

# Représentations parcimonieuses des signaux

Gilles CHARDON Aurelia FRAYSSE Matthieu KOWALSKI



# Table des matières

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle</b> | <b>5</b>  |
| 1.1. Analyse temps-fréquence                                            | 6         |
| 1.1.1. Principe d'incertitude d'Heisenberg                              | 6         |
| 1.1.2. Transformée de Fourier à fenêtre                                 | 9         |
| 1.1.2.1. Définition et inversion                                        | 9         |
| 1.1.2.2. Choix de la fenêtre                                            | 11        |
| 1.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue      | 12        |
| 1.2.1. Définitions                                                      | 12        |
| 1.2.2. Reconstruction et conservation de l'énergie                      | 13        |
| <b>2. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes</b>            | <b>17</b> |
| 2.1. Bases de cosinus locaux et MDCT                                    | 17        |
| 2.2. Construction de bases d'ondelettes                                 | 19        |
| 2.2.1. Analyse multirésolution et bases d'ondelettes orthogonales       | 19        |
| 2.2.2. Ondelettes et bancs de filtres                                   | 22        |
| 2.2.2.1. Algorithme de Mallat                                           | 23        |
| 2.2.3. Propriétés des ondelettes                                        | 24        |
| 2.2.4. Exemples d'ondelettes                                            | 26        |
| 2.2.4.1. Ondelette de Haar                                              | 26        |
| 2.2.4.2. Ondelette de Meyer                                             | 26        |
| 2.2.4.3. Ondelettes de Battle-Lemarié                                   | 27        |
| 2.2.4.4. Ondelette de Coifman                                           | 27        |
| 2.2.4.5. Ondelettes de Daubechies                                       | 28        |
| 2.2.5. Ondelettes biorthogonales                                        | 28        |
| 2.2.6. Construction de bases d'ondelettes en dimension supérieure (2D)  | 30        |
| 2.3. Un exemple de transformée en ondelettes                            | 30        |
| <b>3. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal</b>           | <b>33</b> |
| 3.1. Approximation linéaire                                             | 33        |
| 3.1.1. Approximation dans les espaces de Sobolev                        | 34        |
| 3.1.2. Base de Karhunen-Loève                                           | 34        |
| 3.2. Approximation non linéaire                                         | 36        |
| 3.2.1. Approximation non linéaire dans une base d'ondelettes            | 36        |
| 3.3. Estimation                                                         | 38        |
| 3.3.1. Estimateurs de Wiener                                            | 38        |
| 3.3.2. Risque minimax                                                   | 39        |

Table des matières

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.3. Estimation dans une base de $L^2$ . . . . .             | 40        |
| 3.3.3.1. Le problème d'estimation dans une base . . . . .      | 40        |
| 3.3.3.2. Construction des estimateurs . . . . .                | 41        |
| 3.3.4. Estimation minimax dans un espace de Besov . . . . .    | 44        |
| 3.3.4.1. Estimation minimax dans $B_p^{s,\infty}$ . . . . .    | 44        |
| 3.3.4.2. Estimateurs par ondelettes dans un espace de Besov .  | 45        |
| 3.3.4.3. Estimateur par projection . . . . .                   | 45        |
| 3.3.5. Estimateurs par seuillage . . . . .                     | 45        |
| 3.3.5.1. Estimateur SURE du seuil pour le seuillage doux . . . | 46        |
| 3.3.6. Un exemple de seuillage . . . . .                       | 46        |
| <b>4. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse</b> . . . . .   | <b>49</b> |
| 4.1. Utilisation de la redondance . . . . .                    | 49        |
| 4.2. Retour sur Gabor . . . . .                                | 51        |
| 4.3. Approximation parcimonieuse . . . . .                     | 52        |
| 4.3.1. Approche Greedy (Matching Pursuit) . . . . .            | 53        |
| 4.3.2. Approche variationnelle . . . . .                       | 54        |
| <b>A. Rappels mathématiques</b> . . . . .                      | <b>57</b> |
| A.1. Normes et convergences . . . . .                          | 57        |
| A.2. Produits scalaires et espaces de Hilbert . . . . .        | 58        |
| A.3. Bases orthonormées . . . . .                              | 60        |
| <b>B. Notions d'optimisation convexe</b> . . . . .             | <b>63</b> |

# 1 ■ Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

Si la transformée de Fourier permet de connaître le contenu fréquentiel d'un signal, le passage en Fourier fait perdre toute l'information temporelle. Prenons l'exemple de deux notes de piano jouées simultanément, dont la représentation temporelle ainsi que sa transformée de Fourier sont représentés sur la figure 1.1. La lecture du spectre nous donne directement la fréquence des notes jouées.

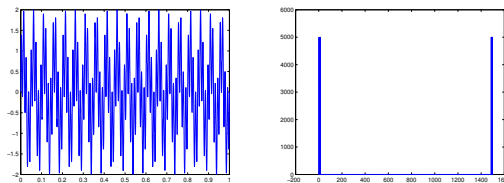


FIGURE 1.1. – Signal de piano : les notes sont jouées en même temps. Gauche : représentation temporelle. Droite : spectre fréquentiel

On représente maintenant sur la figure 1.2 un signal de piano où les mêmes notes sont jouées l'une après l'autre. Si la transformée de Fourier nous indique toujours parfaitement la fréquence des deux notes jouées, on n'a aucune information sur le moment où les notes sont jouées. On aimerait donc exploiter à la fois l'information temporelle et fréquentielle d'un signal. On est donc obligé d'aller plus loin en définissant des transformées qui prennent en compte à la fois l'information temporelle et l'information fréquentielle.

On présente ici les deux représentations temps-fréquence principales : la transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes. Pour cette dernière, on parlera plutôt de transformée temps-échelle.

## 1. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

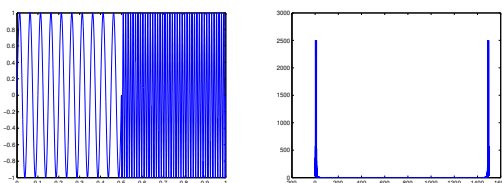


FIGURE 1.2. – Signal de piano : les notes sont jouées l'une après l'autre. Gauche : représentation temporelle. Droite : spectre fréquentiel

### 1.1. Analyse temps-fréquence

L'idée, simple, de l'analyse temps-fréquence est de faire une analyse spectrale "locale" du signal, à l'aide d'une fenêtre que l'on fera "glisser" le long du signal. On va donc faire la corrélation du signal avec différents *atomes temps-fréquence* qui auront une certaine concentration (ou résolution) en temps et en fréquence.

#### 1.1.1. Principe d'incertitude d'Heisenberg

Avant de définir précisément une transformée temps-fréquence, on va voir qu'un signal ne peut être à la fois parfaitement localisé en temps et parfaitement localisé en fréquence. Ce principe s'illustre naturellement avec les instruments de musique : un coup de batterie est très bien localisé en temps, mais on ne peut pas associer une note précise au coup donné. Inversement, une note de violon devra être jouée pendant un temps minimal pour que l'oreille reconnaisse la note jouée. Par conséquent, la notion de "point" dans l'espace temps-fréquence n'a, *a priori*, pas de sens. On va donc associer au plan temps-fréquence des "boîtes" dont la taille sera liée à l'incertitude de la mesure temps-fréquence.

On représente couramment le domaine temps-fréquence par un plan où le temps est sur l'axe des abscisses et les fréquences sur l'axe des ordonnées. Un signal aura donc une certaine répartition en temps et en fréquence dans le plan.

#### Définition 1.1

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$ . Dans la suite, on note  $E = \|x\|^2$ .

- On appelle centre temporel de  $x$  la quantité

$$\langle t \rangle = \bar{t} = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt.$$

Le centre temporel de  $x$  correspond à la valeur moyenne en temps de l'énergie de  $x$ .

- On appelle centre fréquentiel de  $x$  la quantité

$$\langle f \rangle = \bar{f} = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} f |\hat{x}(f)|^2 dv.$$

Le centre fréquentiel de  $x$  correspond à la valeur moyenne en fréquence de l'énergie de  $x$ .

- On appelle écart temporel de  $x$  la valeur  $\sigma_t$  définie par

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})^2 |x(t)|^2 dt.$$

Cette valeur correspond à l'écart type en temps de l'énergie de  $x$ .

- On appelle écart fréquentiel de  $x$  la valeur  $\sigma_f$  définie par

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} (f - \bar{f})^2 |\hat{x}(f)|^2 dv.$$

Cette valeur correspond à l'écart type en fréquence de l'énergie de  $x$ .

Ainsi, on peut délimiter dans le plan temps-fréquence un rectangle de taille  $\sigma_t \times \sigma_f$  qui contiendra la majorité de l'énergie du signal. On appelle ce rectangle *boîte d'Heisenberg*. Le théorème, appelé *Principe d'incertitude d'Heisenberg* suivant démontre le résultat annoncé ci-dessus : un signal ne peut pas être à la fois parfaitement localisé en temps ET en fréquence.

1. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

**Théorème 1 (Principe d'incertitude d'Heisenberg)**

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  tel que  $\sigma_t$  et  $\sigma_f$  soient finis alors :

$$\sigma_f \sigma_t \geq \frac{1}{4\pi}$$

Avec égalité si et seulement si  $x$  est de la forme  $a \exp(-b(t - t_0)^2) \exp(i2\pi f_0 t)$ .

Ce qui veut dire que notre boîte d'Heisenberg a une surface supérieure ou égale à  $\frac{1}{4\pi}$ . La notion de point  $(t_0, f_0)$  dans le plan temps-fréquence n'est pas mesurable car le plan ne peut être divisé uniquement en rectangle d'aire supérieure à  $\frac{1}{4\pi}$ .

Avant d'énoncer le principe d'incertitude d'Heisenberg, nous avons besoin du résultat intermédiaire suivant.

**Théorème 2 (Théorème de Weyl)**

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  tel que  $tx(t) \in L^2(\mathbb{R})$  et  $x'(t) \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\|x(t)\|^2 \leq 2 \|tx(t)\| \|x'(t)\|.$$

Avec égalité si et seulement si  $x$  est de la forme donnée plus haut.

*Démonstration.* Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$ . On a

$$\|x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = -2 \int_{\mathbb{R}} tx(t)x'(t) dt = -2 \langle tx(t); x'(t) \rangle.$$

par intégration par parties. On applique alors Cauchy-Schwarz, et on obtient

$$\|x\|^2 \leq 2 \|tx(t)\| \|x'(t)\|.$$

Pour avoir égalité dans l'équation précédente, il faut être dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, autrement dit il faut que  $tx(t)$  et  $x'(t)$  soient proportionnels. Le seul signal vérifiant ces conditions est la gaussienne.  $\square$

On peut alors démontrer le principe d'incertitude.

*Démonstration du Principe d'incertitude.* Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$ . On suppose dans la suite que  $\bar{t} = \bar{f} = 0$ . Le cas général se déduit de celui-ci par translation. Par définition de la transformée de Fourier on sait que la transformée de Fourier de  $x'(t)$  vaut  $2\pi i f \hat{x}(f)$ . L'identité de Plancherel nous donne alors

$$\|x'(t)\|^2 = \|2\pi i f \hat{x}(f)\|^2 = 4\pi^2 \|f \hat{x}(f)\|^2.$$

De plus, d'après le théorème de Weyl on a

$$\begin{aligned} E = \|x\|^2 &\leq 2 \|tx(t)\| \|x'(t)\| \leq 4\pi \|tx(t)\| \|f \hat{x}(f)\| \\ &\leq 4\pi E \sigma_f \sigma_t. \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient la définition 1.1 des écarts temporel et fréquentiel.

En ce qui concerne le cas d'égalité, on voit qu'il vient du cas d'égalité du théorème de Weyl, autrement dit on a égalité si et seulement si  $x$  est gaussien.  $\square$



Maintenant que nous avons vu quelles sont les conditions que doivent remplir les décompositions temps-fréquence, nous allons pouvoir définir une "analyse temps-fréquence".

### 1.1.2. Transformée de Fourier à fenêtre

La première approche pour construire une décomposition temps-fréquence est de repartir de la transformée de Fourier et de la relocaliser en temps. C'est le principe de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (aussi appelée transformée de Fourier à court terme).

#### 1.1.2.1. Définition et inversion

Pour définir une telle transformée, on restreint le signal à une portion que l'on fait glisser sur l'axe temporel. Pour cela, on définit une fenêtre grâce à une fonction  $g$  lisse et bien localisée autour de l'instant  $t = 0$  qui délimitera la fenêtre d'analyse.

#### Définition 1.2

##### (Transformée de Fourier à court terme)

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$ . On appelle transformée de Fourier à court terme de  $x$  de fenêtre d'analyse  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , la fonction  $X$  de deux variables définie par

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(b, \nu) \mapsto X(b, \nu) = \left\langle x; g(t-b)e^{2i\pi\nu t} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\bar{g}(t-b)e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Dans la suite, on note  $g_{b,\nu}(t) = g(t-b)e^{2i\pi\nu t}$ . Ces fonctions sont appelées les **atomes temps-fréquence** de la décomposition. On voit que pour  $\nu$  et  $b$  fixés, cette décomposition est localisée au voisinage de  $(b, \nu)$  grâce à la localisation en temps de  $g$  et à la modulation par  $e^{2i\pi\nu t}$ , même si cette localisation ne peut jamais être parfaite.

La transformée de Fourier à court terme donne une bonne décomposition d'un signal au sens donné par les deux propriétés suivantes qui sont l'inversion et la conservation de l'énergie.

#### Théorème 3

##### (Inversion)

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^2(\mathbb{R})$  une fenêtre admissible. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} X(b, \nu) g(t-b) e^{2i\pi\nu t} db d\nu.$$

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème nous allons partir du membre de droite de la définition 1.2 de la transformée de Fourier à fenêtre et écrire la transformée de Fourier à court terme comme la transformée de Fourier du signal fenêtré  $x_{g_b}(t) = x(t)\bar{g}(t-b)$ .

1. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} X(b, \nu) g(t-b) e^{2i\pi\nu t} db d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{x}_{g_b}(\nu) g(t-b) e^{2i\pi\nu t} db d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t-b) \int_{\mathbb{R}} \hat{x}_{g_b}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t-b) x_{g_b}(t) db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t-b) x(t) \bar{g}(t-b) db \\
 &= x(t) \int_{\mathbb{R}} |g(t-b)|^2 db \\
 &= x(t) \|g\|_2^2
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat voulu. □

**Théorème 4 (Conservation de l'énergie)**

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^2(\mathbb{R})$  une fenêtre admissible. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |X(b, \nu)|^2 db d\nu. \quad (1.1)$$

*Démonstration.* On écrit ici aussi la transformée de Fourier à court terme du signal  $x$  comme la transformée de Fourier du signal fenêtré  $x_{g_b}(t) = x(t)\bar{g}(t-b)$ , puis on utilise le théorème de Plancherel-Parseval.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |X(b, \nu)|^2 db d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{x}_{g_b}(\nu)|^2 db d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x_{g_b}(t)|^2 dt db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x(t)\bar{g}(t-b)|^2 dt db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\bar{g}(t-b)|^2 db dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \|g\|_2^2 dt \\
 &= \|g\|_2^2 \|x\|_2^2
 \end{aligned}$$

□

L'application qui au couple  $(b, \nu)$  associe  $|X(b, \nu)|^2$  est appelé le **spectrogramme** de  $x$ . Il représente la distribution de la quantité d'énergie présente dans le signal autour des fréquences  $f$  et du temps  $b$ .

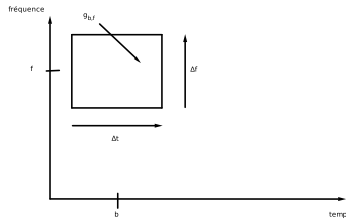


FIGURE 1.3. – Boîte d'Heisenberg d'un atome temps-fréquence.

