{0, \dots, N-1\})$ (signal numérique fini, périodique)  $s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k e^{i \frac{2\pi}{N} k n}$	$\hat{s} \in \ell^2(\{0, \dots, N-1\})$ (suite numérique finie périodique)  $\hat{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{2\pi}{N} k n}$

4. Fourier pour les signaux à temps discret

### 4.4. Récapitulatif général

En tout, considérant les signaux à temps continu ou à temps discret, il existe donc **quatre** transformées de Fourier.

signal temporel	transformée de Fourier
$s \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (signal analogique stable d'énergie finie)  $s(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(v) e^{i2\pi vt} dv$	$\hat{s} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (fonction continue)  $\hat{s}(v) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi vt} dt$
$s \in L^2((0, T))$ (signal analogique périodique)  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(s) e^{i\frac{2\pi}{T} nt}$	$\hat{s} = \{c_n(s)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (suite numérique d'énergie finie)  $c_n(s) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-i\frac{2\pi}{T} nt} dt$
$s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (signal numérique d'énergie finie)  $s_n = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{s}(v) e^{i2\pi vn} dv$	$\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ (fonction continue périodique)  $\hat{s}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i2\pi vn}$
$s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\{0, \dots, N-1\})$ (signal numérique fini, périodique)  $s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k e^{i\frac{2\pi}{N} kn}$	$\hat{s} \in \ell^2(\{0, \dots, N-1\})$ (suite numérique finie périodique)  $\hat{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i\frac{2\pi}{N} kn}$



# 5 ■ Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

## Objectifs:

- Calculer les transformées en  $Z$  pour les signaux discret
- Importance des régions de convergences pour l'analyse de causalité
- Filtres FIR
- Filtres IIR
- Synthèse de filtres

## Contents

---

5.1. Un outil d'analyse : la transformées en $z$ . . . . .	41
5.2. Filtrage : rappels et définitions . . . . .	43
5.2.1. Filtres FIR ou MA . . . . .	44
5.2.2. Filtre IIR . . . . .	47
5.2.3. Synthèse de filtre IIR . . . . .	49

---

## 5.1. Un outil d'analyse : la transformées en $z$

### Définition 5.1 (Transformée en $z$ )

Soit  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un signal numérique. Sa transformée en  $z$  est la série

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

définie dans la couronne de convergence  $r_1 < |z| < r_2$ .

5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

**Définition 5.2 (Rayon de convergence)**

Le rayon de convergence  $\rho$  de la série entière  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est définie par

$$\rho = \sup \left\{ |z|, z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

et on a le lemme

**Lemme 5.1**

Le rayon de convergence  $\rho$  de la série entière  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est donné par

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Et donc la couronne de convergence de  $S$  est donnée par

$$r_1 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |s_n|^{1/n} \quad \frac{1}{r_2} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |s_{-n}|^{1/n}$$

**Théorème 5.1 (Causalité et disque de convergence)**

Un signal  $s$  est causal si sa transformée en  $z$  est définie à l'extérieur d'un disque de rayon  $r_1$ , ie si  $r_2 = +\infty$ . De même  $s$  est anticausal si  $r_1 = 0$ , ie. si  $S(z)$  est définie à l'intérieur du disque de rayon  $r_2$ .

**Proposition 5.1**

Soit  $x$  un signal numérique et  $\mathcal{Z}(x_n) = X(z)$  sa transformée en  $z$ .

- La transformée en  $z$  est linéaire
- Translation :  $\mathcal{Z}(x_{n-k}) = z^{-k} X(z)$
- Changement d'échelle :  $\mathcal{Z}(a^n x_n) = X\left(\frac{z}{a}\right)$
- Dérivation :  $\mathcal{Z}(n^k x_n) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k X(z)$
- Convolution :  $\mathcal{Z}(u * v)(z) = U(z)V(z)$
- Lien avec la TFD :  $\hat{u}(v) = U(e^{i2\pi v})$  seulement si  $r_1 < 1 < r_2$  ! Sinon la TFD n'est pas définie.

**Théorème 5.2 (Valeur initiale)**

Soit  $x = \{x_n\}$  un signal causal et  $X(z)$  sa transformée en  $z$ . Alors

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z).$$

**Théorème 5.3 (Valeur finale)**

Soit  $x = \{x_n\}$  un signal causal et  $X(z)$  sa transformée en  $z$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z).$$

$x_n$	$X(z)$	$R$
$\delta_n$	1	$\mathbb{C}$
$H_n$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$nH_n$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
$a^n H_n$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
$na^n H_n$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-a^n H_{-n-1}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  <  a $
$-na^n H_{-n-1}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\cos(\omega_0 n) H_n$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 n) H_n$	$\frac{1-z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) H_n$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \sin(\omega_0 n) H_n$	$\frac{1-az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$ z  >  a $

TABLE 5.1. – Transformées en  $z$  usuelles

## 5.2. Filtrage : rappels et définitions

On a vu dans le chapitre 1 qu'un filtre est système linéaire et invariant dans le temps, et qu'on peut l'écrire comme une convolution avec sa réponse impulsionnelle, cette dernière le caractérisant parfaitement (on confondra souvent par la suite un filtre avec sa réponse impulsionnelle). Un filtre pourra se caractériser aussi par sa fonction de transfert ou son gain complexe.

