

# Mathématiques I : Partie 2

L3 PAPP-DLPC, année 2023-2024

wietze.herreman@universite-paris-saclay.fr

2020 Wietze Herreman

PUBLISHED BY ORSAY UNIVERSITY PRESS

[HTTP://PERSO.LIMSI.FR/WIETZE/](http://perso.limsi.fr/wietze/)

Je remercie M. Legrand pour avoir partagé le template latex utilisé pour la rédaction de ce poly.

*Première impression, Octobre 2020*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>EDO's</b>	<b>7</b>
<b>2.1</b>	<b>Généralités</b>	<b>7</b>
<b>2.2</b>	<b>EDO's linéaires</b>	<b>8</b>
2.2.1	Définition	8
2.2.2	Principe de superposition	9
2.2.3	Ordre 1, à coefficient constant	9
2.2.4	Ordre n, à coefficients constants	10
2.2.5	Ordre 1, à coefficient variable	13
2.2.6	Ordre 2, équation de Bessel	13
2.2.7	Ordre 2, ED pour d'autres fonctions spéciales	15
<b>2.3</b>	<b>EDO's non-linéaires</b>	<b>15</b>
2.3.1	Définition	15
2.3.2	EDO séparable	15
2.3.3	EDO exacte	16
2.3.4	EDO de Bernoulli	17
<b>2.4</b>	<b>Conditions initiales &amp; conditions aux limites</b>	<b>18</b>
2.4.1	Définition	18
2.4.2	Existence & unicité	18
2.4.3	Imposer les CI en pratique	19
2.4.4	Imposer les CL en pratique	20
<b>2.5</b>	<b>Problèmes aux valeurs propres</b>	<b>21</b>
2.5.1	Un exemple simple	21
2.5.2	Problèmes aux valeurs propres de Sturm-Liouville	23
2.5.3	Exemple 1 : mécanique quantique ondulatoire en 1D	26
2.5.4	Exemple 2 : ondes sur une corde élastique	26
2.5.5	Exemple 3 : les orbitaux s de l'atome d'hydrogène	27

<b>3</b>	<b>Systèmes d'EDO's</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Généralités</b>	<b>29</b>
<b>3.2</b>	<b>Systèmes linéaires</b>	<b>31</b>
3.2.1	Definition	31
3.2.2	Principe de superposition	31
3.2.3	Systèmes linéaires à coefficients constants	32
<b>3.3</b>	<b>Systèmes non-linéaires</b>	<b>40</b>
3.3.1	Analyse locale autour d'un état équilibre	40
3.3.2	Exemple physique : le pendule	42
<b>4</b>	<b>EDP's</b>	<b>47</b>
<b>4.1</b>	<b>Généralités</b>	<b>47</b>
<b>4.2</b>	<b>EDP linéaire d'ordre 1</b>	<b>48</b>
4.2.1	Définition	48
4.2.2	Solutions séparables	48
4.2.3	Méthode des caractéristiques	49
<b>4.3</b>	<b>EDP linéaires d'ordre 2</b>	<b>55</b>
4.3.1	Définition	55
4.3.2	Classification	55
<b>4.4</b>	<b>Le problème de Laplace</b>	<b>56</b>
4.4.1	L'opérateur Laplacien	56
4.4.2	Définition du problème de Laplace	58
4.4.3	Théorème min-max & unicité de la solution	58
4.4.4	Signification mathématique : minimisation des gradients	59
4.4.5	Solutions séparables en 2D : coordonnées Cartésiennes $(x, y)$	60
4.4.6	Solutions séparables en 2D : coordonnées polaires $(r, \theta)$	64
4.4.7	Solutions séparables en 3D : coordonnées sphériques $(r, \theta, \phi)$	68
<b>4.5</b>	<b>Expansions sur fonctions propres</b>	<b>72</b>
4.5.1	Introduction	72
4.5.2	Fonctions propres du Laplacien	72
4.5.3	Fonction propres séparables en 2D : coordonnées Cartésiennes $(x, y)$	73
4.5.4	Problème de Poisson	77
4.5.5	Problème de diffusion	78
4.5.6	Problème d'onde	79
<b>4.6</b>	<b>Fonctions de Green</b>	<b>80</b>
4.6.1	Principe de la méthode	80
4.6.2	Fonctions de Green du problème de Poisson	80
<b>5</b>	<b>Au delà</b>	<b>85</b>

# 1. Introduction

Comme vous avez dû le remarquer, les équations différentielles sont omniprésentes en physique. De la loi de Newton

$$m \vec{r} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (1.1)$$

à l'électromagnétisme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \quad (1.2)$$

à la mécanique des fluides

$$\rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \vec{f} \quad (1.3)$$

à la mécanique quantique

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi \quad (1.4)$$

De très nombreuses lois fondamentales sont formulées à l'aide d'équations différentielles partielles car on a considéré, dans le passé, qu'une description physique en champs "continu" est la plus adaptée. Cela se discute car la connaissance d'une équation différentielle n'impose pas la connaissance de sa solution qui peut être notoirement difficile, voir impossible à trouver. Quelque part, on comprend pourquoi. Exprimée en "différentielles" infiniment petites, une équation différentielle suggère implicitement qu'il serait possible de connaître la solution infiniment bien ? Ceci n'est évidemment pas toujours possible et pas nécessaire non plus dans la plupart des cas réalistes. Confronté à cela, on deux options :

1. La première option est de simplifier le contexte physique, en focalisant sur des cas "académiques" souvent très symétriques. Grâce à cette symétrie, il peut être possible de trouver une solution exacte et dans ce cours, on enseigne quelques méthodes courantes utilisées dans ce contexte. Cette approche idéalisée permet de construire des "modèles" approchés, sur laquelle une grande partie de notre compréhension physique se base.
2. L'autre possibilité est de relâcher la contrainte d'une précision infinie sur la solution. Par des méthodes théoriques mais surtout par des méthodes numériques, il est possible de construire des solutions

approchées dans des situations non-idéalisées. Cette approche nous permet d'étudier des cas plus réalistes, mais nécessitera souvent l'utilisation d'un ordinateur et cela rend la physique moins palpable.