### 1.1.2.2. Choix de la fenêtre

Comme nous l'avons vu, la transformée de Fourier à court terme est entièrement caractérisée par ses atomes temps-fréquence  $g_{b,f}$ , eux mêmes définis grâce à la fenêtre  $g$ . En pratique, pour bien définir la transformée nous devons donc bien définir cette fonction. Pour cela plusieurs choix sont possibles. Nous allons ici en donner deux mais on peut en trouver d'autres dans la littérature.

Tout d'abord nous allons considérer un choix "naïf" de fenêtre donné par une fonction rectangle. Autrement dit on considère

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Suivant le choix de  $T_0$ , cette fonction  $g$  peut être plus ou moins bien localisée en temps. Malheureusement si on regarde sa transformée de Fourier, on obtient  $\hat{g}(f) = \text{sinc}(T_0 f)$  qui est, pour le coup, mal localisée.

Pour déterminer le choix optimal de la fenêtre, on regarde ce qu'il se passe dans le plan temps-fréquence. Sur la figure 1.3 on peut voir que quelque soit l'atome considéré, la surface de sa boîte d'Heisenberg est la même, donnée par la résolution de  $g$ . Une bonne transformée de Fourier à court terme est bien localisée en temps et en fréquence, c'est donc celle correspondant à la fenêtre dont la boîte d'Heisenberg a une surface minimale. Nous avons vu dans le Théorème 1 que dans ce cas, la fenêtre optimale est gaussienne. La transformée de Fourier à court terme avec fenêtre Gaussienne s'appelle **transformée de Gabor**. Par la suite, on confondra souvent transformée de Gabor et transformée de Fourier à court terme. L'expression transformée de Gabor étant principalement utilisée lors de la discrétisation.

La transformée de Fourier à court terme répond à l'attente d'une analyse temps-fréquence, bien que limitée intrinsèquement par le principe d'incertitude d'Heisenberg. Cependant, pour certains signaux l'information essentielle peut être contenue dans ses singularités, et ses structures irrégulières. C'est le cas des images par exemple, l'oeil étant sensible aux contours, ou bien les transitoires d'un signal médical comme pour la détection de zones épileptique par électro-encéphalogramme.

## 1. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

C'est pour ce genre d'applications que les ondelettes ont été introduites dans les années 80.

### 1.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes continue constitue une alternative à la transformée temps-fréquence définie plus haut. Elle repose sur l'analyse de la fonction par translation et dilatation d'une *ondelette mère*  $\psi$ .

#### 1.2.1. Définitions

L'ondelette mère  $\psi$  doit vérifier certaines conditions données dans la définition suivante.

##### Définition 1.3 (Conditions d'admissibilité)

Une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  est admissible si elle vérifie la condition

$$0 < c_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(v)|^2}{|v|} dv < \infty$$

En particulier,  $\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ . Autrement dit une ondelette est forcément de moyenne nulle.

D'après la condition d'admissibilité les ondelettes sont forcément des "petites" fonctions oscillantes d'où leur nom. On peut maintenant donner la définition d'une transformée en ondelette.

##### Définition 1.4 (Transformée en ondelettes continue)

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  une ondelette admissible. On définit la transformée en ondelettes continue de  $x$  comme la fonction de deux variables définie par :

$$C_x : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a, b) \mapsto C_x(a, b) = \left\langle x; \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi \left( \frac{t-b}{a} \right)} dt$$

Comme pour les atomes de la décomposition temps-fréquence, on note dans la suite  $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$ . Les  $\psi_{a,b}$  sont les ondelettes, caractérisées par l'ondelette-mère  $\psi$ . Les ondelettes sont obtenues en dilatant  $\psi$  d'un facteur  $a$  et en la translatant de  $b$ . Dans ce cas,  $a$  est le facteur d'échelle, correspondant à la fréquence  $\frac{1}{a}$  tandis que  $b$  est la position.

Dans le plan temps-fréquence, les boites d'Heisenberg correspondantes sont illustrées sur la figure 1.4. On peut voir que pour  $a$  "grand", on a une bonne résolution temporelle ( $\sigma_t$  étant petit) et une faible résolution fréquentielle, et réciproquement.

## 1.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue

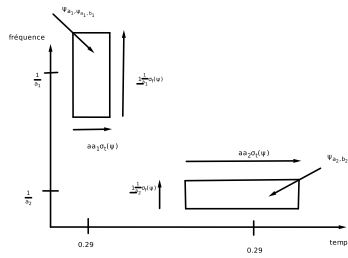


FIGURE 1.4. – Boîtes d’Heisenberg correspondant aux ondelettes.

Un exemple d’ondelette mère est donné par le "chapeau mexicain" qui correspond à la dérivée seconde d’une gaussienne. Il est représenté sur la figure 1.5.

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left( 1 - \frac{t^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

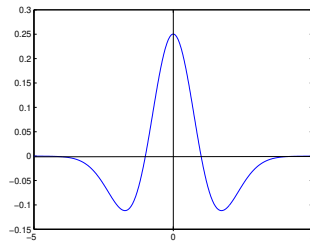


FIGURE 1.5. – Le chapeau mexicain.

### 1.2.2. Reconstruction et conservation de l’énergie

La transformée en ondelettes continue, comme l’analyse temps-fréquence, conserve toute l’information présente dans le signal, dans le sens où l’on a conservation de l’énergie. De plus, on peut reconstituer le signal à partir de sa transformée en ondelettes.

#### Théorème 5 (Conservation de l’énergie)

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\psi \in L^2$  une ondelette admissible. Alors :

$$\|x\|^2 = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |C_x(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}.$$

1. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

*Démonstration.* Soit  $\psi$  une ondelette admissible. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier on voit que

$$\widehat{\psi}_{a,b}(\nu) = \sqrt{a} \widehat{\psi}(a\nu) e^{-2i\pi\nu b}. \quad (1.2)$$

Pour rappel, la décomposition de  $x$  en ondelettes est donnée par la fonction de deux variables :

$$C_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt.$$

On regarde dans un premier temps la fonction d'une variable  $C_a : b \mapsto C_x(a, b)$ . Si on calcule la transformée de Fourier de cette fonction :

$$\begin{aligned} \widehat{C}_a(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} e^{-2i\pi\nu b} dt db \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} e^{-2i\pi\nu b} db \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi t} \left( \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} e^{2i\pi\nu(t-b)} db \right) dt \\ &= \widehat{x}(\nu) \sqrt{a} \overline{\widehat{\psi}(a\nu)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où on a fait le changement de variable  $u = \frac{t-b}{a}$  dans la dernière équation.

En utilisant la formule de Parseval pour la transformée de Fourier, on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} |C_a(b)|^2 db = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(\nu)|^2 a |\overline{\widehat{\psi}(a\nu)}|^2 d\nu.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} |C_a(b)|^2 \frac{db da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(\nu)|^2 a |\overline{\widehat{\psi}(a\nu)}|^2 d\nu \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(\nu)|^2 \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} |\overline{\widehat{\psi}(a\nu)}|^2 \frac{da}{a} \right) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(\nu)|^2 d\nu c_\psi \end{aligned}$$

Où dans la dernière équation on a fait le changement de variable  $u = a\nu$ . □

On appelle **scalogramme** de  $x$  la fonction qui à  $(a, b)$  associe  $|C_x(a, b)|^2$ . Cette fonction représente la distribution de l'énergie de  $x$  à l'échelle  $a$  et à la position  $b$ . Voyons maintenant la reconstruction à l'aide des ondelettes.

**Théorème 6 (Inversion)**

## 1.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue

Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\psi$  une ondelette admissible. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}.$$

*Démonstration.* Notons

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}.$$

On va montrer qu'on a bien  $f(t) = x(t)$ . Pour cela, on utilise encore une fois la transformée de Fourier, autrement dit on calcule  $\hat{f}(v)$  qui vérifie

$$\begin{aligned} \hat{f}(v) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \psi_{a,b}(t) e^{-2i\pi vt} \frac{da db}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}(t) e^{-2i\pi vt} dt \frac{da db}{a^2} \end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière équation la transformée de Fourier de  $\psi_{a,b}$  qui est donnée par (1.2). Donc

$$\hat{f}(v) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \sqrt{a} \hat{\psi}(av) e^{-2i\pi vb} \frac{da db}{a^2}$$

Et on retrouve dans cette équation la transformée de Fourier de  $C_a$ , la fonction qui à  $b$  associe  $C_x(a, b)$ . Or nous avons calculé cette transformée dans (1.3). Donc

$$\begin{aligned} \hat{f}(v) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \hat{x}(v) \sqrt{a} \overline{\hat{\psi}(av)} \sqrt{a} \hat{\psi}(av) \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{c_\psi} \hat{x}(v) \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{|\hat{\psi}(av)|^2}{a} da = \hat{x}(v). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\hat{f}(v) = \hat{x}(v)$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , ce qui revient à dire que  $f = x$ .  $\square$

Finalement, la transformée en ondelettes fournit une bonne décomposition temps-échelle dans le sens défini précédemment. Cependant la reconstruction dans ce cas fait intervenir tous les facteurs d'échelle et de position réels. Cette décomposition est donc difficile à mettre en œuvre en pratique. C'est pourquoi nous allons voir par la suite comment retrouver le même type de résultats en ne considérant que des coefficients pris sur un ensemble discret.





# 2

## ■ Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

Une manière appréciable de discrétiser une transformée est de construire une base orthogonale, ce qui peut être souhaitable pour certaines applications (comme la compression par exemple). Rapidement, se pose alors la question de la possibilité de construction d'une base de Gabor orthogonale. C'est-à-dire s'il existe une fenêtre  $w$  permettant de construire une famille génératrice de  $L^2(\mathbb{R})$ , telle que

$$\langle g_{bv}, g_{b'v'} \rangle = 0 \text{ si } (b, v) \neq (b', v')$$

La réponse est donnée par le théorème suivant de Balian-Low.

### Théorème 7 (Balian-Low)

Si  $\{g_{bv}\}$  est une BON de  $L^2(\mathbb{R})$  alors

$$\text{soit } \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt = +\infty \quad \text{soit } \int_{\mathbb{R}} v^2 |\hat{g}(v)|^2 dv = +\infty$$

En d'autres termes, on ne peut pas avoir une base de Gabor correctement localisée en temps **et** en fréquence.

Cependant, l'utilisation d'une transformée en cosinus plutôt qu'une transformée de Fourier ainsi que quelques hypothèses sur les fenêtres  $w$  vont nous permettre de construire une base orthonormée à fenêtre.

Pour l'analyse en ondelettes, Yves Meyer a construit la première famille orthogonale d'ondelettes alors qu'il cherchait à montrer l'impossibilité de construire une telle base! La généralisation se fait via l'analyse multirésolution.

### 2.1. Bases de cosinus locaux et MDCT

Les bases de cosinus locaux sont une sorte d'analyse de Fourier, ici en cosinus, à fenêtre qui permettent l'obtention d'une base orthogonale dont la transformée est réelle pour un signal réel. Ces bases reprennent donc l'idée d'une transformée

## 2. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

à fenêtre glissante, mais modulée par un cosinus plutôt que par une exponentielle complexe. Couplée à quelques hypothèses sur les fenêtres, on peut construire une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Les fenêtres doivent obéir à une certaine symétrie entre elles. Ces hypothèses sont résumées sur l'exemple de la figure 2.1 et données dans la définition suivante.

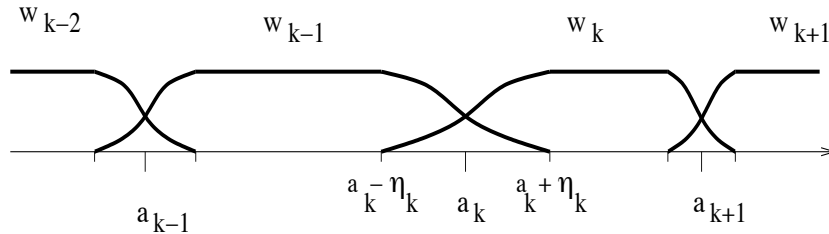


FIGURE 2.1. – Fenêtres MDCT

### Définition 2.1 (bases de cosinus locaux)

Soit  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite de réels, telle que  $a_k < a_{k+1}$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ . On pose  $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite telle que  $a_k + \eta_k < a_{k+1} - \eta_{k+1}$ . Soit enfin une fenêtre  $w_k$  telle que

1.  $0 \leq w_k(t) \leq 1$   $w_k(t) = 1$  sur  $[a_k + \eta_k, a_{k+1} - \eta_{k+1}]$
2.  $w_k(t) = 0$  si  $t \leq a_k - \eta_k$  ou  $t \geq a_{k+1} + \eta_{k+1}$
3.  $w_{k-1}(a_k + t) = w_k(a_k - t)$  et  $w_k(a_k + t)^2 + w_{k-1}(a_k + t)^2 = 1$  pour  $t \in [-\eta_k, \eta_k]$

On définit alors la famille  $\{u_{kn}\}_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$  des atomes de cosinus locaux

$$u_{kn}(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell_k}} w_k(t) \cos\left(\frac{\pi}{\ell_k} (n + 1/2)(t - a_k)\right),$$

avec  $\ell_k = a_{k+1} - a_k$ .

### Théorème 8

La famille  $\{u_{kn}\}_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dans des applications comme le codage MP3, les fenêtres utilisées sont identiques, ce qui donne les bases MDCT (pour Modified Discrete Cosine Transform). L'avantage de ces bases orthogonales est, comme pour la transformée de Fourier à fenêtre, de pouvoir choisir la taille de la fenêtre afin de prendre en compte plutôt l'information fréquentielle avec une fenêtre longue, ou plutôt l'information temporelle avec une fenêtre courte, tout en conservant une transformée réelle, l'amélioration AAC du MP3 utilise cette possibilité pour s'adapter au contenu du signal.

## 2.2. Construction de bases d'ondelettes

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les ondelettes donnent une bonne représentation temps-fréquence d'un signal. Cette partie est consacrée à la construction de familles d'ondelettes facilement implémentables en pratique, la transformée en ondelettes discrète. Cette transformée en ondelettes nous permettra aussi de construire une base de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 2.2.1. Analyse multirésolution et bases d'ondelettes orthogonales

L'analyse multirésolution consiste à projeter le signal à énergie finie étudié sur un ensemble d'espaces d'approximations successives  $V_j$ . Ces espaces sont définis ci-après :

#### Définition 2.2

##### (Analyse multirésolution)

On appelle analyse multirésolution une suite  $(V_j)_{k \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que

1.  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1}$  (propriété d'emboîtement)
2.  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \overline{V_j} = \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$ , où  $\overline{V_j}$  est l'adhérence de  $V_j$ . (propriété de densité)
3.  $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap V_j = \{0\}$
4.  $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$  (propriété de translation)
5.  $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \leftrightarrow f(t/2) \in V_{j+1}$  (propriété de dilatation)
6. Il existe une fonction  $\phi \in V_0$  (appelée **fonction d'échelle** ou ondelette père) telle que  $(\phi(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormale de  $V_0$ .

#### Remarque 2.1

- La propriété de translation est une conséquence directe de l'existence de la fonction d'échelle et de la propriété de dilatation.
- On dit que l'analyse multirésolution est  $r$ -régulière si la fonction d'échelle  $\phi$  appartient à  $C^r$  et les fonctions  $\phi, \phi', \dots, \phi^{(r)}$  sont à décroissance rapide (i.e.  $\forall m \in \mathbb{N}, \exists c > 0$  tel que  $|\phi(x)| \leq \frac{c}{(1+|x|)^m}$ )
- D'après la définition, construire une analyse multirésolution (AMR) permet de calculer des projections successives d'un signal sur des espaces de plus en plus petits.
- D'après la propriété de dilatation, on passe de  $V_j$  à  $V_{j+1}$  en multipliant par 2 le facteur d'échelle. On dit alors que  $j$  correspond au **niveau de résolution**.

## 2. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

- Pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $(2^{-j/2}\phi(2^{-j}t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base orthonormale de  $V_j$ .

