PARTIEL DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Table des matières

Durée 2h
poly de cours "peu annoté" seul document autorisé

Exercice 1. — *Filtrage et signal aléatoire.*

Soit le système donné par l'équation aux différences

$$s[n] = e[n] + \frac{1}{2}s[n-1]$$

(1) Le système est-il linéaire, causal, invariant ?

(2) Déterminer la fonction de transfert H du système. Le filtre est-il stable ?

(3) En déduire que la réponse en fréquence du filtre s'écrit :

$$\left|\hat{h}(\nu)\right|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi\nu)} .$$

Représenter grossièrement l'allure de la courbe et en déduire le type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande)

(4) Calculer la réponse impulsionnelle h du système

(5) Soit le signal aléatoire X stationnaire au sens large, centré et de fonction d'autocorrélation

$$R_X[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = 1 \text{ ou } n = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la densité spectrale de puissance de X.

(6) Déterminer la densité spectrale de puissance de la sortie Y lorsque X est mis en entrée du système.

Exercice 2. — *Signaux aléatoires.*

(1) Soit
$$X(t) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

(a) On suppose que $A \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}$ et φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que $X(t)$ est stationnaire au sens large

(b) On suppose que $A \in \mathbb{R}$, ν est une variable aléatoire de densité p_ν et φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$, indépendante de ν. Montrer que quelque soit p_ν, X est stationnaire au sens large, de moyenne nulle.

(2) Soit
$$X(t) = A\cos(2\pi\nu t) + B\sin(2\pi\nu t)\ .$$
On suppose que ν est une constante positive, et que A et B sont deux variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance $\mathrm{E}\left[\mathrm{A}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{B}\right] = \sigma^2$.

(a) Le signal X est-il stationnaire ?

(b) Déterminer la densité spectrale de puissance de X.

Exercice 3. — *Estimation de hauteur à l'aide de la fonction d'autocorrélation.*

Soit $x[n]$ un signal discret à valeurs réelles défini sur l'intervalle $n \in 0,\ N-1$, et $x[n] = 0$ pour tout $n \notin 0,\ N-1$. On considère la fonction d'autocorrélation $\bar{r}_x[m]$ normalisée suivante :
$$\bar{r}_x[m] = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, x[n+m]}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x[n+m]^2}}\ .$$
On se propose ici de démontrer que $\bar{r}_x[m]$ atteint la valeur maximale 1 en $m = P$ si et seulement si le signal $x[n]$ est de la forme $x[n] = y[n]\, e^{-d\, n}$, où $y[n]$ est un signal périodique de période P, et $d \in \mathbb{R}$ est appelé "facteur d'atténuation" du signal.

(1) Montrer que $\bar{r}_x[m]$ est à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$.

(2) Soit $P \in]0,\ N-1[$. Montrer que $\bar{r}_x[P] = 1$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$x[n+P] = \alpha\, x[n]\ \forall n \in [0,\ N-P-1] \tag{1}$$

(3) En effectuant le changement de variable $y[n] = x[n]\, \alpha^{-\frac{n}{P}}$, vérifier qu'un signal $x[n]$ satisfait la relation (1) si et seulement si $y[n]$ est périodique de période P.

(4) Déduire des questions précédentes que $\bar{r}_x[m]$ atteint la valeur 1 en $m = P$ si et seulement si $x[n]$ est de la forme $y[n]\, e^{-d\, n}$, où $y[n]$ est de période P (on exprimera le facteur d'atténuation d en fonction de α).

Exercice 4. — *Transformée de Hilbert.*

Soit $x(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ un signal **réel**. Son spectre $\hat{x}(\nu)$ est définit pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, et contient donc des fréquences positives et négatives. On définit le signal $z(t)$ à valeurs complexes tel que sa transformée soit

$$\hat{z}(\nu) = \hat{x}(\nu) + \hat{x}(\nu)\,\mathrm{sgn}(\nu)$$

où $\mathrm{sgn}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu > 0 \\ 0 & \text{si } \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \nu < 0 \end{cases}$. On définit les signaux $u(t)$ et $v(t)$ suivants :

$$u(t) = \mathcal{R}(z(t)) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2} \qquad v(t) = \mathcal{I}(z(t)) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$$

(1) Préliminaires.

(a) Montrer que pour tout $\nu < 0$, $\hat{z}(\nu) = 0$ (i.e. $\hat{z}(\nu)$ ne contient que des fréquences négatives), et pour tout $\nu > 0$ $\hat{z}(\nu) = 2\hat{x}(\nu)$.

(b) Soit $y(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ un signal à valeurs complexes. Montrer que $\hat{\bar{y}}(\nu) = \overline{\hat{y}(-\nu)}$.

(c) Montrer que $\hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)}$ (on rappelle que $x(t)$ est à valeurs réelles)

(2) Montrer que $\hat{u}(\nu) = \hat{x}(\nu)$ et en déduire que $\mathcal{R}(z(t) = x(t))$

(3) Montrer que $\hat{v}(\nu) = -i\,\mathrm{sgn}(\nu)\hat{x}(\nu)$

(4) Montrer que $z(t) = x(t) + iv(t)$. $v(t)$ *est appelé "transformée de Hilbert de* $x(t)$*" et* $z(t)$ *le signal analytic associé à* $x(t)$