Aujourd'hui les deux approches restent d'actualité et ont chacun leur place. A mon avis, il est totalement impossible d'ignorer l'une ou l'autre surtout qu'on est accompagnés depuis une vingtaine d'années de puissants calculateurs numériques. Grâce aux ordinateurs, on est capable de résoudre les équations de relativité d'Einstein pour étudier l'évolution du cosmos ou celles de la mécanique des fluides pour étudier le phénomène de la turbulence.

Dans ce polycopier, on focalise sur les méthodes "analytiques" qui conviennent à des études académiques. Cela signifie qu'on passe en revue un ensemble de méthodes pour résoudre des équations différentielles suffisamment simples. On commence par les équations différentielles ordinaires (EDO's dans la suite), pour aller vers les systèmes d'équations différentielles ordinaires (Systèmes d'EDO's dans la suite), pour terminer avec les équations différentielles partielles (EDP dans la suite). Pour rédiger ce poly, je me suis pour la plupart inspiré d'expériences personnelles et de cours divers trouvés sur le web. Le livre

"Higher Mathematics for Physics and Engineering", H. Shima & T. Nakayama, 2010, Springer

m'a été particulièrement utile pour démarrer le cours. Ce livre est assez cher à l'achat et je ne vous conseille pas forcément son achat. Il est certain que vous pouvez trouver d'excellentes sources d'information dans la bibliothèque.

## 2. EDO's

Dans toute la suite EDO = équation différentielle ordinaire.

### 2.1 Généralités

On considère  $y(x)$  une fonction d'une seule variable  $x$ . On utilisera des notations diverses pour les dérivées

$$y' = \dot{y} = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots, \quad y^{(p)}(x) = \frac{d^p y}{dx^p} \quad (2.1)$$

★ **EDO d'ordre  $n$ .** Une EDO d'ordre  $n$  est une équation

$$F[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0 \quad (2.2)$$

qui est satisfaite par une fonction  $y(x)$  et ses dérivées  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$  par rapport à **une seule** variable  $x \in \mathbb{R}$ . ■

Le mot **ordinaire** traduit que la fonction  $y(x)$  ne dépend que d'une seule variable. L'**ordre**  $n$  de l'équation différentielle est fixé par la plus haute dérivée présente dans l'équation. Le plus souvent, on étudiera des équations sous la forme

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)] \quad (2.3)$$

Cette classe d'EDO's est moins générale que la classe des EDO's (2.2).

★ **EDO autonome.** Une EDO autonome est de la forme

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.4)$$

La variable  $x$  n'apparaît pas explicitement dans l'EDO. ■

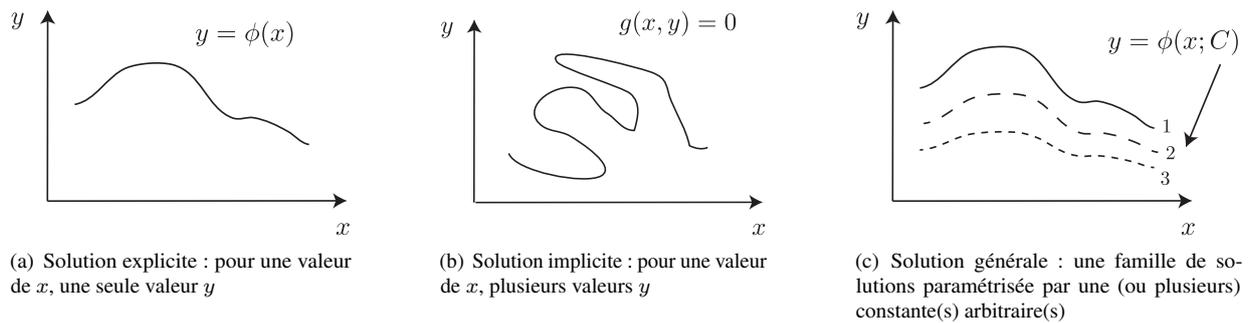


FIGURE 2.1 – Solution explicite, implicite &amp; générale.

Lorsqu'on parlera de solutions, on distinguera solutions explicites et implicites, particulières et générales.

★ **Solution explicite.** Une fonction  $y = \phi(x)$  définie sur un intervalle  $I$  est une solution explicite d'une EDO (2.2) si

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}] = 0 \quad (2.5)$$

pour tout  $x \in I$ . ■

★ **Solution implicite.** Une relation  $g(x, y) = 0$  est une solution implicite d'une EDO (2.2) sur un intervalle  $I$ ,

(a) s'il existe une fonction  $\phi(x)$  définie sur  $I$  telle que  $g(x, \phi(x)) = 0$

(b) si

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)] = 0 \quad (2.6)$$

pour tout  $x \in I$ . ■

Comme illustré dans la figure 2.1-(a) et (b), une solution explicite est toujours mono-value (pour chaque  $x$ , un  $y$ ). Une solution implicite peut par contre être multi-value (pour certains  $x$ , plusieurs  $y$ ).