**Définition 5.3 (Réponse impulsionnelle)**

Soit un filtre  $\mathcal{S}$  discret. La réponse impulsionnelle d'un filtre est sa réponse à l'impulsion unité  $\mathcal{S}(\delta_t) = h_t$ . Ainsi, pour tout signal numérique  $x$

$$\mathcal{S}(x)[k] = h \star x[k] = \sum_n x[k-n]h[n]$$

**Définition 5.4 (Fonction de transfert)**

La fonction de transfert d'un filtre numérique est la transformée en  $z$  de sa réponse impulsionnelle. Pour un filtre de réponse impulsionnelle  $h_n$ , on la note

## 5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

en général  $H(z)$ .

### Définition 5.5 (Réponse en fréquence ou gain complexe)

C'est la restriction de la fonction de transfert au cercle unité en temps discret. Cela correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (lorsqu'elle converge). On la note en général  $G(\nu)$ .

La réponse en fréquence d'un filtre donne un sens essentiel à la notion de filtrage. En effet, notons  $h$  la réponse impulsionnelle d'un filtre. On a vu que la réponse en sortie  $\nu$  d'un filtre s'obtient par définition comme la convolution de l'entrée  $u$  par la réponse impulsionnelle  $h$  :

$$\nu_n = (h \star u)_n . \quad (5.1)$$

Si l'on prend la transformée de Fourier de l'équation précédente, on trouve :

$$\hat{\nu}(\nu) = \hat{h}(\nu) \hat{u}(\nu) = \sum_k h_k u_{n-k}$$

Sur cette opération, qu'on appelle aussi *équation aux différences*, on voit donc clairement qu'une opération de filtrage permet d'agir directement sur le contenu fréquentiel d'un signal : certaines fréquences vont être atténuées (voire annulées) et d'autres vont être renforcées. La valeur critique d'une fréquence qui annule les fréquences d'un signal est appelée *fréquence de coupure* (voir plus bas).

Les signaux "exponentielles complexes" jouent un rôle particulier pour les filtres à temps continu, car ce sont les *signaux propres*. En effet, les signaux propres sont les suites de la forme  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x_k) = \mathcal{S}(z^k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k-n} z^n \\ &= z^k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n} \\ &= H(z) z^k = H(s) x_k \end{aligned}$$

avec  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$  la valeur propre associée au signal propre  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

### 5.2.1. Filtres FIR ou MA

#### 5.2.1.1. Définition

Le fait de se limiter à un nombre fini d'opération impose que la réponse impulsionnelle n'ait qu'un nombre fini de coefficients  $h_k$  non nuls. La définition d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, appelé aussi filtres à moyenne mobile s'écrit

**Définition 5.6 (Filtre FIR ou MA)**

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $h$ . Le filtre est dit "à réponse impulsionnelle finie" (FIR) ou "à moyenne mobile" (MA) si  $h$  est finie :  $h = \{h_{-k_1}, \dots, h_0, \dots, h_{k_2}\}$

L'équation aux différences s'écrit alors :

$$y_n = \sum_{k=-k_1}^{k_2} h_k x_{n-k}$$

On appelle **ordre** du filtre, le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle.

On remarque qu'un filtre FIR est forcément stable, mais peut ne pas être causal. La condition pour qu'un tel filtre soit réalisable ne dépend donc que de sa causalité. L'équation aux différences d'un filtre FIR réalisable s'écrit donc :

$$v_n = \sum_{k=0}^K h_k u_{n-k} .$$

**5.2.1.2. synthèse par fenêtrage**

On cherche à synthétiser un filtre RIF (ou MA) **causal**, qui s'approche le plus possible d'un filtre idéal recherché. Le filtre idéal a une réponse impulsionnelle  $h^{\text{idéal}}$  à support infini, non causal :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} ,$$

tandis que le filtre RIF que l'on cherche étant causal, sa réponse impulsionnelle  $h$  doit être causale :

$$y_n = \sum_{k=0}^K h_k x_{n-k}$$

La première méthode de synthèse de filtre est la méthode par troncature, et peut se résumer par les trois points suivants Soit un filtre idéal de fonction de transfert  $H^{\text{idéal}}$  et de réponse impulsionnelle  $h^{\text{idéal}}$ . Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre  $N + 1$  est :