### Exemple 2.1

Un exemple d'analyse multirésolution est donné par

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ constante sur } \left[ \frac{k}{2^j}; \frac{k+1}{2^j} \right] \right\}.$$

On peut vérifier que cet ensemble forme bien une AMR avec comme fonction d'échelle  $\phi(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ .

Par construction d'une analyse multirésolution, pour chaque valeur de  $j \in \mathbb{Z}$  on sait que  $V_j \subset V_{j-1}$ . Les  $V_j$  sont appelés des **espaces d'approximations**. On introduit alors les **espaces de détails**  $W_j$  définis par

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j. \quad (2.1)$$

i.e.  $W_j$  est le complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$ , ce qui signifie que

$$W_j = \{f \in V_{j-1} : \forall g \in V_j \langle f; g \rangle = 0\}. \quad (2.2)$$

Voyons maintenant les propriétés des espaces  $W_j$ .

### Proposition 2.1

#### (Propriété des espaces de détails)

- $\forall j \neq l$   $W_j$  est orthogonal à  $W_l$ .
- L'espace  $L^2(\mathbb{R})$  est la somme directe des espaces  $W_j$ . Ce qui se traduit par

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f,$$

où  $Q_j f$  est la projection de  $f$  sur le sous-espace  $W_j$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord le premier point. Pour cela, nous remarquons que pour  $j > l$ , on a

$$W_j \subset V_{j-1} \subset \dots \subset V_l,$$

par définition des  $V_j$ . Mais  $W_l$  est orthogonal à  $V_l$  par construction. Il est donc aussi forcément orthogonal à  $W_j$ .

Montrons maintenant le second point. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  fixé. On note  $P_j f$  la projection de  $f$  sur  $V_j$  et  $Q_j f$  sa projection sur  $W_j$ . Alors par construction de  $V_j$  et de  $W_j$ , on sait que

$$P_j f + Q_j f = P_{j-1} f.$$

En répétant cette opération on voit que pour tout  $l < j$  on a

## 2.2. Construction de bases d'ondelettes

$$P_l f = Q_{l+1} f + Q_{l+2} f + Q_{l+3} f + \dots + Q_j f + P_j f$$

Comme  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \overline{V_j} = L^2(\mathbb{R})$ , en faisant tendre  $l$  vers  $-\infty$  on a

$$f = \sum_{l=-\infty}^j Q_l f + P_j f$$

mais  $\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{V_j} = \{0\}$  donc quand  $j \rightarrow \infty$ ,  $P_j f \rightarrow 0$ , ce qui démontre le résultat.  $\square$

La figure 2.2.1 illustre la décomposition précédente comme un arbre binaire d'espaces d'approximation  $V_j$  et d'espaces de détails  $W_j$ .

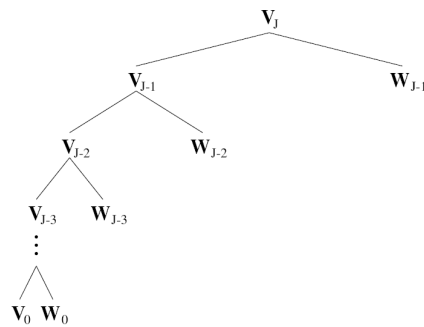


FIGURE 2.2. – Arbre binaire des espaces de décomposition. les  $V_j$  représentent les espaces d'approximations et les  $W_j$  les espaces de détails.

Le résultat que nous venons de démontrer nous assure que les  $W_j$  forment une suite de sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$  en somme directe. Autrement dit toute fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  se décompose de façon unique sous forme de projection sur ces espaces. On peut construire une fonction  $\psi$  telle que les  $\left(\frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base de  $W_j$ . Dans ce cas, la projection d'une fonction  $f$  sur  $W_j$  s'écrit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$ . On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 9 (Base orthogonale d'ondelettes)**

La famille des  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , où  $\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{j/2}} \psi(\frac{t}{2^j} - k)$  forme une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  et tout signal de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

où  $d_{j,k} = \langle f; \psi_{j,k} \rangle$ .

En s'arrêtant à  $J$  fixé, on peut aussi écrire,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{J,k}(t) + \sum_{j \leq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

Dans ce cas, on dit que les  $c_k$  sont les coefficients d'approximation à l'échelle  $J$  tandis que les  $d_{j,k}$  sont les coefficients d'ondelettes correspondant aux détails.

**2.2.2. Ondelettes et bancs de filtres**

Nous allons voir dans cette partie comment écrire la transformée en ondelettes sous forme de bancs de filtres, ce qui nous permettra de définir l'algorithme de mise en œuvre pratique des ondelettes.

Tout d'abord, remarquons que comme  $V_1 \subset V_0$ , nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_0(l) \phi(t-l).$$

Avec  $h_0(l) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right); \phi(t-l) \right\rangle$ . On peut de la même manière remarquer que quelque soit  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_{j+1} \subset V_j$ , ce qui s'interprète par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{j,k}(l) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - l\right). \quad (2.3)$$

De plus,

$$\begin{aligned} h_{j,k}(l) &= \left\langle \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right); \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - l\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2^{j+1/2}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) \phi^*\left(\frac{t}{2^j} - l\right) dt \\ &= \frac{1}{2^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \phi^*(x + 2k - l) dx \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable  $x = \frac{t}{2} - 2k$  dans la dernière équation. Par conséquent, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $h_{j,k}(l) = h_0(l - 2k)$ . On interprète la suite des  $(h_0[l])_{l \in \mathbb{Z}}$  comme la réponse impulsionnelle d'un filtre discret.

## 2.2. Construction de bases d'ondelettes

La réponse fréquentielle de ce filtre est alors donnée par  $H_0(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_0(l) e^{-2i\pi f l}$ . Cette fonction est clairement périodique, de période 1. Elle vérifie aussi :

$$H_0(0) = \sqrt{2}, \quad (2.4)$$

et

$$\forall f \in [0, 1[ \quad |H_0(f)|^2 + |H_0(f + 1/2)|^2 = 2. \quad (2.5)$$

En fait ces deux propriétés sont une conséquence de l'orthonormalité de la famille des  $\{\phi(t - l); l \in \mathbb{Z}\}$ .

On peut raisonner de même pour les espaces de détails  $W_j$ . On voit alors que pour  $j \in \mathbb{Z}$  fixé,  $W_{j+1} \subset V_j$  et

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \psi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_1(l - 2k) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - l\right). \quad (2.6)$$

Encore une fois  $h_1$  ne dépend pas de l'échelle. C'est la réponse impulsionnelle d'un filtre dont la réponse fréquentielle, périodique, de période 1 vérifie :

$$\forall f \in [0, 1[ \quad |H_1(f)|^2 + |H_1(f + 1/2)|^2 = 2. \quad (2.7)$$

et

$$H_1(0) = 0. \quad (2.8)$$

De plus, l'orthogonalité à  $j$  fixé entre les  $\phi_{j,k}$  et les  $\psi_{j,l}$  implique que

$$\forall f \in [0, 1[ \quad H_0(f)H_1^*(f) + H_0(f + 1/2)H_1^*(f + 1/2) = 0. \quad (2.9)$$

Ces conditions suggèrent que les filtres  $h_0$  et  $h_1$  sont respectivement des filtres passe-bas et passe-haut.

Nous pouvons de plus déduire de (2.6) que

$$\forall f \in \mathbb{R} \quad \widehat{\psi}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right). \quad (2.10)$$

Avec :

$$H_1(f) = e^{-2i\pi f} H_0^*\left(f + \frac{1}{2}\right).$$

Autrement dit l'ondelette mère  $\psi$  se déduit directement de la fonction d'échelle  $\phi$ .

### 2.2.2.1. Algorithme de Mallat

Considérons un signal  $x \in L^2(\mathbb{R})$  fixé. Si nous regardons ce qu'il se passe à l'échelle  $j \in \mathbb{Z}$  nous avons

$$P_j x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_j(k) \phi_{j,k}(t)$$

$$Q_j x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j(k) \psi_{j,l}(t)$$

## 2. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

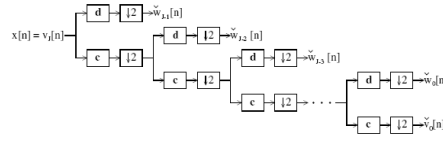


FIGURE 2.3. – Banc de filtres d'ondelettes

avec

$$c_j(k) = \langle x; \phi_{j,k} \rangle$$

$$d_j(k) = \langle x; \psi_{j,k} \rangle$$

Ce qui peut s'écrire grâce à (2.3) et (2.6) comme

$$c_j(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1}(l) h_0^*(l - 2k)$$

$$d_j(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1}(l) h_1^*(l - 2k).$$

Donc à partir des coefficients d'approximation à l'échelle  $j - 1$ , on obtient les coefficients d'approximation et de détails à l'échelle  $j$  en utilisant les deux filtres  $h_0$  et  $h_1$ . De plus, on voit que nous n'avons besoin que des termes pairs dans cette opération. Par conséquent, on obtient les coefficients du signal par passage successifs par les filtres  $h_0$  et  $h_1$  et par décimation d'un facteur 2. Cet algorithme en banc de filtres est illustré sur la figure 2.2.2.1

Voyons maintenant comment reconstruire le signal  $x$  à partir de ses coefficients, autrement dit comment faire l'opération inverse de la précédente. Comme on a  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  on peut décomposer  $\phi_{j,k}$  sur les bases  $(\phi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(\psi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  :

$$\begin{aligned} \phi_{j,p}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j,p}, \phi_{j+1,k} \rangle \phi_{j+1,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j,p}, \psi_{j+1,k} \rangle \psi_{j+1,k}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0[p - 2k] \phi_{j+1,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1[p - 2k] \psi_{j+1,k}(t) \end{aligned}$$

Pour reconstruire le signal, on suréchantillonne d'un facteur 2 les coefficients (en insérant des zéros pour les termes impairs) et on reconstruit

$$c_{j-1}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0[p - 2k] c_j(k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1[p - 2k] d_j(k).$$

### 2.2.3. Propriétés des ondelettes

La première propriété des ondelettes est que la mère est forcément de moyenne nulle, d'après (2.8). On a de plus le résultat suivant.



**Proposition 2.2**

Si une AMR de  $L^2(\mathbb{R})$  est  $r$ -régulière alors l'ondelette mère associée est  $C^r$  et à  $r$  moments nuls, i.e.

$$\forall l < r \quad \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0.$$

*Démonstration.* Par définition, si l'AMR est  $r$  régulière, cela signifie que  $\phi$  est  $C^r$ . Comme  $\psi$  se déduit directement de  $\phi$  grâce à l'équation (2.10). Il nous reste à montrer qu'alors les moments de  $\psi$  sont nuls. On démontre ce résultat par récurrence sur  $r$  et sur  $l$ . Supposons que  $r$  soit fixé et que  $\psi$  ait  $r - 2$  moments nuls. Posons alors  $x_0 = K2^J$  tel que  $\psi^{(r-1)}(x_0) \neq 0$ . Alors

$$\frac{1}{2^{J/2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \psi(2^{-J}x - K) dx = 0 \tag{2.11}$$

car les  $\psi_{j,k}$  forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Or, la formule de Taylor nous donne

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{r-1} \frac{(x-x_0)^l}{l!} \psi^{(l)}(x_0) + o(|x-x_0|^r).$$

Donc (2.11) devient

$$\frac{1}{2^{J/2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=1}^{r-1} \frac{(x-x_0)^l}{l!} \psi^{(l)}(x_0) + o(|x-x_0|^r) \psi(2^{-J}x - K) dx = 0$$

On pose alors  $u = 2^{-J}x - K$ . Dans ce cas,  $x - x_0 = 2^J u$ . Donc

$$2^{J(r-1/2)} \int_{\mathbb{R}} u^{r-1} \frac{\psi^{(r-1)}(x_0)}{(r-1)!} \psi(u) du + o(2^{(r-1)J}) = 0$$

En simplifiant, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} u^{r-1} \psi(u) du + o(2^{-J/2}) = 0.$$

Quand  $J \rightarrow \infty$  on obtient bien le résultat. □

Ce résultat est très important. C'est grâce à cela que les ondelettes forment un bon outil pour détecter les singularités dans un signal. En effet, si une ondelette est  $r$  régulière, elle est orthogonale à tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $r$ . Sur les coefficients d'ondelettes, on ne voit alors apparaître que les singularités.

On serait donc tenté d'après les résultats précédents d'utiliser des ondelettes ayant le plus possible de moments nuls. Malheureusement, le résultat suivant atténue ce gain. En effet, il nous dit qu'il y a un choix à faire entre régularité de l'ondelette et taille du support.

## 2. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

### Théorème 10 (Daubechies)

Si  $\psi$  est une ondelette qui engendre  $L^2(\mathbb{R})$  ayant  $p$  moments nuls alors son support est de taille supérieure ou égale à  $2p - 1$ .

Une conséquence importante de ce résultat est qu'on ne peut pas trouver d'ondelettes  $C^\infty$  à support compact.

### 2.2.4. Exemples d'ondelettes

On donne ici quelques exemples d'ondelettes classiques ainsi que leurs intérêts.

#### 2.2.4.1. Ondelette de Haar

Le premier exemple d'ondelettes que nous allons considérer est l'**ondelette de Haar**, créée par Alfred Haar en 1909. C'est la première ondelette! Celle-ci est construite à partir de l'analyse multirésolution

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ constante sur } [\frac{k}{2^j}; \frac{k+1}{2^j}]\}.$$

munie de la fonction d'échelle  $\phi(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ . Dans ce cas, l'ondelette-mère correspondante est donnée par

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } t \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ces ondelettes, représentées sur la figure 2.4, sont très bien localisées en temps mais très mal en fréquence, ce sont les ondelettes avec le plus petit support existant. Elles ont de plus peu d'intérêt car elles ne sont pas assez régulières (elles ne sont même pas continues et ont un seul moment nul) mais restent très simple à mettre en oeuvre.

#### 2.2.4.2. Ondelette de Meyer

L'ondelette de Meyer a une transformée de Fourier à support compact. Elle est aussi infiniment dérivable. Cette ondelette se construit en considérant une fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est paire,  $C^\infty$ , telle que

$$\hat{\phi}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{si } |f| \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

et qui vérifie les propriétés nécessaires pour décrire une fonction d'échelle.

Contrairement à la précédente, cette ondelette (représentée sur la figure 2.5) est très régulière. Malheureusement, son support est lui aussi infini.

## 2.2. Construction de bases d'ondelettes

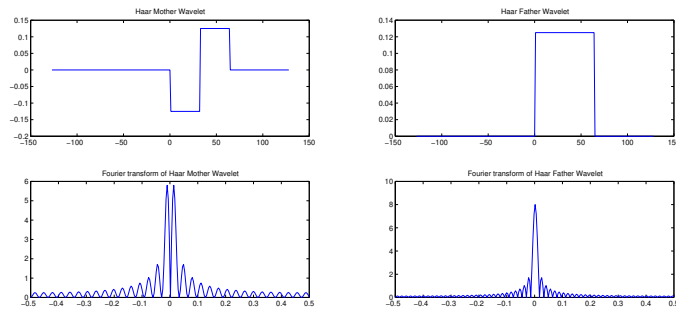


FIGURE 2.4. – Ondelette de Haar et fonction d'échelle associée ainsi que leurs transformées de Fourier.

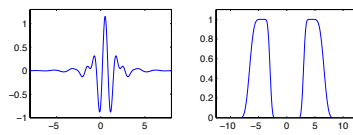


FIGURE 2.5. – Ondelette de Meyer

### 2.2.4.3. Ondelettes de Battle-Lemarié

Les ondelettes de Battle-Lemarié d'ordre  $m$  sont obtenues par orthonormalisation des fonctions B-splines du même ordre. Ces ondelettes ont l'avantage d'avoir une formulation analytique simple, et d'avoir une transformée de Fourier explicite.

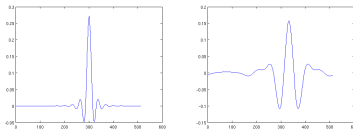


FIGURE 2.6. – Ondelette de Battle-Lemarié à 4 moments nuls : fonction d'échelle et ondelette mère.