★ **Solution particulière.** Une solution particulière ne dépend pas de constantes arbitraires. ■

★ **Solution générale.** Une solution générale d'une EDO dépend de une ou plusieurs constantes arbitraires  $C_i, i = 1, \dots, n$  et permet en les variant d'obtenir l'ensemble des fonctions qui satisfont l'équation différentielle. ■

A l'exception des EDO linéaires, il est difficile de savoir si on a à faire avec une solution générale oui ou non.

## 2.2 EDO's linéaires

### 2.2.1 Définition

Une EDO (2.2) est **linéaire**, si la fonction  $F$  est linéaire dans toutes les variables  $y$  et ses dérivées. C'est à dire que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  et toutes les fonctions  $y(x)$  et  $z(x)$  :

$$\begin{aligned} F[x, ay(x) + bz(x), ay'(x) + bz'(x), \dots, ay^{(n)}(x) + bz^{(n)}(x)] \\ = aF[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] + bF[x, z(x), z'(x), \dots, z^{(n)}(x)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

On peut se convaincre qu'une EDO linéaire d'ordre  $n$  prendra forcément la forme suivante

★ **EDO linéaire.** Une EDO linéaire d'ordre  $n$  peut toujours se mettre sous la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (2.8)$$

avec  $a_i(x)$  des fonctions arbitraires. Si  $b(x) \neq 0$  on dit que l'équation est **inhomogène**. Lorsque  $b(x) = 0$  il s'agit d'une équation **homogène**. Si dans l'équation (2.8), les fonctions  $a_i(x) = a_i$  sont constantes, on parle d'une **EDO linéaire à coefficients constants**. ■

### 2.2.2 Principe de superposition

La linéarité d'une EDO permet d'appliquer le **principe de superposition** : si  $\phi(x)$  et  $\psi(x)$  sont deux solutions de l'EDO linéaire homogène, alors toute combinaison linéaire de  $a\phi(x) + b\psi(x)$  restera une solution homogène. Ce principe a la conséquence suivante.

★ **Solution générale d'une EDO linéaire.** La solution générale d'une EDO linéaire d'ordre  $n$  est de la forme :

$$y(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x)}_{y_h(x)} + y_p(x) \quad (2.9)$$

La solution homogène  $y_h(x)$  est une superposition arbitraire de  $n$  solutions linéairement indépendantes  $\phi_i(x)$ ,  $\{i = 1, 2, \dots, n\}$  de l'EDO homogène. Ces fonctions satisfont donc  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\phi_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\phi_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\phi_i'(x) + a_0(x)\phi_i(x) = 0 \quad (2.10)$$

et

$$\sum_{i=1}^n D_i \phi_i(x) = 0 \Leftrightarrow D_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.11)$$

La **solution particulière** sera **une seule** solution de l'EDO complet :

$$y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p = b(x) \quad (2.12)$$

Il n'est pas toujours possible de trouver les solutions  $\phi_i(x)$  et  $y_p(x)$  analytiquement.

### 2.2.3 Ordre 1, à coefficient constant

Une EDO linéaire d'ordre 1 à coefficient constant est l'EDO la plus simple qu'on puisse rencontrer

$$\frac{dy}{dx} + ay = b(x) \quad (2.13)$$

Ici  $a$  est constante et  $b(x)$  une fonction quelconque. On peut chercher solutions homogènes et particulières séparément, mais ici il faut mieux faire tout à la fois. Pour trouver la solution, on multiplie cette EDO avec  $e^{ax}$ , on voit alors que

$$\frac{d}{dx} [y e^{ax}] = b(x) e^{ax} \quad (2.14)$$

On intègre par rapport à  $x$ , pour trouver

$$y e^{ax} = C + \int^x b(\tilde{x}) e^{a\tilde{x}} d\tilde{x} \Leftrightarrow y = \underbrace{C e^{-ax}}_{y_h} + \underbrace{e^{-ax} \left[ \int^x b(\tilde{x}) e^{a\tilde{x}} d\tilde{x} \right]}_{y_p} \quad (2.15)$$

On voit bien la séparation en une solution homogène et une solution particulière. La constante arbitraire  $C$  apparaît comme une constante d'intégration.

**Exercice** Utiliser la méthode de ci-dessus pour trouver la solution générale des équations suivantes.

1.  $y' - y = 2x + 1$

Une intégration par partie vous aidera à évaluer l'intégrale. Montrer que la solution particulière se met sous la forme  $y_p = Ax + B$  avec  $A$  et  $B$  à identifier.

2.  $y' + 3y = \cos x$

L'intégrale se calcule en séparant  $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ . Montrer que la solution particulière se met sous la forme  $y_p = A \cos x + B \sin x$  avec  $A$  et  $B$  à identifier.

3.  $y' - \lambda y = e^{\lambda x}$

### 2.2.4 Ordre n, à coefficients constants

Une EDO linéaire d'ordre n à coefficients constants est

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b(x) \quad (2.16)$$

avec  $a_i$  des constantes et  $b(x)$  une fonction quelconque. On cherche la solution générale sous la forme  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  et on détermine d'abord la solution homogène, puis la solution particulière.