1. **Calcul** de la réponse impulsionnelle  $h^{\text{idéal}}$  par transformée de Fourier inverse :

$$h_n^{\text{idéal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} d\nu$$

2. **Troncature** de la réponse impulsionnelle  $h^{\text{idéal}}$

$$h^{\text{tronc}} = \{h_{-N/2}^{\text{idéal}}, \dots, h_{N/2}^{\text{idéal}}\}$$

3. Application d'un **retard** sur  $h^{\text{tronc}}$ , afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{tronc}}$$

## 5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

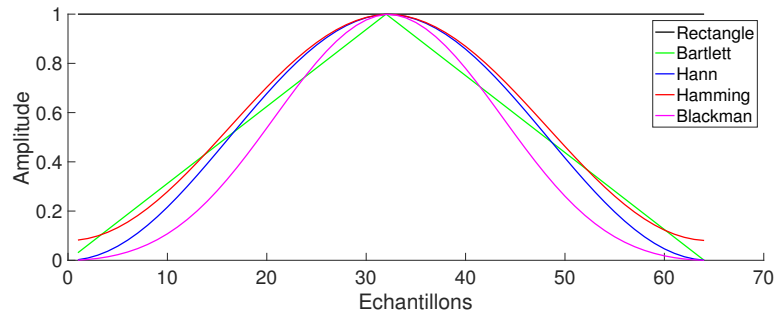


FIGURE 5.1. – Représentation temporelle des fenêtres classiques

Cette méthode présente un inconvénient majeur : la troncature (i.e. multiplication d'une fenêtre rectangulaire), fait apparaître un phénomène de Gibbs. Une solution est d'utiliser une fenêtre plus douce que la fenêtre rectangulaire, afin d'éviter les coupures franches et atténuer ce phénomène. Les fenêtres les plus courantes sont les suivantes

- Bartlett (ou triangulaire)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hann

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Blackman

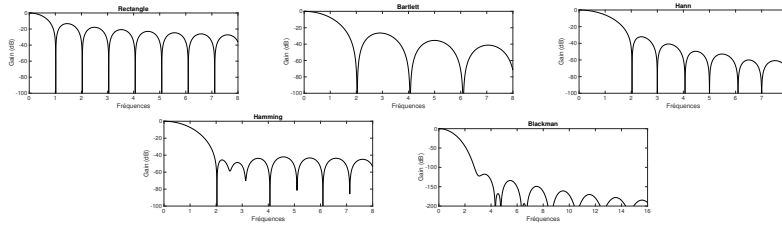
$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra se reporter à la figure 5.1 pour une représentation temporelle de ces fenêtres, et à la figure 5.2.1.2 pour leur représentation spectrale.

Les caractéristiques principales des fenêtres peuvent se résumer par

- la largeur du lobe principal ;
- le rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire ;
- l'atténuation minimale en bande atténuée.

## 5.2. Filtrage : rappels et définitions



Type de fenêtre	Largeur du lobe principal	Rapport d'amplitude	Atténuation minimale
Rectangulaire	$4\pi/N$	-13 dB	-21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	-25 dB	-25 dB
Hann	$8\pi/N$	-31 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/N$	-41 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/N$	-57 dB	-74 dB

TABLE 5.2. – Caractéristique principales des fenêtres

On résume dans le tableau 5.2 les caractéristiques principales des fenêtres précédentes.

La procédure par troncature précédente devient alors la synthèse par fenêtrage

- **Calcul** de la réponse impulsionnelle  $h^{\text{ideal}}$  par transformée de Fourier inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} d\nu$$

- **Fenêtrage** de la réponse impulsionnelle  $h^{\text{ideal}}$

$$h^{\text{win}} = w \cdot \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \dots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

- Application d'un **retard** sur  $h^{\text{tronc}}$ , afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{win}}$$

### 5.2.2. Filtre IIR

Par opposition, les filtres à *réponse impulsionnelle infinie*, ou filtre IIR (Infinite Impulse Response) ont une infinité de coefficients  $h_k$  non nuls. Pour implémenter de tels filtres, il faut a priori les approcher par des filtres FIR en remplaçant par des zéros tous les coefficients plus petits qu'une certaine limite de précision fixées :

$$v_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k u_{n-k} \approx \sum_{k=-k_1}^{k_2} h_k u_{n-k}.$$

Il peut cependant arriver que le nombre de coefficients à retenir pour atteindre la précision voulue soit excessivement grand, et conduise à des coûts prohibitif

### 5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

en temps de calculs. Si l'on reprend l'exemple du filtre passe-bas idéal, sa réponse impulsionnelle en temps discret est

$$h_n = \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n} .$$

Les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre décroissent donc en  $\frac{1}{n}$ . Par conséquent, si l'on veut approcher ce filtre avec une erreur d'environ  $10^{-6}$ , il faudra de l'ordre de un million de coefficients. Il faut donc compter dix milliard d'opérations par secondes pour traiter un signal de paroles échantillonné à 10 kHz. On voit que la charge devient trop lourde pour ce type d'opération.

