PARTIEL DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Table des matières

Durée 3h
poly de cours "peu annoté" seul document autorisé

Exercice 1. — *Transformée de Fourier des doubles exponentielles (à temps discret).*

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier des signaux :

$$x[n] = \alpha^{|n|}\,, n \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \in]-1, 1[\ , \alpha \neq 0$$

ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés.

(1) Calculez $\hat{x}(\nu)$ la transformée de Fourier de $x(n)$.

(2) Vérifiez les propriétés de symétrie de $\hat{x}$. Vérifiez également que :

$$\hat{x}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\,.$$

(3) Étudiez en détail le comportement de $\hat{x}(\nu)$. Que dire du contenu spectral du signal $x(n)$: plutôt basse fréquence, haute fréquence, ... ?

(4) Que se passe-t-il lorsque α tend vers -1, 1, ou 0 ?

Exercice 2. — *Étude d'un filtre donné par sa fonction de transfert en z.*

On s'intéresse aux filtres de fonction de transfert en z :

$$H(z) = \frac{4z}{z^2 - 2z - 3}$$

(1) Donner les zéros et les pôles.

(2) Calculer la (les) réponses impulsionnelle(s) du (des) filtre(s) associé(s) selon les régions de convergences considérées. Préciser à chaque fois si le filtre est causal, anti-causale ou acausal, et si le filtre est stable. S'il est stable, donner le module au carré de sa transformée de Fourier.

Exercice 3. — *Étude d'un filtre dérivateur à temsp discret.*

On considère le filtre $\mathcal{F}$ défini par la relation de entrée-sortie suivante (e est l'entrée s la sortie) :

$$s[n] = e[n] - e[n-1] \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ ,$$

(1) $\mathcal{F}$ est-il linéaire, invariant, causal ?

(2) Déterminez sa réponse impulsionnelle. Le filtre est-il stable ?

(3) Déterminez $\hat{h}$ et $|\hat{h}(\nu)|^2$. Le filtre est-il passe haut, passe bas, passe bande ?

(4) Calculez la sortie de $\mathcal{F}$ lorsqu'il est attaqué par le signal :

$$e[n] = \begin{cases} 1 - |n|/N & \text{si } \ n = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4. — *Filtre tout pôle d'ordre 1.*

On considère les filtres définis par la relation entrée-sortie suivante :

$$s[n] = \alpha s[n-1] + e[n] \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ ,$$

où $e[n]$ est l'entrée, $s[n]$ la sortie et α un paramètre réel.

(1) Déterminer $H(z)$ la fonction de transfert en z correspondante. Donner les zéros et les pôles de $H(z)$. Préciser les régions de convergence concernées.

(2) Montrer que la transformée en z – dont on précisera le disque de convergence – du signal $u[n] = a^n \Theta[n]$, où $(\Theta[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ est la fonction de Heaviside à temps discret, est donnée par

$$U(z) = \frac{z}{z-a}$$

(3) Déterminer la impulsionnelle du filtre en fonction de α.

(4) Étudier la stabilité et la causalité des filtres correspondant en fonction de α.

(5) Déterminer la réponse en fréquence (quand c'est possible) et donnez les caractéristiques du filtre (passe haut, passe bas, ...) en fonction de α.

Exercice 5. — *Transformée de Hilbert.*

Soit $x(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (i.e. stable et d'énergie finie) un signal **réel à temps continu**. Son spectre $\hat{x}(\nu)$ est définit pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, et contient donc des fréquences positives et négatives. On définit le signal $z(t)$ à valeurs complexes tel que sa transformée soit

$$\hat{z}(\nu) = \hat{x}(\nu) + \hat{x}(\nu)\,\mathrm{sgn}(\nu)$$

où $\mathrm{sgn}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu > 0 \\ 0 & \text{si } \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \nu < 0 \end{cases}$. On définit les signaux $u(t)$ et $v(t)$ suivants :

$$u(t) = \mathcal{R}(z(t)) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2} \qquad v(t) = \mathcal{I}(z(t)) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$$

(1) Préliminaires.

(a) Montrer que pour tout $\nu < 0$, $\hat{z}(\nu) = 0$ (i.e. $\hat{z}(\nu)$ ne contient que des fréquences négatives), et pour tout $\nu > 0$ $\hat{z}(\nu) = 2\hat{x}(\nu)$.

(b) Soit $y(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ un signal à valeurs complexes. Montrer que $\hat{\bar{y}}(\nu) = \overline{\hat{y}(-\nu)}$.

(c) Montrer que $\hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)}$ (on rappelle que $x(t)$ est à valeurs réelles)

(2) Montrer que $\hat{u}(\nu) = \hat{x}(\nu)$ et en déduire que $\mathcal{R}(z(t) = x(t))$

(3) Montrer que $\hat{v}(\nu) = -i\,\mathrm{sgn}(\nu)\hat{x}(\nu)$

(4) Montrer que $z(t) = x(t) + iv(t)$. *$v(t)$ est appelé "transformée de Hilbert de $x(t)$" et $z(t)$ le signal analytic associé à $x(t)$*