#### Solution homogène

L'EDO homogène

$$\left( \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \right) y_h = 0 \quad (2.17)$$

peut être factorisée comme

$$\left( \frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left( \frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) \dots \left( \frac{d}{dx} - \lambda_n \right) y_h = 0 \quad (2.18)$$

Ici les  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$  sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.19)$$

Ce polynôme se trouve directement en injectant  $y(x) = e^{\lambda x}$  dans l'EDO. Pour  $a_i \in \mathbb{R}$ , les racines  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$  seront **réelles où complexe conjuguées par pair** et on suppose pouvoir les calculer dans la suite. On distingue deux cas :

#### 1. Racines simples

Si toutes les racines  $\lambda_i$  sont différentes, la solution de l'EDO sera une superposition arbitraire de fonctions exponentielles :

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i x} \quad (2.20)$$

On remarque immédiatement que chaque terme est solution d'une EDO d'ordre 1 :

$$\left( \frac{d}{dx} - \lambda_j \right) e^{\lambda_j x} = 0 \quad (2.21)$$

que l'on retrouve dans la factorisation ((2.18)).

#### 2. Racines multiples

S'il y a des racines multiples, la partie de la solution associée à ces racines ne sera pas seulement

composée de fonctions exponentielles. Regardons le cas spécifique de l'équation archétype avec une racine double :

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) \underbrace{\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) y(x)}_{= u(x)} = 0 \quad (2.22)$$

Comme la notation le suggère, on résolve cette équation en faisant une étape intermédiaire passant par la fonction  $u(x)$ , solution de

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = C_1 e^{\lambda x} \quad (2.23)$$

Facile. Connaissant  $u(x)$ , nous pouvons résoudre l'équation pour  $y(x)$

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) y(x) = \underbrace{C_1 e^{\lambda x}}_{u(x)} \quad (2.24)$$

Il s'agit cette fois d'une EDO inhomogène linéaire d'ordre 1. On peut utiliser la méthode de la section précédente. On multiplie l'équation par  $e^{\lambda x}$  et on intègre : On

$$e^{\lambda x} \frac{dy}{dx} - \lambda e^{\lambda x} y(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} (e^{\lambda x} y(x)) = C_1 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda x} y(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.25)$$

ce qui donne la solution

$$y(x) = \underbrace{(C_1 x + C_2)}_{\mathcal{P}_1(x)} e^{\lambda x} \quad (2.26)$$

La solution est un polynôme arbitraire d'ordre 1 (noté  $\mathcal{P}_1(x)$  ici) qui multiplie le facteur exponentiel habituel. On généralise aisément à des cas de racines de multiplicités  $k > 2$ , en faisant  $k - 1$  étapes intermédiaires

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^k y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})}_{\mathcal{P}_{k-1}(x)} e^{\lambda x} \quad (2.27)$$

La solution associée à une racine  $\lambda$  de multiplicité  $k$  est un polynôme arbitraire d'ordre  $k - 1$  (noté  $\mathcal{P}_{k-1}(x)$  ici) qui multiplie le facteur exponentiel  $e^{\lambda x}$ .

Il est possible de regrouper les deux cas, racine simple et racine multiple en notant qu'un polynôme arbitraire d'ordre 0 est une constante arbitraire. La solution homogène se laisse toujours écrire sous la forme

$$y_h(x) = \sum_j \mathcal{P}_{k_j-1}(x) e^{\lambda_j x} \quad (2.28)$$

La somme parcourt les différentes valeurs propres  $\lambda_j$  et on note  $k_j$  la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_j$ .

**Exercice** Trouver la solution (homogène) des équations suivantes :

1.  $y'' - 3y + 2y = 0$
2.  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
3.  $\left(\frac{d}{dx} - 4\right)^4 \left(\frac{d}{dx} + 1\right) y(x) = 0$



**Solution particulière**

La recherche d'une solution particulière est assez simple dans quelques cas particuliers où  $b(x)$  est une superposition de fonctions élémentaires de type polynomial, exponentiel ou trigonométrique. On cherche alors la solution particulière comme une superposition de ces mêmes catégories de fonctions.

1. *Polynômial* :  $b(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_px^p$   
On cherche  $y_p(x)$  comme un polynôme du même ordre

$$y_p(x) = D_0 + D_1x + \dots + D_px^p \quad (2.29)$$

Injecté dans l'EDO, on trouvera  $p + 1$  équations algébriques pour  $D_i$  par l'identification (membres de gauche, droite) des coefficients devant les différentes puissances en  $x^i$ . Ces équations peuvent être résolues en cascade :  $D_p \rightarrow D_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow D_0$ .

2. *Somme d'exponentielles* :  $b(x) = \sum_p c_p e^{\alpha_p x}$   
Si  $b(x)$  est composé de exponentielles (ou fonctions hyperboliques), on peut chercher la solution particulière comme

$$y_p(x) = \sum_p D_p e^{\alpha_p x} \quad (2.30)$$

On injecte cette solution dans l'EDO et on trouve des équations algébriques pour  $D_p$  par identification (membres de gauche, droite) des coefficients devant les différentes exponentielles. Cette méthode ne marche pas si l'un des  $\alpha_p$  est égal à un des  $\lambda_j$ .