Il existe cependant une alternative viable pour implémenter des filtres IIR avec un nombre limité d'opérations : *les filtres récursifs*. Étant donné un signal d'entrée  $u$ , l'idée est de construire un signal de sortie  $v$  de la forme :

$$v_n = \sum_{k=0}^M b_k u_{n-k} - \sum_{k=1}^N a_k v_{n-k} , \quad (5.2)$$

c'est-à-dire tel que  $v_n$  soit obtenu par filtrage des  $u_m$  antérieurs à  $n$  et filtrage des  $v_m$  antérieur à  $n$  en utilisant les filtres  $\{b_0, \dots, b_M\}$  et  $\{a_1, \dots, a_N\}$ . Si cette équation a une solution unique, alors l'opérateur  $T : u \rightarrow v$  est un filtre récursif.

Pour étudier l'existence de solution, on pose  $a_0 = 1$ . L'équation (5.2) est équivalente au système

$$\sum_{k=0}^N a_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^M b_k u_{n-k} ,$$

qui après transformation en  $z$  devient :

$$V(z) \left( \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) = U(z) \left( \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

ce qui s'écrit

$$V(z) = H(z)U(z) .$$

avec

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} .$$

La solution est donc bien définie si le dénominateur ne s'annule jamais. Comme dans le cas continue, on peut factoriser cette fraction rationnelle, et l'on déduit le théorème suivant :

#### Théorème 5.4

Soit un filtre numérique de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$$

où le numérateur  $n$  et le dénominateur  $p$  sont deux polynômes. Le filtre récurs-



sif correspondant est bien défini si et seulement si aucun des pôles complexes n'est de module égale à 1.

De plus, le filtre est causal si et seulement si les pôles du dénominateur  $d$  ont un module strictement supérieur à 1.

### 5.2.3. Synthèse de filtre IIR

On se contentera de donner ici les grandes étapes, sans entrer dans les détails. Les méthodes générales existantes, qu'on ne présentera pas ici, sont :

- l'invariance impulsionnelle (on cherche  $h_n$  comme l'échantillonnage de  $h(t)$ )
- la transformation d'Euler (Approximation d'une dérivée continue en discret)
- la transformation bilinéaire (la plus classique)

On présentera ici les grandes familles de filtres IIR : butterworth, Tchebychev et elliptique. Et l'on suivra la méthode "pratique" générale de synthèse de filtres IIR qui peut se résumer par les trois points suivants

1. Définir un gabarit de filtre analogique
2. Approcher ce gabarit par la fonction de transfert d'un filtre de type donné (Butterworth, Tchebychev, ...)
3. Transformer la fonction de transfert analogique en fonction de transfert numérique

#### 5.2.3.1. Spécifications

On commence par se donner un gabarit de filtre (cf. figure 5.2), sur lequel on précise les spécification générales :

- Choix du type : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...
- Choix du Gabarit

et les spécifications particulières :

- Bande passante  $[f_{p-}, f_{p+}]$
- Bande atténuée  $[0, f_{a-}] [f_{a+}, 0.5]$
- Ondulation en bande passante  $\varepsilon_1$
- Ondulation en bande atténuée  $\varepsilon_2$

En pratique, on choisira parmi les familles de filtres suivantes.

#### 5.2.3.2. Filtres classiques

On peut citer trois grandes familles :

1. Filtres de Butterworth
2. Filtres de Tchebychev I et II
3. Filtre Elliptique
4. (+ Filtres de Bessel)

## 5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

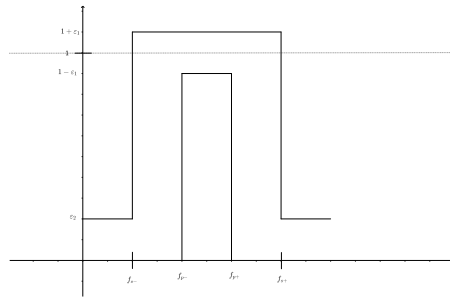


FIGURE 5.2. – Gabarit d'un filtre

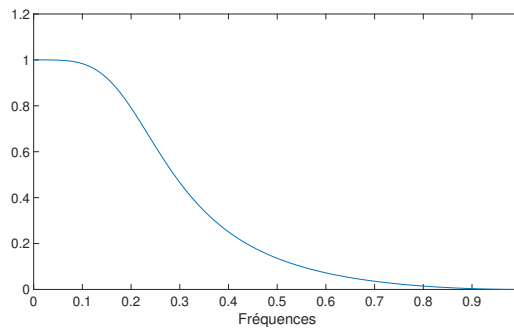


FIGURE 5.3. – Filtre de butterworth

**Filtres de Butterworth** La fonction de transfert des filtres de Butterworth est donnée par

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$$

et représentée sur la figure 5.3. Ses caractéristiques principales sont

- Fréquence de coupure  $f_c$
- Ordre  $N$
- Module de la fonction de transfert monotone

