Synthèse de filtres FIR (ou MA)

Matthieu Kowalski

Univ Paris-Sud
L2S (GPI)

Plan

Préliminaires

- Lire le fichier audio
- Représenter ses échantillons sur une échelle adaptée
- Représenter son spectre sur une échelle adaptée
- Créer un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c choisie, dans le domaine fréquentiel.
- Représenter le spectre du filtre passe bas idéal.

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Rappeler le lien entre la fonction de transfert du filtre et sa réponse impulsionnelle.
  la fonction de transfert est la TZ de la RI. Si la RI admet une TF, la fonction de transfert peut être confondue avec la réponse en fréquence.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \quad ; \quad \hat{h}(\nu) = H(e^{i2\pi k\nu}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i2\pi k\nu}$$

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$
\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu} \right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$
\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu} \,\mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu} \,\mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu} \right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale ?

Filtre, fonction de transfert et réponse impulsionnelle

- Comment peut-on obtenir la réponse impulsionnelle du filtre idéal représenté ici ?
  par inversion de la réponse en fréquence (ie, de sa TF)
- Calculer à la main la réponse impulsionnelle idéale de ce filtre.

$$
\begin{aligned}
h_n^{\mathrm{pb}_{\nu_0}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu \\
&= \left[\frac{1}{i2\pi n} e^{i2\pi n\nu} \right]_{-\nu_0}^{\nu_0} \\
&= \frac{e^{i2\pi n\nu_0} - e^{-i2\pi n\nu_0}}{i2\pi n} \\
&= \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

- Cette réponse impulsionnelle est-elle finie ? stable ? causale ?
  Cette RI est à support infini, est stable (elle admet une TF), mais n'est pas causal (définie pour $k < 0$)

Plan

1. Préliminaires
2. Les filtres FIR ou MA
   - Rappels et définitions
   - Application
3. Synthèse de filtre FIR par fenêtrage

Plan

2 Les filtres FIR ou MA
- Rappels et définitions
- Application

Filtres – équation aux différences

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Alors le signal y, version filtrée du signal x par h, est donnée par :

$$y_n = (h \star x)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Filtres – équation aux différences

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Alors le signal y, version filtrée du signal x par h, est donnée par :

$$y_n = (h \star x)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Comment réaliser un tel filtre en "temps réel"?

Filtres FIR ou MA

Définition

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Le filtre est dit "à réponse impulsionnelle finie" (FIR) ou "à moyenne mobile" (MA) si h est finie : $h = \{h_{-k_1}, \dots, h_0, \dots, h_{k_2}\}$
L'équation aux différences s'écrit alors :

$$y_n = \sum_{k=-k_1}^{k_2} h_k x_{n-k}$$

On appelle **ordre** du filtre, le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle.

Filtres FIR ou MA

Définition

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h. Le filtre est dit "à réponse impulsionnelle finie" (FIR) ou "à moyenne mobile" (MA) si h est finie : $h = \{h_{-k_1}, \dots, h_0, \dots, h_{k_2}\}$
L'équation aux différences s'écrit alors :

$$y_n = \sum_{k=-k_1}^{k_2} h_k x_{n-k}$$

On appelle **ordre** du filtre, le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle.

Remarques

- Un filtre FIR est forcément **stable**
- Il n'est pas forcément **causal**
- Un filtre FIR est **réalisable** ssi il est causal

Plan

2. Les filtres FIR ou MA
   - Rappels et définitions
   - Application

Application : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

Application : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Application : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?

Application : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?
  La réponse impulsionnelle est à support infini : on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.

Application : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?
  La réponse impulsionnelle est à support infini : on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.
- Le filtre sera-t-il réalisable ? Pourquoi ?

Application : analyse du filtre idéal

- Rappeler l'équation de filtrage (ou équation aux différences) dans le domaine temporel

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Quels problèmes va-t-on rencontrer si l'on échantillonne la réponse impulsionnelle actuelle pour établir l'équation aux différences du filtre FIR ?
  La réponse impulsionnelle est à support infini : on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons en mémoire.
- Le filtre sera-t-il réalisable ? Pourquoi ?
  Le filtre n'est pas réalisable car il n'est pas causal.

Plan

Plan

3. Synthèse de filtre FIR par fenêtrage
   - Méthode générale
   - Application

Synthèse de filtre RIF

But

Synthétiser un filtre RIF (ou MA) **causal**, qui s'approche le plus possible du filtre idéal recherché.