3. *Somme de fonctions trigonométriques* :  $b(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$   
Ceci est un cas particulier du précédent. On propose la solution particulière comme

$$y_p(x) = D_1 \sin kx + D_2 \cos kx \quad (2.31)$$

Après injection dans l'EDO, on trouve un système d'équations algébriques pour  $D_1$  et  $D_2$ . Cela ne fonctionnera pas si  $\pm ik$  sont parmi les valeurs  $\lambda_i$ .

4. *Combinaison des 3 cas précédents* :  $b(x) = x + \cos 2x + e^{-4x}$   
Il est possible de rencontrer des combinaisons des 3 cas précédents. Pour  $b(x)$  de ci-dessus, on aura

$$y_p(x) = (D_1 + D_2x) + (D_3 \cos 2x + D_4 \sin 2x) + D_5 e^{-4x} \quad (2.32)$$

pourvu que  $\pm i2$  et  $-4$  ne font pas partie des racines  $\lambda_i$  du polynôme caractéristique. Après injection dans l'EDO, on regroupe les fonctions de la même catégorie et cela donnera quelque chose comme

$$(\dots)1 + (\dots)x + (\dots) \cos 2x + (\dots) \sin 2x + (\dots)e^{-4x} = 0 \quad (2.33)$$

Les coefficients devant chacune des fonctions s'annulent séparément car les fonctions  $1, x, \cos 2x, \sin 2x$  et  $e^{-4x}$  sont linéairement indépendantes. Ceci donne donc 5 équations algébriques pour les 5 constantes  $D_i$  à fixer.

Dans le cas d'un  $b(x)$  général, il est moins facile de trouver la solution particulière. Il existe une généralisation de la **méthode de la variation de la constante**, mais pour la mettre en oeuvre il faut récrire l'EDO d'ordre  $n > 1$  comme un système de  $n$  EDO's d'ordre 1 par un processus de réduction d'ordre. Cette méthode sera discutée dans le chapitre suivant.

**Exercice** Appliquer la méthode précédente pour trouver la solution générale des équations suivantes.

1.  $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

2.  $y'' + 4y = \cos kx$  ( On supposera  $k \neq 2$ . Identifier le problème pour  $k = 2$ . )

$$3. y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x} + x$$

### 2.2.5 Ordre 1, à coefficient variable

On peut résoudre formellement toute EDO linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x) \quad (2.34)$$

même avec  $a(x)$  variable. La solution se présente sous la forme  $y = y_h + y_p$  et on calcule solution homogène et particulière séparément.

#### Solution homogène

On commence par trouver la solution homogène. Nous l'écrivons d'abord comme une forme différentielle, regroupant la variable  $y_h$  d'un côté et la variable  $x$  de l'autre, puis nous l'intégrons

$$\frac{dy_h}{y_h} = -a(x) dx \Rightarrow \ln y_h = - \int^x a(\tilde{x}) d\tilde{x} + \tilde{C} \Rightarrow y_h = C e^{-\int^x a(\tilde{x}) d\tilde{x}} \quad (2.35)$$

Ici  $C = e^{\tilde{C}}$  sera la constante arbitraire. La fonction primitive peut être difficile, voir impossible à calculer analytiquement.

#### Solution particulière

On utilise la **méthode de la variation de la constante**. La solution particulière est cherchée comme

$$y_p = A(x) y_h(x) \quad (2.36)$$

avec  $A(x)$  une fonction à déterminer. On comprend donc le choix du nom de la méthode : la constante  $C$  de la solution homogène sera remplacée par une fonction  $A(x)$ , lors de la recherche de la solution particulière. En injectant cette proposition dans l'EDO du départ, on obtient

$$\frac{dA(x)}{dx} y_h(x) + A(x) \underbrace{\left( \frac{dy_h}{dx} + a(x) y_h \right)}_{= 0} = b(x) \quad (2.37)$$

La partie entre parenthèses disparaît, car la solution homogène satisfait le problème homogène. En conséquence il faut intégrer :

$$dA = \frac{b(x)}{y_h(x)} dx \Rightarrow A(x) = \int^x \frac{b(\tilde{x})}{y_h(\tilde{x})} d\tilde{x} + \underbrace{\tilde{C}}_{=0} \quad (2.38)$$

La constante arbitraire  $\tilde{C}$ , ne joue ici aucun rôle, car elle reflète que le choix  $A(x) = \tilde{C}$  permet de retrouver la solution homogène du problème. On peut donc mettre  $\tilde{C} = 0$  ici. La solution particulière sera

$$y_p = \left( \int^x \frac{b(\tilde{x})}{y_h(\tilde{x})} d\tilde{x} \right) y_h(x) \quad (2.39)$$

Le calcul de cette fonction primitive peut être difficile.