**Filtres de Tchebychev I** La fonction de transfert des filtres de Tchebychev I est donnée par

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f}{f_p}\right)}$$

où  $T_N$  est un polynôme de Tchebychev de degré  $N$ . et représentée sur la figure 5.4. Ses caractéristiques principales sont

## 5.2. Filtrage : rappels et définitions

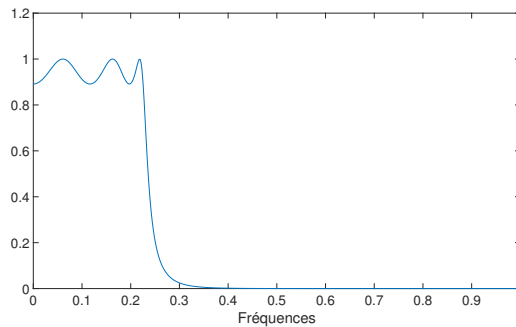


FIGURE 5.4. – Filtre de Tchebychev I

- Bande passante  $f_p$
- Ondulation en bande passante  $\varepsilon$
- Ordre  $N$
- Monotone en bande atténuée

**Filtres de Tchebychev II** La fonction de transfert des filtres de Tchebychev II est donnée par

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f_s}{f}\right)}$$

où  $T_N$  est un polynôme de Tchebychev de degré  $N$  et représentée sur la figure 5.5. Ses caractéristiques principales sont

- Bande atténuée  $f_s$
- Monotone en bande passante
- Ondulation en bande atténuée  $\varepsilon$
- Ordre  $N$

**Filtres elliptiques** La fonction de transfert des filtres de Tchebychev II est donnée par

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2\left(\frac{f}{\sqrt{f_p f_s}}\right)}$$

où  $T_N$  est un polynôme de Tchebychev de degré  $N$  et représentée sur la figure 5.6. Ses caractéristiques principales sont

- Bande passante  $f_p$
- Bande atténuée  $f_s$
- Ondulation en bande atténuée et en bande passante  $\varepsilon$
- Ordre  $N$

5. Filtrage numérique (i.e. à temps discret)

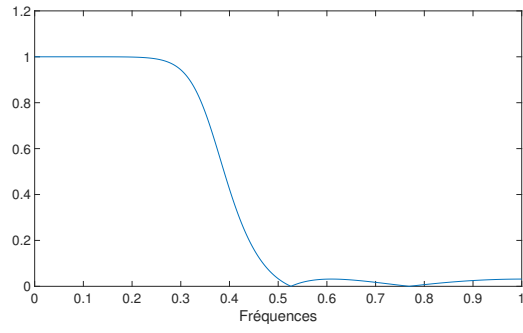


FIGURE 5.5. – Filtre de Tchebychev II

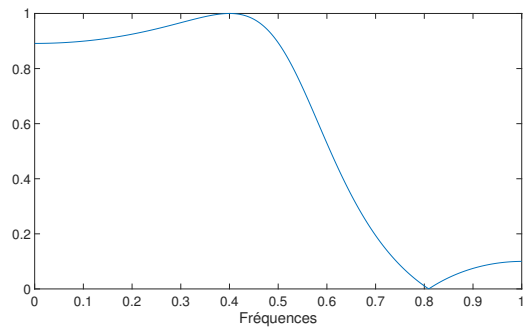


FIGURE 5.6. – Filtre Elliptique

# 6 ■ Échantillonnage

## Objectifs:

- Théorème d'échantillonnage
- Fréquence de Nyquist
- Problèmes liés au repliement spectral

Une grande majorité des signaux auxquels le traiteur de signal est confronté ont une origine physique (voix, image, signaux géophysiques...) et sont donc analogiques. Afin de les traiter numériquement, la conversion analogique/numérique doit se faire le plus fidèlement possible en contrôlant la perte d'information et l'ajout de "bruit". On présente ici le théorème fondamentale de l'échantillonnage.

## 6.1. Théorème d'échantillonnage

Bien qu'on présente une version "moderne" de l'échantillonnage tel que présenté par Shannon, Nyquist, Whittaker et Kotelnikov, qui ont étudié le problème dans la 1ère moitié du XXème siècle, les mathématiciens, comme Cauchy, se sont rapidement posé la question d'approcher une fonction continue par une suite numérique.

Le théorème d'échantillonnage se formule dans le cadre des signaux à *bande limitée*.

### Définition 6.1 (Espace de Paley-Wiener)

On appelle espace de Paley-Wiener, l'espace de signaux d'énergie finie à bande limitée :

$$PW_{\nu_0} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(\nu) = 0 \forall \nu \notin [-\nu_0, \nu_0]\} .$$

On peut formuler le théorème d'échantillonnage de plusieurs façon (bien entendu équivalentes). On donne une première version "générale" de ce théorème, généralement suffisante pour l'ingénieur ou le physicien, suivie d'une version mathématiquement plus précise.