RI du filtre RIF recherché VS RI du filtre idéal

- Le filtre idéal a une RI h^{ideal} a support infini, non causal :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

- Le filtre RIF que l'on cherche étant causal, sa réponse impulsionnelle h doit être causale :

$$y_n = \sum_{k=0}^{K} h_k x_{n-k}$$

Méthode par troncature

Soit un filtre idéal de fonction de transfert H^{ideal} et de réponse impulsionnelle h^{ideal}. Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre $N+1$ est :

1. **Calcul** de la RI h^{ideal} par TF inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu$$

Méthode par troncature

Soit un filtre idéal de fonction de transfert H^{ideal} et de réponse impulsionnelle h^{ideal}. Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre $N+1$ est :

1. **Calcul** de la RI h^{ideal} par TF inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu$$

2. **Troncature** de la RI h^{ideal}

$$h^{\text{tronc}} = \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \ldots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

Méthode par troncature

Soit un filtre idéal de fonction de transfert H^{ideal} et de réponse impulsionnelle h^{ideal}. Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre $N+1$ est :

1. **Calcul** de la RI h^{ideal} par TF inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu$$

2. **Troncature** de la RI h^{ideal}

$$h^{\text{tronc}} = \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \ldots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

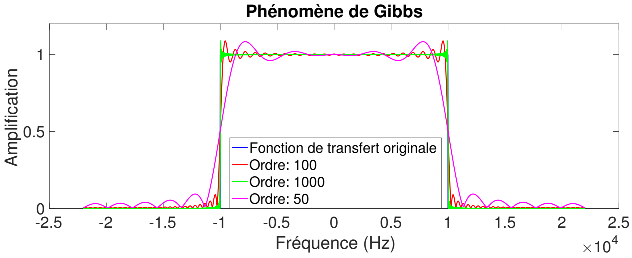
3. Application d'un **retard** sur h^{tronc}, afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{tronc}}$$

Phénomène de Gibbs

Inconvénient de la méthode précédente

La troncature (i.e. multiplication d'une fenêtre rectangulaire), fait apparaître un phénomène de Gibbs.



Utilisation d'une fenêtre

Solution

On utilise une fenêtre "douce" pour éviter les troncatures franches, responsables du phénomène de Gibbs

Exemples de fenêtre

- Bartlett (ou triangulaire)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hann

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Utilisation d'une fenêtre – 2

Exemples de fenêtre

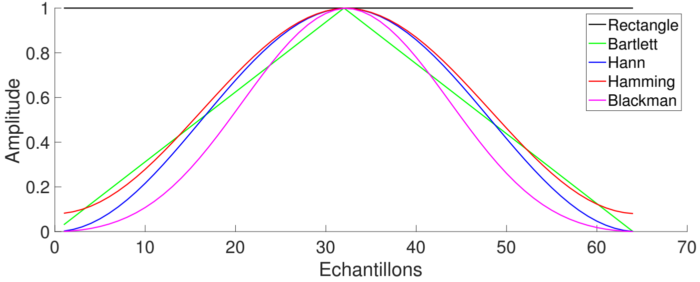
- Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Blackman

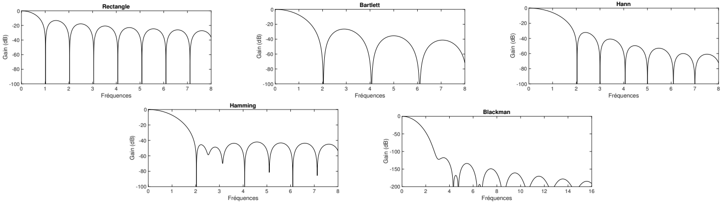
$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Utilisation d'une fenêtre – 3



Fenêtres populaires : représentation temporel

Utilisation d'une fenêtre – 4



Fenêtres populaires : gain fréquentiel

Utilisation d'une fenêtre – 5

Caractéristiques principales

- Largeur du lobe principal
- Rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire
- L'atténuation minimale en bande atténuée

Type de fenêtre	Largeur du lobe principal	Rapport d'amplitude	Atténuation minimale
Rectangulaire	$4\pi/N$	-13 dB	-21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	-25 dB	-25 dB
Hann	$8\pi/N$	-31 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/N$	-41 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/N$	-57 dB	-74 dB

Synthèse de filtre FIR par fenêtrage

Procédure

- **Calcul** de la RI h^{ideal} par TF inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} \, \mathrm{d}\nu$$

- **Fenêtrage** de la RI h^{ideal}

$$h^{\text{win}} = w \cdot \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \ldots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

- Application d'un **retard** sur h^{tronc}, afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{win}}$$

Plan

3. Synthèse de filtre FIR par fenêtrage
   - Méthode générale
   - Application

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
  Si l'ordre vaut N, on conserve N échantillons

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
  Si l'ordre vaut N, on conserve N échantillons
- Écrire l'équation aux différences. Combien fait-elle intervenir de termes ?

