Licence 3 DLMP
Traitement du signal

EXAMEN DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Table des matières

Durée 2h
poly de cours "peu annoté" seul document autorisé

Exercice 1. — *Filtre intégrateur.*

Soit le filtre numérique définit par la relation entrée-sortie suivante :

$$s[n] = \alpha s[n-1] + \frac{\beta}{2}(e[n] + e[n-1])$$

(1) Le filtre est-il causal ?

(2) Déterminer $H(z)$ la fonction de transfert de ce filtre

(3) Discuter la stabilité du filtre. Lorsqu'il est stable, donner la transformée de la réponse impulsionnelle

(4) Donner la réponse impulsionnelle $h[n]$

(5) Soit $b[n]$ un bruit blanc de fonction d'autocorrélation

$$R_b[n] = \sigma_b^2 \delta[n]$$

Donner la moyenne du signal de sortie $s[n]$ ainsi que sa densité spectrale de puissance

Exercice 2. — *Étude du secteur.*

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles. On commence par étudier les signaux périodiques

(1) Soit x un signal périodique de période T. x est donc un signal déterministe. On définit pour les signaux périodiques de période T à valeurs réelle la fonction d'autocorrélation comme :
$$R_x(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)x(t+\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\ .$$
Montrer que dans ce cas, la densité spectrale de puissance $S_x(\nu) = |c_\nu(x)|^2$, avec $c_\nu(x)$ le coefficient de série de Fourier de x, s'obtient par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

(2) Dans une première approche, on utilise le modèle
$$X(t) = A_0\cos(2\pi\nu_0 t)$$
avec $\nu_0 = 50$ Hz et $A_0 = 220\sqrt{2}$V. X est-il un signal déterministe ou un signal aléatoire ? Calculer alors sa fonction d'autorrélation $R_X(t)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(\nu)$.

(3) On considère ensuite le modèle :
$$X(t) = A_0\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi)$$
où φ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$, $\nu_0 = 50$ Hz et $A_0 = 220\sqrt{2}$V. Montrer que X est stationnaire au sens large et préciser sa moyenne μ_X, sa fonction d'autorrélation $R_X(t)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(\nu)$.

(4) La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $\nu_0 = 50$Hz. Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :
$$X(t) = A_0\cos(2\pi\gamma t + \varphi)$$
où γ est une variable aléatoire uniforme sur $[\nu_0 - \Delta_\nu, \nu_0 + \Delta_\nu]$, indépendante de φ. Montrer que X est stationnaire au sens large et préciser sa moyenne μ_X, sa fonction d'autorrélation $R_X(t)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(\nu)$.

Exercice 3. — *Sous échantillonnage – Interpolation – transformée en Z.*

On s'intéresse au système à temps discret symbolisé sur la figure 1. Il est globalement constitué de deux parties « *Système I* » et « *Système II* » situés respectivement à gauche et à droite de la figure 1. La première partie de cet exercice est consacrée au premier système, la seconde partie est consacrée au second et la troisième partie concerne leur association.

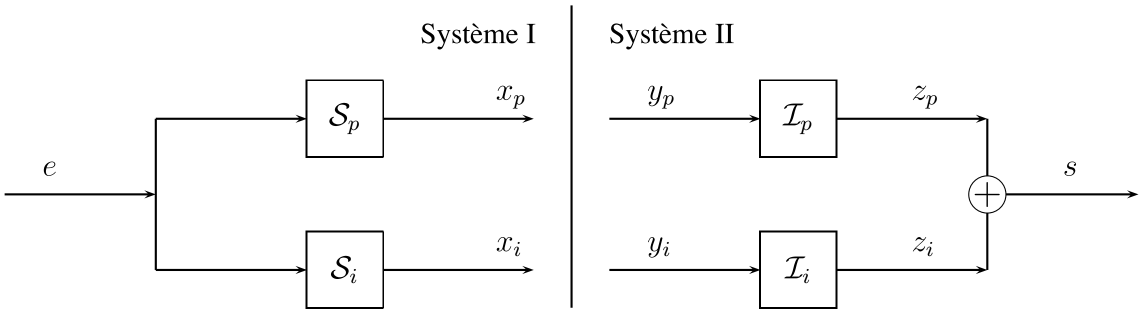

Figure 1. Système considéré

— Partie I : premier système —

Le premier système est défini par deux sous systèmes $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_i$ et à une entrée e, il associe deux sorties x_p et x_i définies par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} x_p[n] = e[2n] \\ x_i[n] = e[2n+1] \end{cases}$$

Il réalise ainsi deux sous échantillonnages du signal d'entrée : il retient d'une part les échantillons d'indice pair et d'autre part les échantillons d'indice impair.

(1) $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_i$ sont-ils des systèmes linéaires ?

(2) Soit $e'[n] = e[n+k]$. Calculer $x'_p[n] = e'[2n]$ et $x_p[n+k]$. Conclure vis à vis de l'invariance dans le temps du système.

(3) Relation entrée – sortie, en z. On note E, X_p, X_i les transformées en z de e, x_p, x_i.

(a) En séparant les termes pairs et impairs dans $E(z)$ et $E(-z)$, montrer que

$$E(z) + E(-z) = 2\sum_{p\in\mathbb{Z}} e[2p]z^{-2p}$$

et

$$E(z) - E(-z) = 2\sum_{p\in\mathbb{Z}} e[2p+1]z^{-2p-1}$$

(b) En déduire

$$\begin{cases} X_p(z) = 0.5\ (E(z^{1/2}) + E(-z^{1/2})) \\ X_i(z) = 0.5\ z^{1/2}\ (E(z^{1/2}) - E(-z^{1/2})) \end{cases}$$

(4) Donner la transformée de Fourier $\hat{x}_p$ de la sortie x_p en fonction de la transformée de Fourier $\hat{e}$ de l'entrée e.

— Partie II : second système —

La seconde partie du système est constituée de deux sous-systèmes $\mathcal{I}_p$ et $\mathcal{I}_i$ d'entrées y_p et y_i et de sorties z_p et z_i définies par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} z_p[2n] = y_p[n] \\ z_p[2n+1] = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_i[2n] = 0 \\ z_i[2n+1] = y_i[n] \end{cases}$$

La sortie est la somme $s[n] = z_p[n] + z_i[n]$. On note Z_p, Z_i, Y_p, Y_i et S les transformées en z de z_p, z_i, y_p, y_i et s.

(5) Calculer Z_p en fonction de Y_p d'une part et Z_i en fonction de Y_i d'autre part.

(6) Donner la transformée de Fourier $\hat{z}_p$ de la sortie z_p en fonction de la transformée de Fourier $\hat{y}_p$ de l'entrée y_p. Par quelle transformation simple obtient-on $\hat{z}_p$ en fonction de $\hat{y}_p$? Mêmes questions pour $\hat{z}_i$ en fonction de $\hat{y}_i$.

(7) Montrer que

$$S(z) = Y_p(z^2) + z^{-1} Y_i(z^2)$$

— Partie III : association des deux systèmes —

(8) On associe les deux systèmes en faisant : $y_p = x_p$ et $y_i = x_i$. Déterminez la sortie s en fonction de l'entrée e. Commentez.