## 6. Échantillonnage

### Théorème 6.1 (Échantillonnage)

Soit  $s \in L^2(\mathbb{R})$  un signal analogique à bande limitée dans l'intervalle de fréquence  $\nu \in [-\nu_0, \nu_0]$ . Alors  $s$  peut être reconstruit (ie, interpolé) sans erreur à partir de ses échantillons  $s(t_n)$  prélevés aux instants  $t_n = \frac{n}{2\nu_0} = nT_e$ .

On donne les éléments de preuves ci-après

*Démonstration.* La transformée de Fourier  $\hat{s}$  de  $s$  étant à support limité, on peut la développer en série de Fourier après périodisation :

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\hat{s}) \mathbb{1}_{[-\nu_0, \nu_0]} e^{-i2\pi \frac{n}{2\nu_0} \nu}, \quad (6.1)$$

avec les coefficients de Fourier donnés par

$$c_n(\hat{s}) = \frac{1}{2\nu_0} \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi \frac{n}{2\nu_0} \nu} d\nu.$$

Or, la transformée de Fourier inverse de  $s$  aux instant  $t_n = \frac{n}{2\nu_0}$  est donnée par :

$$s(t_n) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi t_n \nu} d\nu,$$

et donc

$$c_n(\hat{s}) = Ts(t_n). \quad (6.2)$$

En réinjectant (6.2) dans (6.1), on a

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(t_n) \mathbb{1}_{[-\nu_0, \nu_0]} e^{-i2\pi \frac{n}{2\nu_0} \nu},$$

puis en inversant la transformée de Fourier, on obtient

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \text{sinc}(2\nu_0(t - t_n)),$$

avec  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ . ■

La fréquence d'échantillonnage  $\frac{1}{2\nu_0}$  est une fréquence limite : il est tout à fait possible d'échantillonner le signal à une fréquence plus élevée (et donc, augmenter le nombre d'échantillons). Par contre, une fréquence d'échantillonnage inférieur interdit (en général) une reconstruction exacte du signal.

### Théorème 6.2 (Échantillonnage)

Soit  $s \in PW_{\omega_0}$ . Soit  $\eta = \frac{1}{T_e}$  la fréquence d'échantillonnage telle que  $s_n = s(t_n) = s(\frac{n}{\eta}) = s(n.T_e)$ . On considère la suite des échantillons  $s_n$ . Alors

1. *Sous-échantillonnage* : Si  $\eta < 2\nu_0$ , la suite des échantillons  $\{s_n\}$  ne permet pas de déterminer le signal  $s$  sans hypothèse supplémentaire.
2. *Sur-échantillonnage* : Si  $\eta > 2\nu_0$ , alors il existe une infinité de formules

de reconstruction de  $s$  à partir des échantillons. Soit  $\phi$  telle que  $\hat{\phi} \in C^\infty$ ,  $\hat{\phi}(v) = 0$  pour tout  $v \notin [-\eta, \eta]$  et  $\hat{\phi}(v) = 1$  pour tout  $v \in [-v_0, v_0]$ . Alors on a

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \frac{1}{\eta} \phi\left(t - \frac{n}{\eta}\right).$$

3. Si  $\eta = 2v_0$ , alors il existe une unique formule de reconstruction de  $s$  à partir de ses échantillons :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \text{sinc}(2v_0(t - t_n)).$$

Dans le cas critique  $\eta = 2v_0$  on a de plus la formule de Parseval :

**Théorème 6.3 (Parseval)**

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(t_n)|^2.$$

On a pu voir dans la démonstration qu'au final, la transformée de Fourier du signal analogique est complètement caractérisé par la transformée discrète du signal numérique.

**Théorème 6.4**

Soit  $s \in PW_{v_0}$ . On a

$$\hat{s}(v) = \mathbb{1}_{[-v_0, v_0]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) e^{-it_n 2\pi v}$$

avec  $t_n = \frac{n}{2v_0}$ .

On peut remarquer que la position des échantillons n'a aucune importance, seule la fréquence d'échantillonnage intervient dans le théorème. De plus, ce théorème peut s'adapter si la bande passante n'est pas centrée à l'origine, on a alors une version haute-fréquence du théorème d'échantillonnage.

## 6.2. Échantillonnage en pratique

Le théorème précédent s'applique aux signaux à bande limité. Or, on a vu précédemment qu'un signal ne pouvait être à la fois à bande limité et à support limité en temps (hormis le signal nul). Pourtant, en pratique (imaginons une conversation téléphonique), le signal analogique est fini en temps (même pour une personne très bavarde). Cette section expose donc les problèmes pratiques de l'échantillonnage d'un signal.