**Exercice** Trouver la solution de  $y' + xy = x$ . Montrer que la méthode de la variation de la constante permet de trouver la solution particulière  $y_p = 1$  que l'on vérifie aisément. ■

### 2.2.6 Ordre 2, équation de Bessel

L'équation de Bessel est une EDO linéaire (homogène) à coefficients non-constants d'ordre 2, qui apparaît systématiquement dans des problèmes à symétrie cylindrique :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{m^2}{x^2} y + y = 0 \quad (2.40)$$

Ici on se limitera au cas courant  $m \in \mathbb{N}$  entier et positif. Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel du premier et deuxième type, notées  $J_m(x)$  et  $Y_m(x)$ . La solution générale s'écrit comme une superposition

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x) \quad (2.41)$$

avec  $C_1, C_2$  deux constantes arbitraires. Il s'agit de fonctions dites "spéciales" qui font partie des fonctions élémentaires et dont on connaît de nombreuses propriétés. Pour définir ces fonctions de Bessel, on a besoin d'introduire la fonction Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.42)$$

pour tout argument  $z \in \mathbb{C}$ . Le calcul direct de cette intégrale pour  $z = 1$  donne  $\Gamma(1) = 1$ . Par intégration par partie on montre que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Suite à ces propriétés, on peut comprendre que la fonction Gamma généralise la fonction "factoriel" à des nombres  $z \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}$ , on a en effet

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\dots(1)\Gamma(1) = \alpha! \quad (2.43)$$

La fonction de Bessel de premier type  $J_m(x)$  se définit comme

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(m+n+1)n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(m+2n)} \quad (2.44)$$

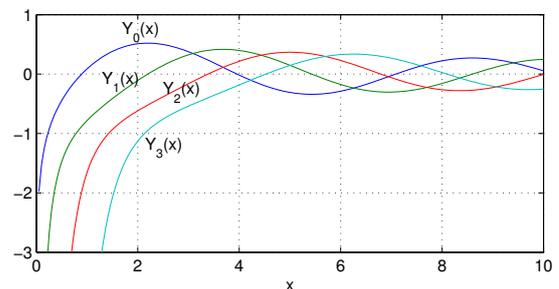
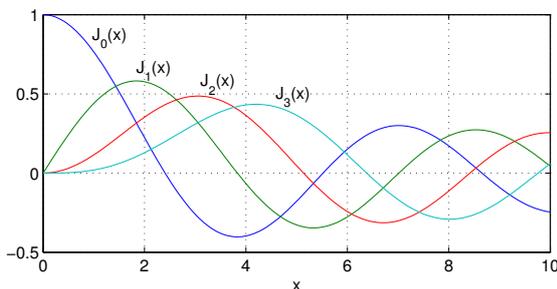
Pour  $m$  non-entier, la fonction  $J_{-m}(x)$  sera une deuxième solution de l'ED de Bessel, linéairement indépendante de  $J_m(x)$ . Pour  $m$  entier, ceci n'est plus le cas car on montre que  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ . Ainsi la définition de la fonction de Bessel de deuxième type  $Y_m(x)$  semble un peu étonnante :

$$Y_m(x) = \lim_{\mu \rightarrow m} \frac{J_\mu(x) - (-1)^\mu J_{-\mu}(x)}{\mu - m} \quad (2.45)$$

pour tout  $m$  entier. Dans la figure de ci-dessous, on montre ces fonctions de Bessel de premier et deuxième type et pour différents  $m$  entiers et positifs. On voit des oscillations qui décroissent en amplitude pour  $x$  croissant. Il est utile de se souvenir du comportement à l'origine  $x = 0$  :

$$J_m(0) = \begin{cases} 1 & , \quad m = 0 \\ 0 & , \quad m \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} Y_m(x) = -\infty \quad (2.46)$$

La fonction  $Y_m(x)$  est toujours singulière pour  $x \rightarrow 0$ .



Les fonctions de Bessel satisfont des relations de récurrence

$$J'_m(x) - \frac{m}{x} J_m(x) = -J_{m+1}(x) \quad , \quad J'_m(x) + \frac{m}{x} J_m(x) = J_{m-1}(x) \quad (2.47)$$

et pareil pour  $Y_m(x)$ .

**Exercice** Manipuler les relations de récurrence pour démontrer les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}\int^x x^{m+1} J_m(x) dx &= x^{m+1} J_{m+1}(x) \\ \int^x x^{-m+1} J_m(x) dx &= -x^{-m+1} J_{m-1}(x)\end{aligned}\quad (2.48)$$

### 2.2.7 Ordre 2, ED pour d'autres fonctions spéciales

De la même manière, le mariage de physique et symétrie nous a fait découvrir et introduire de diverses fonctions spéciales. Nous pouvons citer :

- Les fonctions de Bessel modifiées (géométrie cylindrique)
- Les fonctions de Bessel sphériques (ondes électromagnétiques géométrie sphérique)
- Les fonctions de Legendre (harmoniques sphériques)
- Les fonctions d'Hermite (oscillateur harmonique (potentiel  $V(x) = kx^2/2$ ) en mécanique quantique)
- Les polynômes de Laguerre (atome d'hydrogène en mécanique quantique)
- Les polynômes de Chebyshev (méthodes numériques)
- Les fonctions d'Airy (potentiel  $V(x) = kx$ ) en mécanique quantique)
- ...

Toutes ces fonctions apparaissent comme des solutions d'une EDO linéaire d'ordre 2 et la probabilité que vous allez rencontrer une de ces fonctions spéciales dans un cours de physique est très grande.

**Exercice** Retrouver sur internet les équations différentielles satisfaites par les fonctions spéciales mentionnées ci-dessus.

## 2.3 EDO's non-linéaires

### 2.3.1 Définition

Une EDO (2.2) est **non-linéaire**, si la fonction  $F$  n'est pas linéaire dans l'argument  $y$  ou ses dérivées. On repère assez facilement une EDO non-linéaire par la présence de puissances ou fonctions arbitraires dans les arguments  $y, y', \dots$ . Sinon, il suffit de vérifier que sa forme dévie de (2.8).