### 2.2.4.4. Ondelette de Coifman

Le principal avantage des ondelettes de Coifman, ou coiflets, est d'avoir une fonction d'échelle qui possède des moments nuls. On peut alors approcher les coefficients d'échelle d'une fonction régulière à partir de ses échantillons. En effet, si  $f \in C^k$  sur le support de  $\phi_{jn}$  et sa fonction d'échelle à  $p$  moments nuls avec

## 2. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

$k < p$ , alors :

$$2^{j/2} \langle f, \phi_{j,n} \rangle = f(2^j n) + O(2^{(k+1)j}).$$

Ce dernier résultat se montre en faisant un développement de Taylor de  $f$  à l'ordre  $k$ . Par conséquent, si  $j < 0$ , et pour  $|j|$  assez grand, alors  $2^{j/2} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \simeq f(2^j n)$ , et on peut alors initialiser l'algorithme de banc de filtres décrit précédemment.

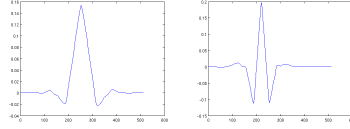


FIGURE 2.7. – La coiflet à 4 moments nuls : fonction d'échelle et ondelette mère.

### 2.2.4.5. Ondelettes de Daubechies

Avec les exemples précédents, nous pouvons remarquer qu'il y a un certain compromis à faire entre la taille du support de l'ondelette et sa régularité. En particulier, l'ondelette de Meyer est difficile à mettre en oeuvre en pratique.

Les ondelettes de Daubechies sont des ondelettes de support minimal pour un nombre de moments nuls donnés. Autrement dit elles dépendent d'un paramètre  $N$  fixé. Elles ont alors  $N$  moments nuls et sont à support dans  $[-N+1, N]$ . Cette ondelette est obtenue de façon constructive, à partir des filtres  $h_0$  et  $h_1$ . Elle est aussi fortement asymétrique. La figure 2.8 représente deux ondelettes de Daubechies.

### 2.2.5. Ondelettes biorthogonales

Comme nous l'avons vu, le meilleur compromis entre taille du support et moments nuls pour des ondelettes orthogonales est donné par les ondelettes de Daubechies. Malheureusement ces ondelettes sont fortement asymétriques. En fait, la seule ondelette symétrique et à support compact est l'ondelette de Haar. Pour certains problèmes, comme la gestion des bords sur une image, on a pourtant besoin d'utiliser des ondelettes symétriques. Pour cela, on relaxe l'hypothèse d'orthogonalité sur les ondelettes. On définit alors les ondelettes **biorthogonales** comme une généralisation des ondelettes orthogonales. Le principe est de prendre des ondelettes pour la synthèse différentes de celles utilisées pour l'analyse. Nous supprimons alors les conditions d'orthogonalité sur la base  $\phi_{j,k}$  de  $V_j$  et sur la base  $\psi_{j,k}$  de  $W_j$ . Nous introduisons les familles duales  $\overset{\circ}{\phi}_{j,k}$  et  $\overset{\circ}{\psi}_{j,k}$  de  $\phi_{j,k}$  et  $\psi_{j,k}$  et les espaces  $\overset{\circ}{V}_j$  et  $\overset{\circ}{W}_j$  engendrés par celles-ci de sorte que :

$$\forall j, k, k' \in \mathbb{Z}, \langle \phi_{j,k}, \overset{\circ}{\psi}_{j,k'} \rangle = \langle \overset{\circ}{\phi}_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = 0 \iff V_j \perp \overset{\circ}{W}_j, \text{ et } \overset{\circ}{V}_j \perp W_j \quad (2.12)$$

## 2.2. Construction de bases d'ondelettes

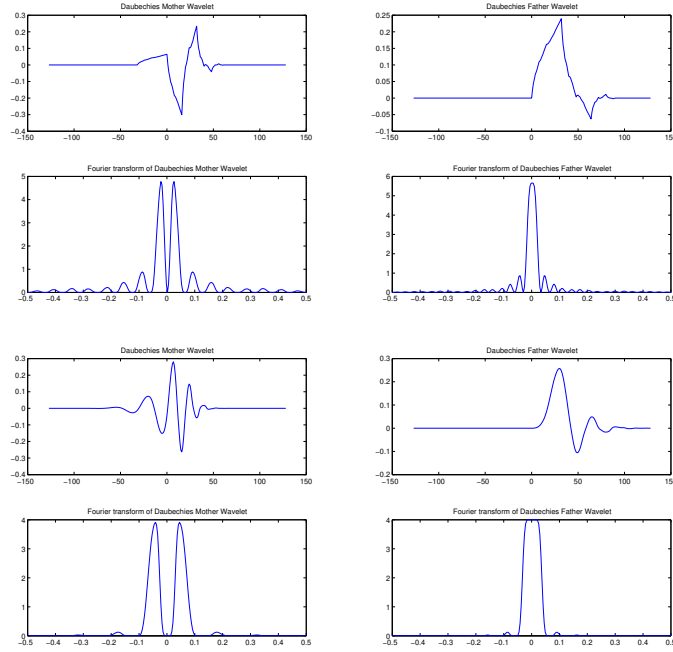


FIGURE 2.8. – Deux exemples d'ondelettes de Daubechies et leur fonction d'échelle associée, ainsi que leur transformée de Fourier. Haut :  $N = 2$ , bas :  $N = 7$

Les familles duales doivent aussi respecter des conditions de biorthogonalité :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \overset{\circ}{\phi}_{j,k'} \rangle &= \delta_{k-k'}, \quad \forall j, k, k' \in \mathbb{Z} \\ \langle \psi_{j,k}, \overset{\circ}{\psi}_{j,k'} \rangle &= \delta_{k-k'}, \quad \forall j, k, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dans ce cadre, les coefficients d'un signal  $x \in L^2(\mathbb{R})$  sont donnés par

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \langle x; \phi_{j,k} \rangle \\ d_{j,k} &= \langle x; \psi_{j,k} \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tandis que le signal reconstruit est donné par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{J,k} \overset{\circ}{\phi}_{J,k} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \overset{\circ}{\psi}_{j,k}. \quad (2.15)$$

Pour calculer les coefficients on peut comme dans le cas orthogonal utiliser l'algorithme de Mallat. On changera alors les filtres utilisés à la reconstruction. Pour avoir quand même la reconstruction parfaite du signal, les filtres utilisés à la reconstruction doivent tout de même vérifier certaines hypothèses.

### 2.2.6. Construction de bases d'ondelettes en dimension supérieure (2D)

L'idée dans cette partie est de construire des bases d'ondelettes séparables. Pour cela, on peut construire une AMR dans chaque direction. On obtient alors une paire  $(\phi^1, \psi^1)$  sur la première coordonnée et une paire  $(\phi^2, \psi^2)$  sur la deuxième. On construit alors l'analyse multirésolution 2D en prenant le produit tensoriel des AMR 1D. Autrement dit, on note  $\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . La suite des espaces  $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifie bien les propriétés de l'analyse multirésolution et sa fonction d'échelle est alors donnée par  $\phi^1(x_1)\phi^2(x_2)$ . En reprenant le raisonnement sur les AMR 1D, on voit qu'on a alors quatre fonctions à considérer :

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) &= \phi(x_1)\phi(x_2) \\ \Psi^1(\vec{x}) &= \phi(x_1)\psi(x_2) \\ \Psi^2(\vec{x}) &= \psi(x_1)\phi(x_2) \\ \Psi^3(\vec{x}) &= \psi(x_1)\psi(x_2)\end{aligned}\tag{2.16}$$

avec  $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$

Dans l'équation (2.16),  $\Psi^1$  représente l'ondelette mère de la base des détails verticaux,  $\Psi^2$  les détails horizontaux et  $\Psi^3$  les détails diagonaux.

On a dans ce cas 3 directions de détails. Ce qui nous donne 3 jeux de coefficients d'ondelettes. La reconstruction du signal prend en compte ces trois directions de reconstruction. En effet, soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  on a :

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Phi_{J,k} \rangle \Phi_{J,k} + \sum_{i \in \{1,2,3\}} \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i\tag{2.17}$$

Le passage en dimension supérieure se fait exactement de la même façon que le passage de la 1D à la 2D, en prenant des produits tensoriels d'espaces  $V_j$ . On obtient alors  $2^d - 1$  ondelettes de détails en dimension  $d$ .

### 2.3. Un exemple de transformée en ondelettes

La fonction donnée sur le figure 2.9 est décomposée sur la base d'ondelettes db3, i.e. ondelettes de Daubechies à 3 moments nuls. Pour l'initialisation, on identifie les coefficients  $a_0$  aux échantillons de la fonction.

Chaque passe de filtrage décompose les coefficients  $a_n$  en coefficients  $d_{n+1}$  d'ondelettes et  $a_{n+1}$  de fonctions d'échelles de tailles deux fois plus grande. Comme les ondelettes utilisées ont 3 moments nuls, les parties de la fonction linéaire ou paraboliques donnent des coefficients d'ondelettes exactement nuls.

Les coefficients étant sous-échantillonnés à chaque étape, le nombre de total de coefficients reste constant. On s'arrête après un nombre fixé d'itérations, ou jusqu'à épuisement du signal, quand  $a_N$  ne compte plus qu'un coefficient.

### 2.3. Un exemple de transformée en ondelettes

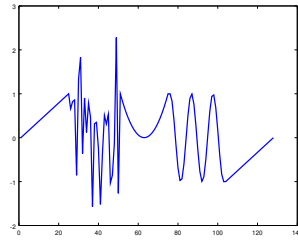


FIGURE 2.9. – Fonction à analyser.

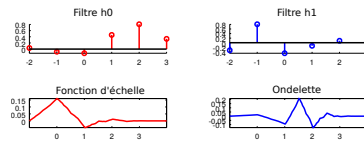


FIGURE 2.10. – Fonction d'échelle et ondelette de Daubechies à 3 moments nuls.

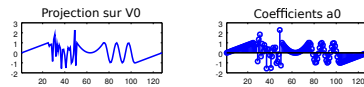


FIGURE 2.11. – Initialisation : on identifie les coefficients  $a_0$  aux échantillons de la fonction.

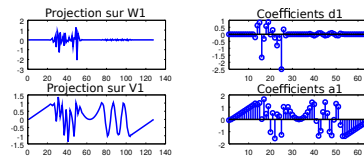


FIGURE 2.12. – Première passe : la fonction est décomposée sur une base de  $V_1$  (fonctions d'échelle) et  $W_1$  (ondelettes).

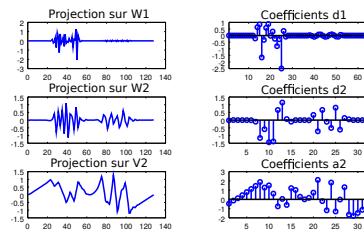


FIGURE 2.13. – Deuxième passe : la projection sur  $V_1$  est décomposée sur une base de  $V_2$  (fonctions d'échelle) et  $W_2$  (ondelettes).





# 3

## Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

### 3.1. Approximation linéaire

Approcher linéairement une fonction consiste à la projeter orthogonalement dans un espace de dimension fini fixé a priori. Cette espace peut être, par exemple, l'ensemble des atomes temps-fréquence pris jusqu'à une fréquence fixée, où des ondelettes d'échelle plus grande qu'un seuil fixé.

Étant donnée une base orthogonale  $(e_n)$  de  $L^2$ , on peut approximer une fonction  $f$  par la somme finie

$$f_N = \sum_{n=0}^{N-1} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

L'erreur d'approximation  $\varepsilon(N, F)$  est définie par

$$\varepsilon(N, F) = \|f - f_N\|^2 = \left| \sum_{n=N}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \right|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

Le fait que  $f$  soit dans  $L^2$  implique que l'erreur d'approximation  $\varepsilon(N, F)$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini. Cependant, cette décroissance de l'erreur peut-être très lente, trop lente pour que l'approximation de fonctions de  $L^2$  soit utilisable en pratique.

Pour assurer une convergence plus rapide de l'approximation, des a priori sont nécessaires sur les signaux, en particulier sur la vitesse de décroissance des coefficients  $\langle f, e_n \rangle$ .

On peut en particulier démontrer le théorème suivant :

#### Théorème 11

Soit  $s > 1/2$ . Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |n|^{2s} |\langle f, e_n \rangle|^2 < +\infty$ , alors  $\varepsilon(N, F) = o(N^{-2s})$ .

### 3. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

La section suivante caractérise les fonctions vérifiant cette hypothèse quand la base est une base de Fourier ou d'ondelettes.

#### 3.1.1. Approximation dans les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev  $H^p$  sont des sous-ensembles de  $L^2$  caractérisant la régularité d'une fonction. Ils sont définis comme l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $f \in L^2$ , ainsi que ses dérivées  $f^{(n)}$  d'ordre  $n \leq p$ .

Pour éviter les problèmes de bords, on se limite aux fonctions à support dans  $[a, b]$ , avec  $0 < a < b < 1$ . De telles fonctions peuvent être décomposées sur la base des atomes de Fourier  $e_n(t) = e^{i2\pi nt}$ . Les coefficients de cette décomposition sont donnés par

$$f_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi nt} dt.$$

En intégrant par parties, on montre que les coefficients  $f_n^{(1)}$  de la dérivée de  $f$  sont donnés par

$$f_n^{(1)} = i2\pi n f_n.$$

Plus généralement, les coefficients de  $f^{(p)}$  sont donnés par

$$f_n^{(p)} = (i2\pi n)^p f_n.$$

L'appartenance à l'espace de Sobolev  $H^p$  implique que  $f^{(p)} \in L^2$ , et donc que

$$\|f^{(p)}\|^2 = (2\pi)^{2p} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2p} |\langle f, e_n \rangle| \right|^2 < +\infty.$$

En appliquant le théorème 11, on montre que si une fonction à support sur  $[a, b]$  est dans  $H^p$ , l'erreur  $\varepsilon(N, F)$  de son approximation par les  $N$  premiers atomes de Fourier décroît plus vite que  $N^{-2p}$ .

On démontre un résultat analogue pour les ondelettes : si  $f$  est dans  $H^p$  et que  $\psi$  a au moins  $p + 1$  moments nuls, alors l'approximation de  $f$  par une base d'ondelettes décroît plus vite que  $N^{-2p}$ .

#### 3.1.2. Base de Karhunen-Loève

On suppose maintenant que les signaux à approximer sont des réalisations d'un processus aléatoire connu. On se limitera dans cette partie à des signaux  $x = (x_n)_n$  de taille finie  $N$ , et d'espérance nulle ( $E(x_n) = 0$ , si ce n'est pas vérifié, il suffit de soustraire cette espérance aux signaux pour se ramener à ce cas). La matrice de covariance  $R$  est supposée connue, de coefficients

$$R_{nm} = E(x_n x_m).$$

La base de Karhunen-Loève est définie comme la base des vecteurs propres  $(g_n)_n$  de  $R$  classés par valeurs propres  $\lambda_n$  décroissantes.

### 3.1. Approximation linéaire

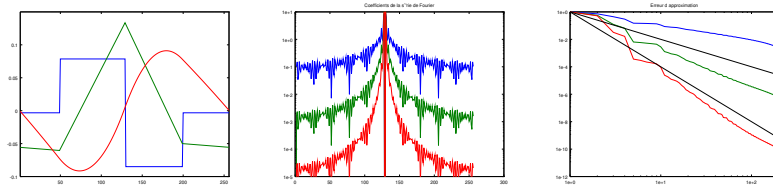


FIGURE 3.1. – 3 fonctions, dans  $H^0 = L^2$ ,  $H^1$  et  $H^2$ , leurs coefficients dans la base de Fourier, ainsi que l'erreur d'approximation en fonction du nombre de vecteurs de la base retenus. Noter la décroissance des coefficients plus rapide pour les fonctions régulières. L'erreur d'approximation décroît plus vite que  $N^{-2}$  et  $N^{-4}$  pour les fonctions de  $H^1$  et  $H^2$

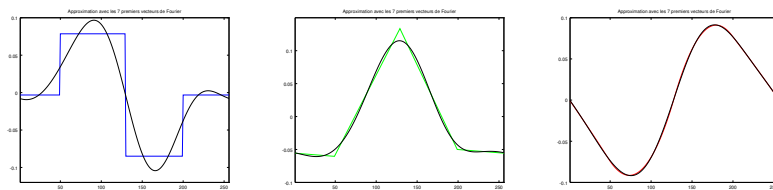


FIGURE 3.2. – Approximation des fonctions avec 7 vecteurs de la base de Fourier.