## 6. Échantillonnage

### 6.2.1. Repliement spectral

L'échantillonnage est directement lié à l'emploi de la distribution peigne (le peigne de Dirac) :

$$\delta_T = \sum_n \delta(t - nT) = \sum_n \delta\left(t - \frac{n}{2\nu_0}\right).$$

En effet, on peut associer à tout signal numérique  $\{s_n = s(t_n)\}$ ,  $t_n = \frac{n}{2\nu_0} = nT$ , le signal continue :

$$s_c(t) = \sum_n s_n \delta(t - t_n).$$

Ce signal admet comme transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{s}_c(\nu) &= \widehat{s(t)\delta_T(t)} \\ &= \hat{s} \star \frac{1}{T} \delta_{\frac{1}{T}}(t) \\ &= 2\nu_0 \sum_n \hat{s}(\nu - 2n\nu_0). \end{aligned} \tag{6.3}$$

On remarque alors que si  $s$  est effectivement à bande limitée dans  $[-\nu_0, \nu_0]$ , les termes de la série (6.3) sont nuls pour  $|\nu| < \nu_0$  dès que  $n \neq 0$ . On peut donc retrouver exactement  $s$  par un filtrage passe-bas idéal de  $x_s(t)$  avec un filtre de fonction de transfert  $H = \frac{1}{2\nu_0} \mathbb{1}_{[-\nu_0, \nu_0]}$ . Cependant, ce filtre passe-bas n'est pas réalisable, car sa réponse impulsionnelle est un sinus cardinal et n'est donc pas causale. En ce sens, la reconstruction de  $s(t)$  à partir de ses échantillons est seulement possible en théorie.

Il faut remarquer que dès qu'un signal est échantillonné, et ce quelque soit la fréquence d'échantillonnage et l'emplacement des échantillons, sa transformée de Fourier est périodique et réciproquement. Par conséquent, si  $s$  n'est pas à bande limitée, il y a *repliement spectral* du "motif de base"  $\hat{s}(\nu)$  pour former la transformée de Fourier  $\hat{s}_c$  (qui est périodique).

En pratique, le pas d'échantillonnage  $T_e$  est souvent imposé par des contraintes physiques, de calcul, ou de mémoire et la bande passante du signal n'est pas inclus dans  $[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]$ . La transformée de Fourier du signal  $s$  ne peut alors plus être déduite de la transformée de Fourier du signal  $s_c$  donné par les échantillons. Les hautes fréquences du signal viennent en effet perturber les fréquences les plus basses et la transformée de Fourier de  $s_c$  peut être complètement différente de celle de  $s$  sur  $[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]$ . Ce phénomène de repliement spectral est aussi appelé *aliasing*. Le signal reconstruit peut alors être très éloigné du signal original.

Ce phénomène d'aliasing s'observe facilement dans les films : la rotation rapide des roues d'une voiture pour le nombre d'image par seconde donne l'impression d'une roue qui tourne trop lentement, voire à l'envers.



### 6.2.2. Signaux à temps limité et à bande limitée

Comment supprimer ce phénomène d'aliasing? De plus, les signaux utilisés en pratique étant à support temporel limité et donc n'étant pas à bande limitée, comment utiliser le théorème d'échantillonnage en pratique? Supposons qu'on veuille échantillonner un signal  $s$  avec un pas de temps imposé de  $T_e$ .

Afin d'utiliser le théorème d'échantillonnage, il faut approcher le spectre de  $s$  par une transformée de Fourier à support dans  $[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]$ . Notons  $\tilde{s}$  cette transformée de Fourier et  $\hat{s}$  le signal obtenu par inversion. Le théorème de Parseval nous donne :

$$\begin{aligned} \|s - \hat{s}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(v) - \tilde{s}(v)|^2 dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|v| > \frac{1}{T_e}} |\hat{s}(v) - \tilde{s}(v)|^2 dv + \frac{1}{2\pi} \int_{|v| < \frac{1}{T_e}} |\hat{s}(v) - \tilde{s}(v)|^2 dv. \end{aligned}$$

et la distance  $\|s - \hat{s}\|_2^2$  est donc minimale lorsque la seconde intégrale est nulle, c'est-à-dire :

$$\tilde{s} = \hat{s} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]}.$$

Le filtrage passe-bas idéal évite alors l'aliasing en supprimant toutes les fréquences supérieures à  $\frac{1}{T_e}$ . Le signal  $\tilde{s}$  pourra être construit à partir des échantillons du signal  $s$  qu'on aura préalablement filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $\frac{1}{T_e}$ .



# A ■ Rappels mathématiques

Les objets mathématiques utilisés pour modéliser les signaux sont des vecteurs (au sens large). C'est-à-dire des éléments d'espace vectoriel, et on utilise en général des fonctions pour les signaux à temps continu, et des suites (c'est à dire des fonctions de  $\mathbb{Z}$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ ) pour les signaux discrets.

Afin de pouvoir manipuler les signaux, on a besoin de définir des notions de distance et/ou de ressemblance entre eux. Ces notions sont données en mathématiques par les normes et les produits scalaires.