La conséquence importante de la non-linéarité est que le principe de superposition des solutions ne tient plus. Les méthodes de la section précédente ne sont donc pas applicables aux équations non-linéaires.

### 2.3.2 EDO séparable

★ **EDO séparable.** Toute EDO de la forme

$$g(y)y' + f(x) = 0 \quad (2.49)$$

Utilisant la notation en forme différentielles  $dx, dy$ , cette EDO **séparable** peut s'écrire comme

$$f(x) dx + g(y) dy = 0 \quad (2.50)$$

On arrive ici à **séparer un terme en  $x$ , d'un terme en  $y$** . A cause de cette propriété, une équation séparable s'intègre immédiatement

$$\underbrace{\int^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}}_{F(x)} + \underbrace{\int^y g(\tilde{y}) d\tilde{y}}_{G(y)} = C \quad (2.51)$$

La solution générale d'une telle équation est donc

$$F(x) + G(y) = C \quad (2.52)$$

Cette solution sera implicite et il est inutile de tenter d'écrire  $y$  comme une fonction explicite de  $x$  car la fonction inverse  $F^{-1}$  n'est pas forcément unique (exemple  $F = x^2, \Rightarrow x = \pm\sqrt{F}$ ).

**Exercice** Trouver la solution de

1.  $y' \cos y - 2x = 0$  Cette équation a-t-elle une solution réelle pour tout  $x$  ?
2.  $y' + xy^2 = 0$

### 2.3.3 EDO exacte

Toutes les EDO's d'ordre 1 peuvent se récrire comme une forme différentielle

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (2.53)$$

On appelle une EDO exacte, s'il existe une fonction  $\Psi(x, y)$  qui a cette forme différentielle comme différentielle totale. C'est à dire, si

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (2.54)$$

Pourqu'une EDO soit exacte, il sera donc nécessaire que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = g(x, y) \quad (2.55)$$

Comme l'ordre de la dérivation partielle ne compte pas :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \quad (2.56)$$

on écrit **une condition plus pratique permettant de tester l'exactitude** :

$$\text{si } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{EDO (2.53) est exact} \quad (2.57)$$

D'où la définition

★ **EDO exacte.** L'équation différentielle

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (2.58)$$

est exacte s'il existe une fonction  $\Psi(x, y)$ , telle que  $\partial_x \Psi = f$  et  $\partial_y \Psi = g$ . Une condition nécessaire et suffisante est

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (2.59)$$

Sous ces conditions, l'EDO se récrit comme  $d\Psi = 0$  et sa solution générale sera

$$\Psi(x, y) = C \quad (2.60)$$

Pour trouver la solution d'une équation exacte et donc  $\Psi(x, y)$  en pratique, on intègre les équations (2.55) séparément, selon  $x$  et selon  $y$  :

$$\Psi(x, y) = \int^x f(\tilde{x}, y) d\tilde{x} + B(y) \quad (2.61)$$

$$\Psi(x, y) = \int^y g(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + A(x) \quad (2.62)$$

Comme on intègre ici des dérivées partielles, des **fonctions**  $A(x)$  et  $B(y)$  peuvent apparaître comme "constantes d'intégration". Les deux expressions doivent forcément être identiques et en égalisant les deux on trouve les fonctions  $A(x)$ ,  $B(y)$  et donc  $\Psi(x, y)$  à une constante (d'intégration) près.

**Exercice** Montrer que l'EDO

$$(x^2 + 4y^3)y' + 2xy = 0 \quad (2.63)$$

est exacte, puis trouver sa solution générale. ■

### Facteur intégrant d'une EDO non-exacte

La situation précédente d'une équation exacte est très fragile. Donnons un exemple. L'EDO

$$(x y^2 + x)dx + x^2 y dy = 0 \quad , \quad \frac{\partial(x y^2 + x)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} = 2xy \quad (2.64)$$

est exacte, mais si on la divise par  $x$ , elle ne l'est plus :

$$(y^2 + 1)dx + x y dy = 0 \quad , \quad \frac{\partial(y^2 + 1)}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial(x y)}{\partial x} = y \quad (2.65)$$

Plutôt que de voir cette situation comme un désavantage, on peut retourner la logique de 180 degrés. Une EDO non-exacte

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow \text{PAS Exacte!} \quad (2.66)$$

peut le devenir après multiplication avec un facteur intégrant  $M(x, y)$  :

$$M(x, y) f(x, y)dx + M(x, y) g(x, y)dy = 0 \quad , \quad \frac{\partial(Mf)}{\partial y} = \frac{\partial(Mg)}{\partial x} \Rightarrow \text{peut être exacte ?} \quad (2.67)$$

Trouver un facteur intégrant est rarement une chose simple, mais si on en trouve un, l'EDO est résolue. Si le facteur intégrant est une fonction de  $x$  ou de  $y$  seulement, donc  $M = M(x)$  ou  $M = M(y)$ , il y a une procédure systématique qu'on ne détaille pas ici.

### 2.3.4 EDO de Bernouilli

L'EDO de Bernouilli est un exemple d'une EDO non-linéaire qui se ramène à une EDO linéaire par changement de variable  $y \rightarrow u$ . Elle intervient assez souvent en physique non-linéaire, justement parce qu'on connaît sa solution.