#### Théorème 12

L'espérance de l'erreur d'approximation par une combinaison de  $M$  vecteurs est minimisée en choisissant les  $M$  premiers vecteurs de la base de Karhunen-Loève.

L'espérance de l'erreur d'approximation est alors donnée par

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(M, x) &= E \left( \sum_{n=M}^{N-1} |\langle x, g_n \rangle|^2 \right) \\
 &= E \left( \sum_{n=M}^{N-1} (g_n^* x)(g_n^* x)^* \right) \\
 &= \sum_{n=M}^{N-1} g_n^* E(x x^*) g_n \\
 &= \sum_{n=M}^{N-1} g_n^* R g_n \\
 &= \sum_{n=M}^{N-1} \lambda_n.
 \end{aligned}$$

Classer les vecteurs propres  $g_n$  par valeurs propres décroissantes permet de garantir que l'espérance de l'erreur est minimale.

## 3.2. Approximation non linéaire

Pour les approximations linéaires, le choix des vecteurs de la base utilisés pour approximer le signal dépendait de l'espace dans lequel le signal vivait, ou du modèle probabiliste dont il est une réalisation, mais était indépendant du signal en lui-même.

Dans les approximations non linéaires, le choix du sous-espace dans lequel le signal est projeté est adaptatif, c'est à dire qu'il sera dépendant du signal lui-même.

Étant donné une première approximation linéaire  $x_M = \sum_{n=0}^{M-1} \langle x, g_n \rangle g_n$  d'un signal (avec  $M$  grand), l'erreur d'approximation entre  $x_M$  et  $x_\Lambda$  est définie par

$$x_\Lambda = \sum_{n \in \Lambda} \langle x, g_n \rangle g_n,$$

où  $\Lambda$  est un ensemble de  $L$  indices compris entre 0 et  $M-1$ , s'écrit

$$\varepsilon(\Lambda, x) = \|x - x_\Lambda\|^2 \quad (3.1)$$

$$= \sum_{n \notin \Lambda} |\langle x, g_n \rangle|^2. \quad (3.2)$$

Ainsi, pour minimiser l'erreur d'approximation non-linéaire de  $x$  par une combinaison linéaire de  $L$  vecteurs, il faut conserver les  $L$  plus grands coefficients en valeur absolue.

### 3.2.1. Approximation non linéaire dans une base d'ondelettes

Les espaces de Sobolev sont les espaces naturels pour caractériser l'approximation linéaire de signaux dans des bases de type Fourier ou d'ondelettes. Pour l'approximation non linéaire par ondelettes, les espaces naturels sont les espaces de Besov :

#### Définition 3.1

Soit  $0 < p, q \leq \infty$  et  $s > 0$  donnés. Soit  $(\psi_{j,k})_{j,k}$  une base d'ondelettes de  $L^2([0, 1]^d)$ . On dit qu'une fonction  $f$  appartient à l'espace de Besov  $B_p^{s,q}([0, 1]^d)$  si et seulement si

$$\|f\|_{B_p^{s,q}}^q = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j-1\}^d} |d_{j,k}|^p 2^{-j(p s - d + p/2)} \right)^{p/q} < \infty. \quad (3.3)$$

Ces espaces dépendent donc de 3 indices,  $p$ ,  $q$  et  $s$ . Pour  $p$  et  $q$  plus grands que 1, l'espace de Besov correspondant est un espace vectoriel normé (ce qui n'est plus le cas si l'un de ces indices est plus petit que 1). Ils définissent une famille d'espaces fonctionnels liés à la décomposition en temps-fréquence donnée par les ondelettes. Une autre façon de voir l'appartenance d'une fonction  $f$  à un espace de Besov  $B_p^{s,q}$  est de remarquer que si  $f = \sum d_{j,k} \psi_{j,k}$ ,  $f \in B_p^{s,q}$  si et seulement si il existe une suite  $(\varepsilon_j)_j$  dans  $\ell^q$  telle que

$$\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j-1\}^d} |d_{j,k}|^p = 2^{j(p s - d + p/2)} \varepsilon_j^p. \quad (3.4)$$

### 3.2. Approximation non linéaire

Dans cette définition, le paramètre  $s > 0$  correspond à la régularité de la fonction tandis que le paramètre  $p$  correspond à l'espace  $\ell^p$  dans lequel vivent les coefficients. Le paramètre  $q$  correspond à un raffinement, on prendra souvent  $q = \infty$  dans la suite.

#### Remarque 3.1

- Un espace de Besov ne dépend pas de l'ondelette choisie, à condition que celle-ci soit  $r$  régulière, avec  $r > s$ .
- Pour  $p = q = \infty$  L'espace de Besov  $B_\infty^{s,\infty}$  correspond à l'espace  $C^s$  des fonctions  $s$  régulières par morceaux.
- Pour  $p = q = 2$  L'espace de Besov  $B_2^{s,2}$  correspond à l'espace de Sobolev  $H^s$  des fonctions  $s$  régulières dans  $L^2$ .

L'intérêt pratique d'utiliser des espaces de Besov est donné par deux résultats. Le premier est qu'il permet de lier l'approximation d'une fonction par des ondelettes à sa régularité.

#### Proposition 3.1

Si une fonction  $f$  appartient à  $B_p^{s,q}$ , son approximation par ses  $M$  premiers coefficients  $\sum_{j \leq -\log_2 M} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \psi_{j,k}$  vérifie

$$\|f - f_M\|_p^2 = o(M^{-2s}). \quad (3.5)$$

*Démonstration.* Ce résultat est une conséquence directe de l'équation (3.4).  $\square$

En ce qui nous concerne, on s'intéresse plus à la norme  $L^2$  de l'erreur qu'à sa norme  $L^p$ . Pour passer de l'une à l'autre, on peut cependant utiliser les théorèmes d'injection entre les différents espaces de Besov.

#### Théorème 13

Soient  $0 < p \leq \infty$  et  $s > 0$  fixés. Alors

$$\begin{aligned} B_p^{s,q}([0,1]^d) &\hookrightarrow B_2^{s,q}([0,1]^d) \text{ si } p \geq 2 \\ B_p^{s,q}([0,1]^d) &\hookrightarrow B_2^{s',q}([0,1]^d) \text{ où } s' = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{2} \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La notation  $X \hookrightarrow Y$  signifie que  $X \subset Y$ , et qu'il existe une constante  $c$  telle que  $\forall x \in X, \|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ .

Le deuxième intérêt des espaces de Besov est donné par l'application au traitement d'images. En effet, on considère souvent qu'une "image naturelle" est la donnée de fonctions à variations bornées. Or l'espace des fonctions à variation bornée est lié aux espaces de Besov via le résultat suivant

$$B_1^{1,1} \hookrightarrow BV \hookrightarrow B_1^{1,\infty}, \quad (3.7)$$

la norme de  $BV$  étant définie par

$$\|f\|_{BV} = \int |f'(t)| dt.$$

### 3.3. Estimation

On verra ici comment utiliser les bases d'ondelettes (ou MDCT) pour débruiter un signal ou une image. Le problème d'estimation qu'on se pose ici est celui donné par le modèle du bruit blanc linéaire. Autrement dit on considère que le vecteur d'observations  $y \in \mathbb{R}^N$  correspond à :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad y_i = x_i + b_i, \quad (3.8)$$

où  $x_i = f(t_i)$  est la source à estimer,  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $b = (b_i)_{i=1, \dots, N}$  est un bruit blanc gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . On parle souvent d'un problème non paramétrique car l'objet à estimer  $f$  est une fonction, elle vit donc dans un espace de dimension infinie.

On cherche à estimer  $f$  ou au moins  $x \in \mathbb{R}^N$  à partir de  $y$ . Pour cela on considère un opérateur de décision  $D$  et on construit un estimateur de  $x$  à partir des données  $y$  de la forme  $\hat{x} = Dy$ . Le but est alors de choisir  $D$  de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre  $x$  et  $\hat{x}$ ,

$$r(D, x) = \mathbb{E}(\|\hat{x} - x\|^2). \quad (3.9)$$

Classiquement dans ce cas de figure, on utilise toute l'information disponible sur  $x$  ou  $f$  pour améliorer les performances de l'estimation. C'est pourquoi souvent un estimateur bayésien va être performant si l'information qu'on possède *a priori* est suffisamment complète et si elle est facilement modélisable par une densité de probabilité. Dans le cas contraire, on peut aussi modéliser le peu d'information qu'on possède par des critères d'appartenance à des espaces fonctionnels (on approfondira ce point plus tard).

#### 3.3.1. Estimateurs de Wiener

Dans ce paragraphe on va s'intéresser plus particulièrement aux estimateurs linéaires de  $x$ , les plus simples à calculer. On considère donc  $\hat{x} = \alpha y$  où  $\alpha$  est une matrice de paramètres. Le but est donc de trouver  $\alpha \in \mathcal{M}_{N \times N}$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne. On appelle alors l'estimateur associé *estimateur de Wiener*. Dans ce cas on a la proposition suivante.

##### Proposition 3.2

Un estimateur linéaire  $\hat{x}$  est un estimateur de Wiener si et seulement si

$$\mathbb{E}((x_n - \hat{x}_n)y_k) = 0 \quad \forall 0 \leq k, n < N. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}^N$  fixé. On considère un estimateur linéaire  $\hat{x} = \alpha y$  de  $x$  et on détermine le risque de cet estimateur en  $x$  :

$$\begin{aligned} r(D, x) &= \mathbb{E}(\|\hat{x} - x\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N |\hat{x}_i - x_i|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \left|\sum_{k=1}^N \alpha_{i,k} y_k - x_i\right|^2\right) \end{aligned}$$

C'est une forme quadratique dont le minimum est atteint si et seulement si  $\frac{\partial r(D,x)}{\partial \alpha_{n,k}} = 0$  quelque soit  $n$  et  $k$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

Si le signal et le bruit sont stationnaires, leurs matrices de covariance  $R_x$  et  $R_b$  sont diagonales dans la base de Fourier. On peut alors calculer la densité spectrale de puissance des deux signaux  $P_x(\omega)$  et  $P_b(\omega)$ , qui sont les transformées de Fourier de l'autocovariance de  $x$  et  $b$  définie par  $c_x(k) = E(x_n x_{n-k})$ . Le filtre de Wiener s'écrit, en Fourier,

$$\forall 1 \leq k, n \leq N \quad \hat{h}(\omega) = \frac{P_x(\omega)}{P_x(\omega) + P_b(\omega)}.$$

C'est l'estimateur linéaire qui minimise l'erreur quadratique moyenne en  $x$ . Malheureusement il n'est optimal que si  $x$  est un vecteur gaussien. De plus il suppose qu'on connaît la covariance de  $x$  ce qui n'est pas réaliste en pratique.

Dans le cas général il faut pouvoir définir un estimateur qui ne dépende que des données  $y$ . De plus l'opérateur de risque considéré  $r(D, x)$  dépend lui aussi de  $x$ . Comment déterminer un optimum pour ce risque si on ne connaît pas  $x$ ? C'est pour répondre à cette dernière question qu'on a défini le risque minimax.

### 3.3.2. Risque minimax

L'erreur quadratique moyenne définie précédemment dépend de l'inconnue  $x$  à estimer. En règle général on ne connaît pas  $f$  et donc  $x$ , il est donc difficile de comparer en toute généralité différentes méthodes d'estimation à partir de cet erreur. Dans un cadre paramétrique, où on chercherait à estimer  $x$  par un estimateur sans biais, on peut utiliser les bornes de Cramer-Rao. Si on veut estimer directement  $f$  il n'existe pas d'équivalent de cette borne. Cependant si  $f$  en elle même n'est pas connue on possède souvent un minimum d'information liée au problème, comme des informations de régularité. On peut modéliser cette information comme l'appartenance à un espace fonctionnel  $\Theta$ . On cherchera alors à déterminer le processus de décision  $D$  donnant la meilleure estimation sur  $\Theta$ . Une façon de faire est de considérer encore une fois l'erreur quadratique moyenne

$$r(D, f) = \mathbb{E}(\|Dy - f\|^2), \quad (3.11)$$

et de chercher  $D$  tel que cette quantité soit minimale pour tout  $f \in \Theta$  (souvent par abus de notation on dira que  $x = f(t) \in \Theta$ ). Malheureusement écrit comme ça, cette quantité est impossible à quantifier. Chercher à déterminer une méthode d'estimation efficace pour toutes les fonctions  $f$  (dans un espace de dimension infinie) est mission impossible. C'est pourquoi on cherche un critère plus facilement quantifiable. On choisit alors de considérer le pire comportement sur cet espace. C'est pourquoi on définit

$$r(D) = \sup_{f \in \Theta} r(D, f). \quad (3.12)$$

### 3. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

La meilleure méthode d'estimation sera alors celle qui minimisera ce risque sur  $\Theta$ , c'est ce qu'on appelle le risque minimax

$$r = \inf_D \sup_{f \in \Theta} r(D, f). \quad (3.13)$$

Pour des raisons évidentes, on note souvent ce risque minimax sur  $\Theta$ ,  $r(N, \Theta)$ . Tout comme l'estimateur bayésien, il est souvent difficile à calculer en pratique puisqu'il faut déterminer un infimum sur toutes les procédures d'estimation portant, encore une fois, sur un espace fonctionnel. C'est pourquoi une approche classique est de décomposer cet espace fonctionnel à l'aide d'une base, type Fourier ou temps fréquence, et de ne considérer que les opérateurs diagonaux dans cette base.

Avant d'aller plus loin dans l'estimation minimax, on va définir certaines méthodes d'estimation classique. Pour cela on se place dans le cadre d'une décomposition temps-fréquence de l'espace  $L^2$ . L'utilisation de ces décompositions temps-fréquence permet souvent d'avoir une représentation plus parcimonieuse du signal et, comme on le verra par la suite, de meilleures qualités d'estimation.

#### 3.3.3. Estimation dans une base de $L^2$

##### 3.3.3.1. Le problème d'estimation dans une base

Pour des raisons pratiques, dans cette partie on va tout définir dans un cadre de décomposition en ondelettes. Cependant les définitions et résultats présentés sont similaires pour n'importe quelle représentation temps-fréquence. Rappelons tout d'abord le problème considéré :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad y_i = x_i + b_i,$$

où  $x_i = f(t_i)$ ,  $t_i \in [0, 1]^d$  et  $f$  est une fonction  $L^2$  inconnue. Pour déterminer un estimateur de  $f$  il est logique d'utiliser une décomposition dans une base hilbertienne, qui permettra de calculer des coefficients.

##### Proposition 3.3

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base hilbertienne. Alors résoudre le problème (3.8) revient à résoudre le problème suivant

$$\forall j \in I \quad y_j = f_j + w_j, \quad (3.14)$$

où  $(w_j)_{j \in I}$  est un bruit blanc.