## A.1. Normes et convergences

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. Une norme sur  $E$  est donnée par la définition suivante.

### Définition A.1

#### (Norme)

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. Une norme  $\|\cdot\|$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Les normes les plus utilisées sont les suivantes :

- Norme 1
  - Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$
  - Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|$
- Norme 2 (énergie)
  - Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$

### A. Rappels mathématiques

— Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2}$

- Norme infinie

— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$

— Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|$

- De façon plus générale, les normes  $p$  :

— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$

— Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$

On peut alors définir des espaces vectoriels normés couramment utilisés :

#### Définition A.2 (Espace $L^p(E)$ )

L'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  avec une norme  $p$  finie est notée  $L^p(E)$

En particulier, on s'intéressera à l'espace des fonctions réelles d'énergie finie  $L^2(\mathbb{R})$ . On définit de manière équivalente les espaces des suites  $\ell^p(\mathbb{Z})$ .

Une norme, en plus de fournir une notion de distance, permet aussi de définir la notion de *convergence* et donc de *continuité*. Ces deux notions sont essentielles par la suite.

#### Définition A.3 (Convergence en norme)

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On dira qu'une suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  converge vers  $f \in E$  ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

On notera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

On voit que suivant la norme choisie, la notion de convergence diffère. Ici encore, on considère les trois convergences classiques qui sont :

- La convergence *uniforme*, avec la norme infinie.
- La convergence *absolue*, avec la norme 1.
- La convergence *en énergie*, avec la norme 2.

Un espace  $E$  muni d'une norme sera dit complet, ou espace de Banach, si toute suite de Cauchy est une suite convergente.

## **A.2. Produits scalaires et espaces de Hilbert**

“Physiquement”, un produit scalaire mesure la “corrélation” entre deux signaux. C’est une notion essentielle en traitement du signal. On rappelle la définition d’un produit scalaire sur un espace complexe.

## A. Rappels mathématiques

### Définition A.4 (Produit scalaire)

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur  $E$  est une forme sesquilinéaire à gauche, à symétrie hermitienne, définie positive. C'est-à-dire,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  est un produit scalaire ssi

- sesquilinéaire à gauche
  - $\forall x, y, z \in E, \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
  - $\forall x, y, z \in E, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in E, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in E, \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

- à symétrie hermitienne

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

- définie

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

- positive

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$$

On peut alors définir l'orthogonalité entre deux signaux. Des signaux orthogonaux seront "aveugles" l'un par rapport à l'autre. C'est une notion importante, car si deux signaux sont orthogonaux, l'information portée par chacun est parfaitement complémentaire.

### Définition A.5

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe munie d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Deux éléments  $x, y \in E$  sont dits orthogonaux ssi

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

En traitement du signal, on utilisera principalement les deux produits scalaires suivant :

- Soit  $f, g$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ . On peut définir le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

- Soit  $u, v$  deux suites de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . On peut définir le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \bar{v}_n$$

Avec ces deux exemples, on voit que les normes 2 définies à la section précédente correspondent à la racine du produit scalaire. On peut montrer qu'on peut

toujours définir une norme comme la racine d'un produit scalaire d'un vecteur avec lui même (et cette norme sera appelée norme 2).

On peut maintenant définir les *espaces de Hilbert* qui sont des espaces de Banach munis d'un produit scalaire. On modélisera souvent par la suite les signaux comme des éléments d'espaces de Hilbert.

### A.3. Bases orthonormées

Afin de représenter les signaux, on aura besoins de “briques” de bases. On introduit pour cela la notion de *bases orthonormées*.

**Définition A.6 (Base orthogonale)**

Une famille  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est orthogonale si pour tout  $n \neq k$

$$\langle e_k, e_n \rangle = 0.$$

Si de plus la famille est *génératrice*, i.e. pour tout  $f \in \mathcal{H}$ , il existe une suite  $\lambda_n$  de  $\mathbb{C}$  telle que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$$

alors  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une *base orthogonale* de  $\mathcal{H}$ .

Comme conséquence directe, si  $\{e_n\}$  est une base orthogonale de  $\mathcal{H}$ , on a pour tout  $f \in \mathcal{H}$  :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|} e_n.$$

Une base orthormée est une base orthogonale telle que tous les éléments aient une norme égale à 1, i.e.  $\|e_n\| = 1$  pour tout  $n$ . Les bases orthonormées ont des propriétés de “conservations de distance” très utiles, résumées dans les deux théorèmes suivants.

**Théorème A.1 (Relation de Parseval)**

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\{e_n\}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ . Alors pour tout  $f, g \in \mathcal{H}$ , on a :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle}.$$

Le second théorème est obtenue en appliquant la relation de Parseval avec  $f = g$ .

**Théorème A.2 (Formule de Plancherel-Parseval)**

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\{e_n\}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ . Alors pour

A. Rappels mathématiques

tout  $f \in \mathcal{H}$ , on a conservation de l'énergie :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 .$$