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
  Si l'ordre vaut N, on conserve N échantillons
- Écrire l'équation aux différences. Combien fait-elle intervenir de termes ?

$$y_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_k^{\text{win}} x_{n-k}$$

avec

$$h^{\text{win}} = w \cdot h^{\text{ideal}}$$

Il y a donc N termes dans cette équation.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
  Si l'ordre vaut N, on conserve N échantillons
- Écrire l'équation aux différences. Combien fait-elle intervenir de termes ?

$$y_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_k^{\text{win}} x_{n-k}$$

  avec

$$h^{\text{win}} = w \cdot h^{\text{ideal}}$$

  Il y a donc N termes dans cette équation.
- Quel problème reste-t-il à résoudre ?

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – fenêtrage

- Choisir l'ordre du filtre, puis appliquer un fenêtrage rectangulaire à h^{ideal}
- Quel est le nombre d'échantillon conservé en fonction de l'ordre ?
  Si l'ordre vaut N, on conserve N échantillons
- Écrire l'équation aux différences. Combien fait-elle intervenir de termes ?

$$y_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_k^{\text{win}} x_{n-k}$$

  avec

$$h^{\text{win}} = w \cdot h^{\text{ideal}}$$

  Il y a donc N termes dans cette équation.
- Quel problème reste-t-il à résoudre ?
  Le filtre n'est toujours pas causal.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – décallage

- Comment résoudre le problème de causalité ?

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – décallage

- Comment résoudre le problème de causalité ?
  En faisant un décalage de $\frac{N}{2}$ échantillons de h^{win}

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – décallage

- Comment résoudre le problème de causalité ?
  En faisant un décalage de $\frac{N}{2}$ échantillons de h^{win}
- Écrire l'équation aux différences.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – décallage

- Comment résoudre le problème de causalité ?
  En faisant un décalage de $\frac{N}{2}$ échantillons de h^{win}
- Écrire l'équation aux différences.

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k^{\text{FIR}} x_{n-k}$$

avec $h_k^{\text{FIR}} = h_{k-\frac{N}{2}}^{\text{win}}$

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – gain fréquentiel

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – gain fréquentiel

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – gain fréquentiel

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.

  - Les basses fréquences ($< f_c$) sont conservées, mais modulées (légère déformation)
  - Le hautes fréquences ($> f_c$) sont très atténuées, mais pas annulées, avec effet de "rebonds"
  - On reconnait clairement le phénomène de Gibbs.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – gain fréquentiel

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.
  - Les basses fréquences ($< f_c$) sont conservées, mais modulées (légère déformation)
  - Le hautes fréquences ($> f_c$) sont très atténuées, mais pas annulées, avec effet de "rebonds"
  - On reconnait clairement le phénomène de Gibbs.
- Que se passe-t-il si l'on diminue ou augmente l'ordre du filtre ?

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – gain fréquentiel

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.
  - Les basses fréquences ($< f_c$) sont conservées, mais modulées (légère déformation)
  - Le hautes fréquences ($> f_c$) sont très atténuées, mais pas annulées, avec effet de "rebonds"
  - On reconnait clairement le phénomène de Gibbs.
- Que se passe-t-il si l'on diminue ou augmente l'ordre du filtre ?
  Plus l'ordre est élevé, plus on s'approche de la fonction de transfert idéal.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – gain fréquentiel

- Afficher avec une échelle adaptée le gain fréquentiel du filtre FIR obtenue avec une fenêtre rectangulaire, en dB.
- Comparer au gain du filtré idéal. Commenter.
  - Les basses fréquences ($< f_c$) sont conservées, mais modulées (légère déformation)
  - Le hautes fréquences ($> f_c$) sont très atténuées, mais pas annulées, avec effet de "rebonds"
  - On reconnait clairement le phénomène de Gibbs.
- Que se passe-t-il si l'on diminue ou augmente l'ordre du filtre ?
  Plus l'ordre est élevé, plus on s'approche de la fonction de transfert idéal.
- Comparer avec d'autres fenêtres.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – filtrage

- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – filtrage

- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.
  Avec une simple convolution, on implémente le filtrage directement dans le domaine temporel avec l'équation aux différences

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – filtrage

- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.
  Avec une simple convolution, on implémente le filtrage directement dans le domaine temporel avec l'équation aux différences
- Filtrer le signal ainsi obtenu. Comparer avec le filtre idéal

Application : synthèse d'un filtre FIR passe-bas – filtrage

- Proposer une implémentation compatible avec le temps réel du filtre FIR ainsi obtenu.
  Avec une simple convolution, on implémente le filtrage directement dans le domaine temporel avec l'équation aux différences
- Filtrer le signal ainsi obtenu. Comparer avec le filtre idéal
- Regarder l'influence de l'ordre et du choix de la fenêtre.