*Démonstration.* On considère le problème (3.8) écrit sous sa forme générale

$$Y = f + B, \quad (3.15)$$



### 3.3. Estimation

où  $f \in L^2([0, 1]^d)$ ,  $Y \in L^2([0, 1]^d)$  et  $B \in L^2([0, 1]^d)$  est un bruit blanc gaussien dans  $L^2([0, 1]^d)$ . Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne on peut calculer pour tout  $j \in I$ ,  $y_j = \langle Y, e_j \rangle$ . Dans ce cas, d'après (3.15) on a pour tout  $j \in I$ ,

$$y_j = \langle Y, e_j \rangle = \langle f + B, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle + \langle B, e_j \rangle. \quad (3.16)$$

Comme  $f = \sum_{j \in I} \langle f, e_j \rangle e_j$ , on peut caractériser complètement  $f$  à partir de sa décomposition. Trouver  $f$  revient à trouver la suite  $(f_j)_{j \in I}$ . Il reste à prouver que si  $B$  est un bruit blanc gaussien il en est de même pour la suite  $(b_j)_{j \in I}$  définie par  $b_j = \langle B, e_j \rangle$ . Il reste donc à montrer que  $(b_j)_{j \in I}$  forme un bruit blanc gaussien. Tout d'abord, comme  $b_j = \langle B, e_j \rangle = \sum_{i=1}^N w_i e_j(t_i)$ , sa loi est évidemment gaussienne. De plus, si on regarde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(b_k b_j) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N w_i w_l e_k(t_i) e_j(t_l) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbb{E}(w_i w_l) e_k(t_i) e_j(t_l) = \sum_{i=1}^N \sigma^2 e_k(t_i) e_j(t_i) \\ &= \sigma^2 \delta(k - j). \end{aligned}$$

Donc la suite  $(b_j)_{j \in I}$  forme bien un bruit blanc gaussien.  $\square$

Regardons maintenant les estimateurs que l'on peut construire, à l'aide d'une décomposition en ondelettes. On s'intéressera uniquement ici à des estimateurs dits diagonaux dans le sens où on cherche  $\hat{f}_j = \theta_j(y_j) y_j$ , pour tout  $j \in I$  (autrement dit l'estimation se fait coefficient par coefficient).

#### 3.3.3.2. Construction des estimateurs

**Estimation par projection** Dans un premier temps, on va regarder la façon la plus simple de construire un estimateur, autrement dit les estimateurs linéaires. Encore une fois, le but est de trouver la suite  $(\hat{f}_j)_{j \in I}$  de la forme  $\forall j \in I, \hat{f}_j = \theta_j y_j$  qui minimise  $r(f) = \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2)$ . Pour l'instant on écrira ce risque comme une fonction de  $f$ .

L'estimateur le plus simple à écrire est l'estimateur par projection. Il consiste à regarder la projection de  $Y$  sur le sous espace engendré par les  $M$  premiers vecteurs de la base  $(V_M$  dans le cas des ondelettes). Dans ce cas, on prend

$$\hat{f}_j = \mathbb{1}_{\{j \leq M\}} y_j, \quad \forall j \in I. \quad (3.17)$$

### 3. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

L'erreur obtenue est dans ce cas

$$\begin{aligned}
 r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{j \leq M\}} y_j - f_j|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{j \leq M\}} (f_j + b_j) - f_j|^2\right) \\
 &= \sum_{i=1}^M \mathbb{E}(b_i^2) + \sum_{j > M} |f_j|^2 \\
 &= M\sigma^2 + \sum_{j > M} |f_j|^2.
 \end{aligned}$$

On a deux termes qui apparaissent dans cette somme. Le terme de biais  $\sum_{j > M} |f_j|^2$  correspondant à l'erreur  $L^2$  commise en approchant  $f$  par ses  $M$  premières composantes de la base et le terme de variance  $M\sigma^2$ . On obtient alors

**Estimation par oracle** Comme dans le cas paramétrique les estimateurs linéaires, bien que plus facile à construire, sont souvent moins performants en pratique. Une autre technique d'estimation populaire consiste à estimer la fonction  $f$  à l'aide d'un seuillage. L'idée est, étant donné une représentation parcimonieuse d'un signal ou d'une image, si peu de coefficients portent le maximum d'information, les coefficients petits doivent correspondre au bruit.

#### Définition 3.2

Soit  $T > 0$  un seuil fixé. On appelle estimateur de  $f$  par oracle l'estimateur défini par

$$\hat{f}_j = \mathbb{1}_{\{|f_j| > T\}} y_j, \quad \forall j \in I. \quad (3.18)$$

On parle d'estimation par oracle car on fait dépendre l'estimateur de la fonction  $f$  que l'on cherche à estimer. Dans ce cas, la valeur optimale du seuil correspond à  $T = \sigma$ , i.e. on ne garde que les coefficients de  $f$  qui sont au dessus du bruit.

Comme dans le cas linéaire, pour  $f \in L^2$  fixé le risque de cet estimateur est donné par

$$\begin{aligned}
 r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|f_j| > \sigma\}} y_j - f_j|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|f_j| > \sigma\}} (f_j + b_j) - f_j|^2\right) \\
 &= \sum_{i \in I; |f_i| > \sigma} \mathbb{E}(b_i^2) + \sum_{i \in I; |f_i| \leq \sigma} |f_i|^2 = \sum \min(\sigma^2; |f_j|^2).
 \end{aligned}$$

Si on réordonne les  $f_j$  suivant l'ordre décroissant de leur puissance, on obtient

une valeur  $M$  telle que les  $M$  derniers termes soient inférieurs à  $T$ . On obtient alors

$$r(f) = M\sigma^2 + \sum_{j>M} |f_j|^2.$$

Encore une fois cette erreur dépend de l'approximation de  $f$  par  $M$  termes dans la décomposition considérée. Cette fois ci l'approximation est non linéaire puisqu'elle nécessite d'abord un réarrangement des coefficients.

**Estimation par seuillage** Dans la définition précédente, l'estimation construite dépendait de la valeur de  $f$  ce qui n'est pas réaliste en pratique. Une autre façon de construire un estimateur est alors de faire dépendre l'estimateur des données et non du signal qu'on cherche à estimer.

### Définition 3.3

Soit  $T > 0$  un seuil fixé. On appelle estimateur de  $f$  par seuillage dur l'estimateur défini par

$$\hat{f}_j = \mathbb{1}_{\{|y_j|>T\}} y_j, \quad \forall j \in I. \quad (3.19)$$

La construction est donc la même que la précédente mais cette fois ci les poids d'estimation dépendent uniquement des données. Cet estimateur est appelé seuillage dur car il met à zéro tous les coefficients petits et ne touche pas aux autres. Il est souvent opposé au seuillage doux qu'on verra par la suite.

En ce qui concerne le risque de cet estimateur on a

$$\begin{aligned} r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|y_j|>T\}} y_j - f_j|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|y_j|>T\}} (f_j + b_j) - f_j|^2\right) \end{aligned}$$

Remarquons que la connaissance de  $f$  réduit le risque. Dit autrement, si  $|f_j| < T$  on a forcément que  $|y_j| = |f_j + b_j| \leq T$ . Donc le risque par seuillage est plus grand que le risque par oracle.

**Estimation par seuillage doux** Comme nous l'avons vu, le seuillage dur ne touche pas aux coefficients au dessus du seuil  $T$ . Si ceux ci sont corrompus par le bruit, on ne touche pas à cette corruption. Le principe du seuillage doux est d'atténuer tous les coefficients afin de supprimer aussi le bruit dans les coefficients grands. Dans une base d'ondelettes, cette opération revient à faire un lissage adaptatif des observations.

### Définition 3.4

Soit  $T > 0$  un seuil fixé. On appelle estimateur de  $f$  par seuillage doux l'estima-

### 3. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

teur défini par

$$\hat{f}_j = (|y_j| - T)_+, \quad \forall j \in I. \quad (3.20)$$

Regardons l'erreur obtenue avec cet estimateur.

$$\begin{aligned} r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} (|y_j| - T)_+ - f_j\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} \mathbb{1}_{\{|y_j| > T\}} (f_j + b_j - T) - f_j\right)^2 \end{aligned}$$

Encore une fois ce risque est supérieur au risque obtenu par une estimation par oracle et dépend du seuil  $T$  choisi.

Dans tous les estimateurs qui précèdent, l'erreur d'estimation était liée au niveau de bruit ainsi qu'à l'approximation du signal par  $M$  coefficients, que ce soit de façon linéaire dans le cas de l'estimation par projection ou par une approximation non linéaire dans le cas des estimateurs par seuillage. Pour déterminer le risque minimax d'un estimateur on doit donc avoir une idée du comportement de cette approximation.

#### 3.3.4. Estimation minimax dans un espace de Besov

Cette partie se décompose en deux sous-parties. Tout d'abord nous allons donner des résultats généraux sur les risques minimax dans un espace de Besov donné et dans un second temps, nous reviendrons sur les estimateurs, par projection ou par seuillage, définis précédemment. Nous verrons alors pour quelles valeurs des différents paramètres  $M$  ou  $T$  ces estimateurs sont optimaux.

##### 3.3.4.1. Estimation minimax dans $B_p^{s,\infty}$

Le risque minimax que l'on peut obtenir avec  $N$  observations d'un signal corrompu par un bruit blanc gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est donné par la proposition suivante.

##### Proposition 3.4

Soit  $1 \leq p < \infty$  et  $s > \frac{d}{p}$ . Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que

$$r(B_p^{s,\infty}) \sim \inf_{\hat{f}_n} \sup_{f \in B_p^{s,\infty}} \mathbb{E}\|\hat{f}_n - f\|^2 \geq Cr(s, p)$$

où

$$r(s, p) = \begin{cases} (\sigma^2)^{\frac{2s}{2s+d}} & \text{si } p > \frac{2}{2s+d}, \\ (\sigma^2)^{\frac{2(s-\frac{d}{p}+\frac{d}{2})}{2(s-\frac{d}{p})+d}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration de cette proposition se base sur l'optimalité de l'estimation bayésienne. On peut cependant remarquer sur le résultat qu'il y a deux zones suivant les valeurs de  $p$  et de  $s$ . La première zone est la zone régulière tandis que la deuxième privilégie des représentations parcimonieuses. Pour chaque classe d'estimateur, on cherche à comparer le risque optimal obtenu avec la méthode (en fonction des paramètres) avec cette vitesse minimax. Nous allons voir dans la suite que les estimateurs linéaires sont optimaux au sens minimax dans la première zone mais plus du tout dans la deuxième.

### 3.3.4.2. Estimateurs par ondelettes dans un espace de Besov

Reprenons les risques des méthodes d'estimation données précédemment.

### 3.3.4.3. Estimateur par projection

Dans le cas de l'estimateur par projection on avait obtenu un risque de la forme

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \sigma^2 M + \sum_{j \geq M} |f_j|^2. \quad (3.21)$$

Autrement dit un terme de biais plus un terme de variance. D'après la proposition 3.1 et le théorème 13 on peut majorer cette erreur par

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) \leq \sigma^2 M^d + M^{-2\tilde{s}}, \quad (3.22)$$

où  $\tilde{s} = s$  si  $p \geq 2$  et  $\tilde{s} = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{2}$  sinon.

La valeur de  $M$  optimale est alors celle qui offre le meilleur compromis entre le biais et la variance, autrement dit  $M = \sigma^{-\frac{2}{2\tilde{s}+d}}$ . Dans ce cas, l'erreur commise est

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) \leq (\sigma^2)^{\frac{2\tilde{s}}{2\tilde{s}+d}}. \quad (3.23)$$

Elle correspond donc à l'erreur minimax pour  $p \geq 2$ .

### 3.3.5. Estimateurs par seuillage

Dans cette partie on regarde les valeurs optimales du seuil  $T > 0$  utilisé dans le seuillage dur et le seuillage doux. Dans les deux cas la valeur optimale du seuil est donné par  $T = \sigma \sqrt{2 \log N}$ . Cette valeur correspond à la plus petite valeur de  $T$  telle que la probabilité que le maximum du bruit soit inférieur à  $T$  tende vers 1 quand  $N \rightarrow \infty$ .

On peut montrer qu'avec cette valeur du seuil ces estimateurs ont un risque proche de celui d'un estimateur par oracle. Dans le sens où

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) \leq (2 \log N + 1)(\sigma^2 + \sum \min(\sigma^2, |f_i|^2)). \quad (3.24)$$

### 3. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

Ils sont donc optimaux dans les espaces de Besov à une correction logarithmique près.

Cependant ce seuil est assez grand et est très peu efficace en pratique. Une autre façon de définir un seuil est d'utiliser l'estimation de Stein.

#### 3.3.5.1. Estimateur SURE du seuil pour le seuillage doux

L'estimation précédente du seuil est basée uniquement sur le niveau de bruit et la dimension du signal à estimer. Il paraît d'utiliser également les données disponibles  $y_i$  pour estimer ce seuil  $T$ .

L'estimation SURE de ce seuil est basée sur une estimation du risque  $r(f, T)$  de l'estimateur de seuillage doux pour le seuil  $T$ . Ce risque s'écrit

$$r(f, T) = \sum_{j, |y_j| > T} T^2 + \sigma^2 + \sum_{j, |y_j| \leq T} |f_j|^2$$

En notant que

$$E(|y_j|^2) = |f_j|^2 + \sigma^2,$$

on peut estimer  $|f_j|^2$  par  $|y_j|^2 - \sigma^2$ . L'estimateur SURE (Stein Unbiased Risk Estimator) à partir des données  $y$  est défini par

$$SURE(y, T) = \sum_{j, |y_j| > T} T^2 + \sigma^2 + \sum_{j, |y_j| \leq T} |y_j|^2 - \sigma^2.$$

Comme son nom l'indique, on peut montrer que c'est un estimateur sans biais du risque  $r(f, T)$ . Pour estimer le seuil optimal  $T$ , on peut calculer  $SURE(y, T)$  pour plusieurs valeurs de  $T$ , et choisir la valeur  $T_{opt}$  qui minimise l'estimation SURE du risque.

#### 3.3.6. Un exemple de seuillage

La fonction  $f$  donnée fig 3.3 doit être estimée à partir de son observation bruitée. La fonction étant lisse par morceaux, on la décompose sur une base d'ondelettes (db3), les coefficients d'ondelettes étant significatifs uniquement autour de la discontinuité.

La figure 3.4 donne le résultat des seuillages dur et doux pour le seuil  $T = \sigma \sqrt{2 \log N}$ . Les résultats de l'estimation SURE du seuil sont donnés figure 3.5. L'estimateur du risque est tracé, ainsi que l'erreur d'estimation réelle (calculée avec la connaissance de  $f$  est donc inconnue en pratique). On remarque la bonne concordance entre les deux courbes. La constante noire indique le niveau de bruit. Le seuil estimé sans utilisation des données est dénoté par  $T$ .

### 3.3. Estimation

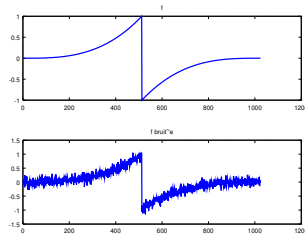


FIGURE 3.3. – Fonction à estimer et son observation bruitée.

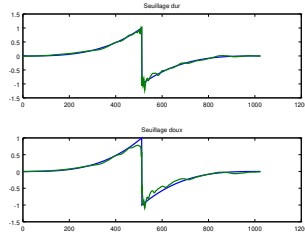


FIGURE 3.4. – Seuillage dur et seuillage doux.

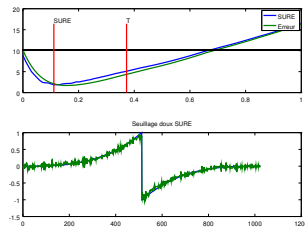


FIGURE 3.5. – Seuillage doux avec estimation SURE du seuil.





# 4

## ■ De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

Construire une base orthormée est un moyen "simple" d'obtenir une version discrète d'une représentation, on a vu par exemple comment construire des bases d'ondelettes et de cosinus locaux. Les bases orthonormées ont aussi des propriétés utiles en terme d'approximation, avec application directe à la compression.

Cependant, l'utilisation d'une base n'est pas toujours l'idéal. Construisons un signal discret particulier, échantillonné à 1Hz, comme la somme d'un dirac et d'un cosinus de fréquence  $f$ .

$$x[t] = \delta[t] + \cos[2\pi f t].$$

Dans la base canonique des échantillons temporels  $\{\delta[t - n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\ell_2(\mathbb{Z})$ , on a évidemment besoin d'une infinité d'échantillons. Si l'on choisit la base des cosinus discrets, on a aussi besoin d'une infinité d'éléments.

