PARTIEL DE TRAITEMENT DU SIGNAL

TABLE DES MATIÈRES

Durée 2h
poly de cours "peu annoté" seul document autorisé

Exercice 1. — *Transformée de Fourier des exponentielles monolatères.*

Cet exercice est consacré à la transformée de Fourier des signaux exponentiels :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(t)$. Étudiez le comportement limite lorsque α tend vers 0 et vers $+\infty$.

On définit la largeur spectrale $\Delta\nu$ et la largeur temporelle Δt de la manière suivante. On cherche $\nu_0 > 0$ et $t_0 > 0$ tels que :

$$|\hat{x}(\nu_0)|^2 = \frac{|\hat{x}(0)|^2}{2} \text{ et } |x(t_0)|^2 = \frac{|x(0)|^2}{2}$$

et on pose $\Delta\nu = 2\nu_0$ et $\Delta t = 2t_0$.

(2) Calculez $\Delta\nu$ et Δt ainsi que leur produit p, en fonction de α. Commentez les évolutions de $\Delta\nu$, Δt et p en fonction de α.

Exercice 2. — *Étude d'un filtre donné son transfert en z.*

On considère le(s) filtre(s) de transfert en z :

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

(1) Calculez la transformée en Z inverse $h[n]$ de $H(z)$. On distinguera tous les cas possibles selon la région de convergence considérée.

(2) Donnez, dans chaque cas, la condition de stabilité de H. Dans les cas stables, donnez la transformée de Fourier $\hat{h}(\nu)$ de $h[n]$. Donnez le spectre de puissance $|\hat{h}|^2$.

Exercice 3. — *Étude d'un filtre dérivateur à temps discret.*

On considère le filtre $\mathcal{F}$ défini par la relation entrée-sortie suivante (e est l'entrée s la sortie) :

$$s[n] = e[n] - e[n-1] \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ .$$

(1) $\mathcal{F}$ est-il linéaire, invariant, causal ?

(2) Par quel signal faut-il l'attaquer pour obtenir en sortie la réponse impulsionnelle ? Déterminez cette réponse impulsionnelle et représentez la graphiquement.

(3) Déterminez $\hat{h}$ et $|\hat{h}(\nu)|^2$. Le filtre est-il passe haut, passe bas, passe bande ?

(4) On attaque maintenant le filtre par le signal :

$$e_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \ n \in \{-N, \ldots, N\} \\ 0 & \text{si} \end{cases}$$

où N est un entier positif donné. Représentez graphiquement ce signal. Calculer $s_0[n]$ la sortie associée et la représenter.

(5) Pour terminer, on attaque $\mathcal{F}$ par un signal monochromatique à la fréquence ν et d'amplitude $a \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $e[n] = ae^{i2\pi\nu n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrez que la sortie se met sous la forme :

$$s[n] = G(\nu)e[n] \ .$$

(b) À quoi correspond $G(\nu)$?

Exercice 4. — *Filtre tout pôle d'ordre 1.*

On considère les filtres définis par la relation entrée-sortie suivante :

$$s[n] = \alpha s[n-1] + e[n] \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ ,$$

où $e[n]$ est l'entrée, $s[n]$ la sortie et α un paramètre réel.

(1) Déterminer $H(z)$ la fonction de transfert en z correspondante. Donner les zéros et les pôles de $H(z)$. Préciser les régions de convergence concernées.

(2) Montrer que la transformée en z – dont on précisera le disque de convergence – du signal $u[n] = a^n\Theta[n]$, où $\Theta[n]$ est la fonction de Heaviside à temps discret, est donnée par

$$U(z) = \frac{z}{z-a}$$

(3) Déterminer la impulsionnelle du filtre en fonction de α.

(4) Étudier la stabilité et la causalité des filtres correspondant en fonction de α.

(5) Déterminer le transfert en fréquence (quand c'est possible) et donnez les caractéristiques du filtre (passe haut, passe bas, . . .) en fonction de α.