Construisons maintenant le *dictionnaire* d'atomes élémentaires par l'union des deux bases précédentes. Il suffit alors de seulement deux éléments pour reconstruire parfaitement le signal!

Cette *redondance* de l'information peut être utile afin de sélectionner au mieux les atomes, et aider à leur interprétation. On définit ici la notion de repères redondant (ou "frame"), puis on reviendra plus spécifiquement sur les repères de Gabor. Enfin, un étudiera en détail la notion de synthèse dans un dictionnaire et le rôle primordial de la parcimonie.

### 4.1. Utilisation de la redondance

La construction d'un dictionnaire redondant, est donnée par la notion de *frame*, qui permet une discrétisation stable aussi bien lors de l'analyse que de la synthèse d'un signal.

Définition 4.1

**(Frame)**

Une famille  $\{\varphi_n, \varphi_n \in \mathcal{H}\}$  est un frame de  $\mathcal{H}$  s'il existe deux constantes  $A, B > 0$

4. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

telles que pour tout  $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Si  $A = B$  on dit que la frame est ajustée.

De plus, une frame est une base orthonormée ssi  $A = B = 1$  et  $\|\varphi_n\| = 1$ .

On peut définir deux opérateurs de frame.

- L'opérateur de *synthèse*  $\Phi$  tel que

$$\Phi \alpha = \sum_k \alpha_k \varphi_k$$

- L'opérateur d'*analyse*

$$\Phi^* f = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}$$

En dimension finie,  $\Phi$  est une matrice de taille  $M, N$ , où  $M$  est la dimension du signal, et  $N$  le nombre d'atomes qui composent la frame  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ , avec  $\varphi_n \in \mathbb{C}^M$

Lorsque la frame est redondante (ie, n'est pas une base), Il existe une infinité d'inverse à gauche. L'inverse canonique est donnée par la pseudo inverse. On appelle la nouvelle frame obtenue *frame duale*

**Proposition 4.1** (frame duale)

Soit  $\tilde{\varphi}_n = (\Phi\Phi^*)^{-1} \varphi_n$ . Alors

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2$$

et

$$f = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n = \sum \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n$$

*Démonstration.*  $\{\langle f, \varphi_n \rangle\} = \Phi^* f$

$$\begin{aligned} \sum \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n &= \{(\Phi\Phi^*)^{-1} \Phi\} \Phi^* f \\ &= (\Phi\Phi^*)^{-1} \Phi\Phi^* f \\ &= f \end{aligned}$$

□

Lorsque la frame est ajustée (i.e.  $A = B$ ), alors  $\Phi\Phi^* = A \text{ Id}$ . Lorsque  $A = 1$ , on dit que la frame est de Parseval (on a conservation de l'énergie dans le domaine transformé). Attention : si la frame est de Parseval et que ce n'est pas une base orthonormée, alors nécessairement  $\|\varphi_n\| \neq 1$ .

Les bornes de frames  $A$  et  $B$  sont les plus petites et plus grande valeurs propres de  $\Phi\Phi^*$ . On obtient  $\frac{1}{B}$  et  $\frac{1}{A}$  pour  $(\Phi\Phi^*)^{-1}$ .

Pratiquement, une frame est donc un système de représentation *a priori* redondant, qui permet de reconstruire un signal à partir de ses produits scalaires avec les vecteurs composant la frame. Il faut noter que le calcul de la fenêtre duale n'est pas toujours aisé. Il existe cependant des algorithmes itératifs tels que l'algorithme de Richardson ou le gradient conjugué pour reconstruire le signal.

## 4.2. Retour sur Gabor

On a vu qu'il n'existe pas de base orthonormée d'atomes de Gabor. Bien qu'on ait construit une base de  $L^2(\mathbb{R})$  avec la MDCT, on va voir comment construire une frame de Gabor en *dimension finie* (la construction est bien entendu généralisable en dimension infinie).

Étant donné un signal observé sur un intervalle temporel, sa transformée de Fourier usuelle estime les fréquences le composant mais en perdant l'information temporelle. Afin d'analyser l'évolution du spectre avec le temps, Gabor a introduit les atomes de Fourier à fenêtre et la stft avec des fenêtres gaussiennes. On s'intéresse ici à sa discrétisation, qu'on appelle transformée de Gabor.

La transformée de Fourier à fenêtre reposant essentiellement sur la transformée de Fourier, un moyen simple de la discrétiser est d'utiliser le cadre des signaux discret périodique. Ainsi, si l'on considère  $x = \{x[0], \dots, x[T-1]\}$  un signal discret de période  $T$ , et une fenêtre  $g = \{g[0], \dots, g[L-1]\}$ ,  $L \leq T$ , périodique de période  $T$ , la transformée de Fourier à court terme s'écrit

$$X[m, k] = \sum_{n=0}^{T-1} x[n]g[n-m]e^{-\frac{i2\pi kn}{T}}$$

et peut être inversée directement

$$s[n] = \frac{1}{\|g\|^2} \sum_{m=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} X[m, k] \bar{g}[n-m] e^{\frac{i2\pi kn}{T}}.$$

Cependant une telle discrétisation est extrêmement redondante : on obtient  $T^2$  coefficients pour un signal de taille  $T$ . Même si la redondance peut-être utile, on aimerait pouvoir jouer sur le recouvrement temporel de deux fenêtres adjacentes, ainsi que sur la résolution de la transformée de Fourier qu'on aimerait par exemple de longueur  $L$  ou  $2L$  plutôt que  $T$ .

On note  $f_0 \in \mathbb{N}$  et  $k_0 \in \mathbb{N}$  les taux d'échantillonnage en fréquence et en temps du plan temps-fréquence considérée pour la transformée de Gabor. Soit la famille des translations et des modulations de la fenêtre mère génère une famille d'atomes de Gabor  $(\varphi_{mf})_{mf}$  qui forment le dictionnaire  $\Phi \in \mathbb{C}^{T \times K}$ . Soit  $K$  le nombre d'atomes. Les atomes de Gabor s'écrivent :

$$\varphi_{mf}[n] = g[n - mk_0] e^{\frac{i2\pi f_0 f n}{T}}, \quad m \in \{0, \dots, \frac{T}{k_0} - 1\}, f \in \{0, \dots, \frac{T}{f_0} - 1\}.$$

#### 4. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

Si le produit  $f_0 k_0$  est "assez petit", plus précisément si  $f_0 k_0 < T$ , i.e. si le plan temps-fréquence est suffisamment échantillonné, alors la famille  $(\varphi_{mf})_{m,f}$  est un frame de  $\mathbb{R}^T$

La transformée de Gabor est nécessairement redondante d'après le théorème de Balian-Low. Comme pour toutes les frames qui ne sont pas des bases, il existe donc une infinité de possibilité pour reconstruire  $\mathbf{x}$  à partir d'une famille d'atome de Gabor donnée (qui soit bien un frame).

La reconstruction canonique de  $\mathbf{x}$  à partir de ses coefficients de Gabor, donnée par le frame inverse canonique, donne une famille d'atome construite à partir d'une fenêtre duale notée  $\tilde{\mathbf{g}}$ .

$$\mathbf{x} = \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \varphi_{mf} \rangle \tilde{\varphi}_{mf} = \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \tilde{\varphi}_{mf} \rangle \varphi_{mf} = \Phi^* \mathbf{x} \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^* \mathbf{x} \Phi ,$$

où  $\tilde{\Phi}$  est le dictionnaire de Gabor construit à partir des fenêtres duales.

Le frame de Gabor peut-être construit de manière à être ajusté. Dans ce cas, on a simplement  $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$ . Plus particulièrement, on a  $\Phi \tilde{\Phi}^* = \|\Phi\|^2 \mathbf{Id}^1$ .

En pratique, les coefficients de Gabor peuvent être calculés en utilisant la FFT. L'opération de synthèse (et donc la transformée inverse avec la fenêtre duale appropriée) est effectuée à partir de la FFT inverse et des techniques d'ajout-superposition appropriées. Ces opérations d'analyse/synthèse sont efficacement implémentés dans la toolbox MatLab LTFAT<sup>2</sup>.

### 4.3. Approximation parcimonieuse

Plutôt que de se poser la question

- "Quelle est la meilleure analyse pour un signal d'intérêt?"

on se pose ici la question

- "Comment peut on synthétiser au mieux un signal?"

Le "au mieux" voulant dire avec le moins d'effort possible (en terme de coût de calculs) et de manière satisfaisante au vu du résultat attendu (en terme de débruitage par exemple, ou plus généralement de problème inverse). Avec une base orthonormée, les notions d'analyse et de synthèse sont strictement équivalentes. Dès lors qu'on travaille avec un dictionnaire redondant (ou un frame) la situation devient beaucoup plus riche et subtile : étant donné un dictionnaire sur-complet ( $N > M$ )  $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ , on décompose  $x \in \mathbb{C}^T$  comme une superposition d'atomes :

$$x = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n$$

Comme  $N > T$ , il existe une infinité de solution.

1. Il faut noter qu'on ne peut rien dire sur  $\Phi^* \Phi$  en général.  
2. <http://lftat.sourceforge.net/>

### 4.3. Approximation parcimonieuse

La première solution "évidente", est la solution donnée par la frame duale :  $\alpha_n = \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle$  c'est en fait la solution d'énergie minimale, c'est à dire qui est solution du problème d'optimisation suivant

$$\alpha = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \|\alpha\|_2 \quad \text{s.t.} \quad x = \sum \alpha_k \varphi_k$$

Cette solution à l'avantage d'être simple et peut coûteuse, mais n'est cependant pas la plus satisfaisante : les  $N$  atomes du dictionnaires sont nécessaires pour la re-synthèse de  $x$ . Or, l'avantage de l'approche synthèse est de fournir un cadre générique pour introduire des *a priori*, ou des contraintes, dans la représentation cherchée. On précise alors la question en

- Comment synthétiser au mieux un signal en privilégiant un certain comportement de ses coefficients de synthèse?

Ici, on va essentiellement chercher un comportement *parcimonieux*. En effet, la parcimonie à l'avantage de la simplicité : simplicité d'interprétation, mais aussi de stockage de l'information. Si l'on a un budget de  $K$  atomes, comment sélectionner ces  $K$  atomes tels que l'erreur de reconstruction  $\|\sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k - x\|$  soit minimale? Autrement dit, toujours en partant d'une famille complète d'atomes  $\{\varphi_n\}$ , si l'on se fixe un budget de  $K$  atomes, comment sélectionner ces  $K$  atomes pour approcher au mieux le signal donné? Ce type d'approximation trouve son application, par exemple, dans la compression des signaux avec perte. Il faut que le maximum d'informations soit dans les premiers coefficients afin d'en stocker le moins possible, et plus généralement dans les applications de problèmes inverses.

Idéalement, on souhaiterait donc résoudre le problème

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 & \quad (4.1) \\ \text{s.t.} \quad \|y - \Phi\alpha\| & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

c'est à dire minimiser le nombre de coefficient tout en contrôlant l'erreur de reconstruction. Ou

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \|y - \Phi\alpha\|_2^2 & \quad (4.2) \\ \text{s.t.} \quad \|\alpha\|_0 & = K \end{aligned}$$

c'est à dire minimiser l'erreur de reconstruction en se fixant un budget de  $K$  atomes.

Dans le cas d'une BON, le problème se résout facilement : il suffit de garder les  $K$  plus grand coefficients. On va voir deux approches pour résoudre ce problème dans un frame : une approche gloutonne et une approche variationnelle.

#### 4.3.1. Approche Greedy (Matching Pursuit)

Le matching pursuit est un algorithme glouton visant à résoudre le problème (4.1) (ou (4.2)). A chaque étape, l'algorithme 1 va chercher l'atome le plus corrélé au signal résiduel, pour l'ajouter au signal estimé.

#### 4. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

---

##### Algorithm 1 – Matching Pursuit

---

Initialisation :  $r^{(0)} = x, x^{(0)} = 0$ .

**repeat**

Recherche de l'élément optimal : à l'étape  $k$ ,  $r^{(k)}$  est connu et on cherche

$$\lambda_k = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} |\langle r, \varphi_\lambda \rangle|$$

Mise à jour de l'approximation au rang  $k$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k}$$

et du résidu

$$r^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = r^{(k)} - \langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k}$$

**until** critère d'arrêt

---

A chaque itération  $K$  on a donc

$$x = \sum_{k=0}^{K-1} \langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k} + r^{(K)},$$

et

$$\|r^{(k+1)}\|^2 = \|r^{(k)}\|^2 - |\langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle|^2,$$

De plus,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r^{(k)}\| = 0$$

Cet algorithme converge en temps infini : un atome peut être sélectionné autant de fois que nécessaire. Afin d'empêcher un atome d'être sélectionné plusieurs fois, il existe une version orthogonale du matching pursuit qu'on donne dans l'algorithme 2. L'idée est de remplacer l'étape de mise à jour du signal par une projection orthogonal sur l'espace engendré par les atomes sélectionnés. L'algorithme converge alors en au plus  $N$  itérations, où  $N$  est la taille du dictionnaire. Cette version a l'inconvénient d'être bien plus couteuse en temps de calcul en raison de la matrice de Gram à inverser à chaque itération.

#### 4.3.2. Approche variationnelle

Une approche consiste à construire une fonctionnelle "proche" du problème original (4.1), tout en étant facilement optimisable. On cherche ici une relaxation convexe du problème, la convexité assurant l'existence d'un minimum unique ainsi que l'existence d'algorithmes efficaces. La meilleure relaxation convexe de la pseudo-norme  $\ell_0$  est la norme  $\ell_1$ . On trouve alors le problème du *Basis Pursuit* (BP) de Chen et Donoho

---

 Algorithm 2 – Matching Pursuit Orthogonal
 

---

Initialisation :  $r^{(0)} = x, x^{(0)} = 0$ .

**repeat**

Recherche de l'élément optimal : à l'étape  $k$ ,  $r^{(k)}$  est connu et on cherche

$$\lambda_k = \operatorname{argmax}_{\lambda} |\langle r, \varphi_{\lambda} \rangle|$$

Mise à jour de l'approximation au rang  $k$

$$x^{(k+1)} = P_{V^k} x = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k$$

avec  $\alpha_k = (\Phi_k^* \Phi_k)^{-1} \Phi_k^* x$   
et du résidu

$$r^{(k+1)} = x - x^{(k+1)}$$

**until** critère d'arrêt

---

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad (4.3)$$

$$\text{s.t. } y = \Phi \alpha$$

Lorsqu'on ne souhaite pas une reconsustruction exacte, lors d'un problème de débruitage par exemple, on pose alors le *Basis Pursuit Denoising* (BPDN)

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|y - \Phi \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1. \quad (4.4)$$

Ce problème peut être formulé de manière équivalente comme

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad (4.5)$$

$$\text{s.t. } \|y - \Phi \alpha\|_2^2 \leq \varepsilon$$

ou

$$\min_{\alpha} \|y - \Phi \alpha\| \quad (4.6)$$

$$\text{s.t. } \|\alpha\|_1 \leq \tau$$

C'est sous cette dernière version que Tibshirani à introduit le problème du "LASSO". On appelle aujourd'hui indifféremment problème du LASSO ou Basis Pursuit Denoising les trois versions du problème. Si la version (4.5) semble le plus naturel, le

#### 4. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

paramètre  $\varepsilon$  étant proportionnel à la variance du bruit, c'est la version (4.4) qui est la plus facile à optimiser numériquement.

Ce problème du LASSO (4.4) peut-être optimiser avec les algorithmes de type "seuillage itératif" ISTA - Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm et FISTA, pour Fast Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm, donnés respectivement dans les algorithmes 3 et 4

---

##### Algorithm 3 – ISTA

---

Initialisation :  $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N, L = \|\Phi\|^2$

**repeat**

$$\alpha^{(k+1/2)} = \alpha^{(k)} + \frac{1}{L} \Phi^* (y - \Phi \alpha^{(k)})$$

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k+1/2)} \left(1 - \frac{\lambda/L}{|\alpha^{(k+1/2)}|}\right)^+$$

**until** convergence

---



---

##### Algorithm 4 – FISTA

---

Initialisation :  $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N, \gamma^{(0)} \in \mathbb{C}, L = \|\Phi\|^2$

**repeat**

$$\alpha^{(k+1/2)} = \gamma^{(k)} + \frac{1}{L} \Phi^* (y - \Phi \gamma^{(k)})$$

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k+1/2)} \left(1 - \frac{\lambda/L}{|\alpha^{(k+1/2)}|}\right)^+$$

$$\gamma^{(k+1)} = \alpha^{(k+1)} + \frac{k}{k+5} (\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)})$$

**until** convergence

---

On développe en annexe B les notions d'optimisation convexe non lisse permettant de résoudre le problème avec ces algorithmes. Ces algorithmes permettent de résoudre de façon général les problèmes du type

$$\mathcal{L}(y, \Phi, \alpha) + \lambda P(\alpha)$$

où

- $\mathcal{L}(y, \Phi, \alpha)$ , appelé "attache aux données", permet de relier le signal  $y$  aux coefficients de synthèse  $\alpha$  dans le dictionnaire  $\Phi$ . On choisit en général une attache aux données de type  $\ell_2$  :  $\|y - \Phi \alpha\|^2$ , mais il existe d'autres type d'attaches aux données.
- $P(\alpha)$  est le terme de régularisation permettant d'introduire un certain *a priori* sur les coefficients de synthèse  $\alpha$ . La norme  $\ell_1$  permet de modéliser un *a priori* de parcimonie.

On pourra se reporter aux slides *\*-Lasso Therapy : a sparse synthesis approach* pour une ouverture sur les approches parcimonieuses structurées.



# A ■ Rappels mathématiques

Les objets mathématiques utilisés pour modéliser les signaux sont des vecteurs (au sens large). C'est-à-dire des éléments d'espace vectoriel, et on utilise en général des fonctions pour les signaux à temps continu, et des suites (c'est à dire des fonctions de  $\mathbb{Z}$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ ) pour les signaux discrets.

Afin de pouvoir manipuler les signaux, on a besoin de définir des notions de distance et/ou de ressemblance entre eux. Ces notions sont données en mathématiques par les normes et les produits scalaires.

## A.1. Normes et convergences

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. Une norme sur  $E$  est donnée par la définition suivante.

### Définition A.1

#### (Norme)

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. Une norme  $\|\cdot\|$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Les normes les plus utilisées sont les suivantes :

- Norme 1
  - Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$
  - Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|$
- Norme 2 (énergie)
  - Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$

## A. Rappels mathématiques

— Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2}$

- Norme infinie

— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$

— Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|$

- De façon plus générale, les normes  $p$  :

— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$

— Soit  $u$  une suite réelle ou complexe,  $\|u\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$

On peut alors définir des espaces vectoriels normés couramment utilisés :

### Définition A.2 (Espace $L^p(E)$ )

L'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  avec une norme  $p$  finie est notée  $L^p(E)$

En particulier, on s'intéressera à l'espace des fonctions réelles d'énergie finie  $L^2(\mathbb{R})$ . On définit de manière équivalente les espaces des suites  $\ell^p(\mathbb{Z})$ .

Une norme, en plus de fournir une notion de distance, permet aussi de définir la notion de *convergence* et donc de *continuité*. Ces deux notions sont essentielles par la suite.

### Définition A.3 (Convergence en norme)

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On dira qu'une suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  converge vers  $f \in E$  ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

On notera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

On voit que suivant la norme choisie, la notion de convergence diffère. Ici encore, on considère les trois convergences classiques qui sont :

- La convergence *uniforme*, avec la norme infinie.
- La convergence *absolue*, avec la norme 1.
- La convergence *en énergie*, avec la norme 2.

Un espace  $E$  muni d'une norme sera dit complet, ou espace de Banach, si toute suite de Cauchy est une suite convergente.

## A.2. Produits scalaires et espaces de Hilbert

“Physiquement”, un produit scalaire mesure la “corrélation” entre deux signaux. C'est une notion essentielle en traitement du signal. On rappelle la définition d'un produit scalaire sur un espace complexe.

**Définition A.4 (Produit scalaire)**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur  $E$  est une forme sesquilinéaire à gauche, à symétrie hermitienne, définie positive. C'est-à-dire,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  est un produit scalaire ssi

- sesquilinéaire à gauche
  - $\forall x, y, z \in E, \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
  - $\forall x, y, z \in E, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in E, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in E, \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

- à symétrie hermitienne

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

- définie

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

- positive

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$$

On peut alors définir l'orthogonalité entre deux signaux. Des signaux orthogonaux seront "aveugles" l'un par rapport à l'autre. C'est une notion importante, car si deux signaux sont orthogonaux, l'information portée par chacun est parfaitement complémentaire.

**Définition A.5**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe munie d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Deux éléments  $x, y \in E$  sont dits orthogonaux ssi

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

En traitement du signal, on utilisera principalement les deux produits scalaires suivant :

- Soit  $f, g$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ . On peut définir le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

- Soit  $u, v$  deux suites de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . On peut définir le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \bar{v}_n$$

Avec ces deux exemples, on voit que les normes 2 définies à la section précédente correspondent à la racine du produit scalaire. On peut montrer qu'on peut

## A. Rappels mathématiques

toujours définir une norme comme la racine d'un produit scalaire d'un vecteur avec lui-même (et cette norme sera appelée norme 2).

On peut maintenant définir les *espaces de Hilbert* qui sont des espaces de Banach munis d'un produit scalaire. On modélisera souvent par la suite les signaux comme des éléments d'espaces de Hilbert.

### A.3. Bases orthonormées

Afin de représenter les signaux, on aura besoins de "briques" de bases. On introduit pour cela la notion de *bases orthonormées*.

#### Définition A.6 (Base orthogonale)

Une famille  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est orthogonale si pour tout  $n \neq k$

$$\langle e_k, e_n \rangle = 0.$$

Si de plus la famille est *génératrice*, i.e. pour tout  $f \in \mathcal{H}$ , il existe une suite  $\lambda_n$  de  $\mathbb{C}$  telle que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$$

alors  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une *base orthogonale* de  $\mathcal{H}$ .

Comme conséquence directe, si  $\{e_n\}$  est une base orthogonale de  $\mathcal{H}$ , on a pour tout  $f \in \mathcal{H}$  :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|} e_n.$$

Une base orthormée est une base orthogonale telle que tous les éléments aient une norme égale à 1, i.e.  $\|e_n\| = 1$  pour tout  $n$ . Les bases orthonormées ont des propriétés de "conservations de distance" très utiles, résumées dans les deux théorèmes suivants.

#### Théorème A.1 (Relation de Parseval)

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\{e_n\}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ . Alors pour tout  $f, g \in \mathcal{H}$ , on a :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle}.$$

Le second théorème est obtenue en appliquant la relation de Parseval avec  $f = g$ .

#### Théorème A.2 (Formule de Plancherel-Parseval)

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\{e_n\}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ . Alors pour

### A.3. Bases orthonormées

tout  $f \in \mathcal{H}$ , on a conservation de l'énergie :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 .$$



# B

## Notions d'optimisation convexe

classe de problème

$$f(x) + \Psi(x)$$

avec

- $f$   $L$ -Lipshitz différentiable et convexe,
- $\Psi$  convexe.

### Définition B.1

$f$  est  $L$ -Lipshitz différentiable ssi il existe  $L$  tel que

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

### Lemme B.1

si  $f$  est  $L$ -Lipshitz différentiable alors

$$|f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle| \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2$$

si de plus  $f$  est convexe, alors

$$0 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2$$

$f$  étant  $L$ -Lipschitz différentiable, on a :

$$f(x) + \Psi(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 + \Psi(x) \quad (\text{B.1})$$

Soit

$$x^{(t+1)} = \operatorname{argmin} f(x^{(t)}) + \langle \nabla f(x^{(t)}), x - x^{(t)} \rangle + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 + \Psi(x) \quad (\text{B.2})$$

B. Notions d'optimisation convexe

on a alors

$$\begin{aligned} f(x^{(t+1)}) + \Psi(x^{(t+1)}) &\leq f(x^{(t)}) + \langle \nabla f(x^{(t)}), x^{(t+1)} - x^{(t)} \rangle + \frac{L}{2} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|^2 \\ &\quad + \Psi(x^{(t+1)}), \text{ ((B.1) en } x = x^{(t+1)} \text{ } y = x^{(t)}) \\ &\leq f(x^{(t)}) + \langle \nabla f(x^{(t)}), x - x^{(t)} \rangle + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 + \Psi(x), \forall x \text{ (par définition du minimiseur)} \\ &\leq f(x^{(t)}) + \Psi(x^{(t)}) \text{ (en choisissant } x = x^{(t)}) \end{aligned}$$

et on assure alors la décroissance. On peut réécrire (B.2) comme

$$x^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|x - x^{(t)} + \nabla f(x^{(t)})/L\|^2 + \frac{1}{L} \Psi(x)$$

qu'on appelle opérateur de proximité dont la définition est

Définition B.2

soit  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. on appelle opérateur de proximité de  $\Psi$ , noté  $\operatorname{prox}_\Psi$ , la fonction

$$\begin{aligned} \operatorname{prox}_\Psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \operatorname{prox}_\Psi(y) = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|y - x\|^2 + \Psi(x) \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'algorithme de descente proximale

$$x^{(t+1)} = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left( x^{(t)} - \frac{1}{L} \nabla f(x^{(t)}) \right)$$

Quelques opérateurs de proximité

Exemple B.1

(Norme  $\ell_2$ )

Soit

$$\Psi(x) = \lambda \|x\|_2$$

alors

$$\operatorname{prox}_{\lambda \|\cdot\|_2}(y) = \frac{1}{1+\lambda} y$$

*Démonstration.* on dérive  $\frac{1}{2} \sum |y_k - x_k|^2 + \lambda \sum x_k^2$  par rapport à  $x_k$ , et on annule la dérivée :

$$x_k - y_k + \lambda x_k = 0$$

d'où le résultat. □



**Exemple B.2** (Norme  $\ell_1$ )

Soit

$$\Psi(x) = \lambda \|x\|_1$$

alors

$$\text{prox}_{\lambda \|\cdot\|_1}(y) = \text{sgn}(y) (|y| - \lambda)^+$$

où  $(x)^+ = \max(x, 0)$ .

*Démonstration.* pas dérivable en 0. si  $x_k > 0$ , alors

$$x_k - y_k + \lambda x_k = 0$$

et de même pour  $x_k < 0$ , d'où

$$x_k = y_k - \lambda \text{sgn}(x_k).$$

si  $y_k > 0$  et  $x_k < 0$ , alors  $x_k = y_k + \lambda > 0$  ce qui est exclu. avec un raisonnement similaire pour  $y_k < 0$  et  $x_k > 0$ , on trouve :

$$x_k = \text{sgn}(y_k) (|y_k| - \lambda)^+.$$

□

L'opérateur de proximité peut être vu comme la solution obtenue dans le cas particulier où  $\Phi$  est une base orthonormée. On donne ci-après quelques propriétés de l'opérateur de proximité. Pour cela, on rappelle avant les définitions du sous-gradient et du sous-différentiel.

**Définition B.3** (sous-gradient)

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.  $s \in E$  est un sous gradient de  $f$  ssi

$$\forall y \in E \quad f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$$

**Définition B.4** (sous-différentiel)

$\partial_f(x) = \{s, s \text{ sous gradient de } f\}$

**Proposition B.1** (Caractérisation implicite du sous-différentiel)

$$p = \text{prox}_\Psi(x) \Leftrightarrow x - p \in \partial_\Psi(p)$$

**Proposition B.2** (Firmly non expansif)

l'opérateur de proximité est firmly non expansif (et donc non expansif) ie

$$\begin{aligned} \|\text{prox}(x) - \text{prox}(y)\|^2 &\leq \langle \text{prox}(x) - \text{prox}(y), x - y \rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 - \|(I - \text{prox})x - (I - \text{prox})y\|^2 \end{aligned}$$

**Proposition B.3** (Minimiseur et point fixe)

$$x = \operatorname{argmin} f(x) + \Psi(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left( x - \frac{1}{L} \nabla f(x) \right)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\Leftrightarrow 0 \in \partial_{f+\Psi}(x) = \partial_f(x) + \partial_\Psi(x) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial_\Psi(x) + \{\nabla f(x)\} \\ &\Leftrightarrow -\nabla f(x) \in \partial_\Psi(x) \\ &\Leftrightarrow \left( x - \frac{1}{L} \nabla f(x) \right) - x \in \frac{1}{L} \partial_\Psi(x) \\ &\Leftrightarrow x = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left( x - \frac{1}{L} \nabla f(x) \right) \end{aligned}$$

□

**Théorème 14** (Vitesse de convergence de la descente proximale)

L'algorithme de descente proximale converge en  $\mathcal{O}(1/t)$ , où  $t$  est le nombre d'itérations.

*Démonstration.* Soit  $F(x) = f(x) + \Psi(x)$  et  $\ell_F(x; y) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \Psi(x)$ .  $f$  étant convexe et  $L$ -Lipschitz différentiable, on a l'inégalité (Lemme B.1)

$$F(x) - \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \leq \ell_F(x; y) \leq F(x) \quad (\text{B.3})$$

Comme  $\Psi$  est convexe, on a aussi la "Three point property" suivante :

$$\Psi(x) + \|x - z\|^2 \geq \Psi(z^+) + \|z^+ - z\|^2 + \|x - z^+\|^2, \forall x$$

où  $z^+ = \operatorname{prox}_\Psi(z)$   
d'où

$$\begin{aligned} F(x^{(t+1)}) &\leq \ell_F(x^{(t+1)}; x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|^2 \text{ (d'après (B.3))} \\ &\leq \ell_F(x, x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 - \frac{L}{2} \|x - x^{(t+1)}\|^2 \text{ (d'après la three point property)} \\ &\leq F(x) + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 - \frac{L}{2} \|x - x^{(t+1)}\|^2 \forall x \text{ (d'après (B.3))} \end{aligned}$$

Soit  $e_t = F(x^{(t)}) - F(x^*)$  et  $\Delta_t = \frac{L}{2} \|x^* - x^{(t)}\|^2$ . On a donc

$$e_{t+1} \leq \Delta_t - \Delta_{t+1}$$

En sommant

$$\sum_{k=0}^t e_{t+1} \leq \sum_{k=0}^t \Delta_k - \Delta_{k+1}$$

Or  $e_{t+1} \leq e_t$ , donc

$$(t+1)e_{t+1} \leq \Delta_0 - \Delta_{t+1} \leq \Delta_0$$

ie, le résultat voulu. □

**Remarque B.1** (Extension au cas d'une loss non convexe)

Si  $f$  est L-Lipshitz différentiable, mais non convexe, on a toujours

$$\begin{aligned} F(x^{(t+1)}) &\leq \ell_F(x^{(t+1)}; x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|^2 \text{ (d'après l'inégalité de gauche de (B.3))} \\ &\leq \ell_F(x, x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 - \frac{L}{2} \|x - x^{(t+1)}\|^2 \text{ (d'après la three point property)} \end{aligned}$$

mais on perd la dernière inégalité (car on perd l'inégalité de droite de (B.3)). Cette décroissance stricte de la fonction coût  $F$  permet toujours de conclure sur la convergence de l'algorithme vers un point critique de la fonction  $F$ , mais on perd toute notion de vitesse de convergence.

Cette convergence est trop lente en pratique. Version accélérée FISTA :

$$\begin{aligned} x^{(t)} &= \text{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left( z^{(t)} - \frac{1}{L} \nabla f(z^{(t)}) \right) \\ z^{(t+1)} &= x^t + \frac{t}{t+5} (x^{(t+1)} - x^{(t)}) \end{aligned}$$