★ **EDO de Bernouilli.** Toute EDO de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x)y^k \quad (2.68)$$

avec  $k \neq 1$  et réel. ■

Montrons que cette équation peut être transformée en une EDO linéaire par changement de variable. On divise d'abord l'équation par  $y^k$

$$y^{-k} \frac{dy}{dx} = a(x)y^{1-k} + b(x) \quad (2.69)$$

Puis, on choisit une nouvelle variable  $u(y)$  comme

$$u = y^{1-k} \Rightarrow \frac{du}{dx} = (1-k)y^{-k} \frac{dy}{dx} \quad (2.70)$$

Cela nous permet de récrire l'EDO originale comme

$$\frac{du}{dx} = (1-k)a(x)u + (1-k)b(x) \quad (2.71)$$

dans la variable  $u$ . Cette équation est une EDO linéaire, qui se résolve par les méthodes de la précédente section. Après avoir trouvé la solution, il suffit de remplacer  $u = y^{1-k}$  pour avoir une solution implicite. Souvent, on essaie d'isoler une solution explicite en remplaçant  $y = u^{1/1-k}$  mais en le faisant, on sélectionne toujours une solution parmi plusieurs.

**Exercice** Montrer que la solution de

$$y' = y - y^3 \quad (2.72)$$

est  $y(x) = \pm (1 + Ce^{-2x})^{-1/2}$ . Schématiser cette solution sur un graphe  $x - y$ . ■

## 2.4 Conditions initiales & conditions aux limites

### 2.4.1 Définition

★ **Problème aux conditions initiales.** Tout EDO (2.2) d'ordre  $n \geq 1$  accompagnée d'exactly  $n$  conditions initiales de la forme spécifique

$$CI : y(x_0) = A_0, \quad y'(x_0) = A_1, \quad y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1} \quad (2.73)$$

On fixe la valeur de la fonction et de ses  $n - 1$  premières dérivées **en un unique point initial**  $x_0$ . ■

Un jeu de conditions initiales fixe des contraintes supplémentaires sur la solution, qui typiquement fixent les constantes arbitraires de la solution générale.

★ **Problème aux conditions aux limites.** Tout EDO (2.2) d'ordre  $n \geq 2$  accompagnée d'exactly  $n$  conditions aux limites de la forme

$$CL : y(x_0) = B_0, \quad y(x_1) = B_1, \quad y^{(n-1)}(x_2) - y^{(3)}(x_2) = B_{n-1} \quad (2.74)$$

Des **conditions aux limites** fixent des combinaisons (pas forcément linéaires) de la fonction et/ou ses  $n - 1$  premières dérivées **en plusieurs points**  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . ■

Le plus souvent, on rencontre des conditions aux limites de type Dirichlet et Neuman

$$CL \text{ de type Dirichlet : } y(a) = 0 \quad (2.75)$$

$$CL \text{ de type Neuman : } y'(a) = 0 \quad (2.76)$$

Soit on impose la valeur de la fonction, soit celle de sa dérivée sur un point du domaine.

### 2.4.2 Existence & unicité

Les problèmes aux conditions initiales et les problèmes aux conditions aux limites peuvent avoir une solution ou pas : on parle **d'existence de solutions**. Puis, ce n'est pas parce qu'une solution existe, qu'elle sera **unique**.

#### Problèmes à CI

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne des conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une solution du problème aux conditions initiales

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad CI : y(x_0) = y_0 \quad (2.77)$$

soit unique. Ici  $f$  est arbitraire.

★ **Théorème d'existence, unicité (Cauchy - Lipschitz)**. Le problème aux conditions initiales (2.77) a une solution unique si  $f(x, y)$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $f(x, y)$  est continue sur le rectangle  $\mathcal{R} : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$
2.  $f(x, y)$  est bornée sur le rectangle  $\mathcal{R}$  :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{R}, \exists M \in \mathbb{R} : |f(x, y)| \leq M$$

3.  $f(x, y)$  satisfait une condition de Lipschitz :

$$\forall (x, y), (x, z) \in \mathcal{R}, \exists K \in \mathbb{R} : |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \leq K|y(x) - z(x)|$$

La démonstration du théorème précédent ne sera pas donnée ici, mais il est utile de savoir qu'elle repose sur la méthode de Picard. Supposant que la fonction  $f(x, y)$  est continue sur le rectangle  $\mathcal{R} : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b$  nous écrivons le problème à conditions initiale sous forme intégrale :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tilde{x}, y(\tilde{x})) d\tilde{x} \quad (2.78)$$

La condition initiale est automatiquement satisfaite ici. Cette formule inspire un processus itératif suivant ou on cherche des approximations successives de la solution, notées  $y_0(x), y_1(x), \dots, y_p(x)$  :

$$\begin{aligned} \text{ordre 0 :} & \quad y_0 = y_0 \\ \text{ordre 1 :} & \quad y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x', y_0) dx' \\ \text{ordre 2 :} & \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x', y_1(x)) dx' \\ & \quad \dots \\ & \quad \dots \\ \text{ordre n :} & \quad y_p(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x', y_{p-1}(x')) dx' \end{aligned} \quad (2.79)$$

Intuitivement on comprend que sous certaines conditions ce processus peut résulter dans une convergence vers la bonne solution de l'EDO :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} y_p(x) = y(x) \quad (2.80)$$

Les conditions de convergence de cette série sont exactement celles du théorème d'existence et unicité.

★ **Tester l'existence & l'unicité en pratique.** La condition de Lipschitz sur la fonction  $f(x, y)$  n'est pas pratique à vérifier. Dans la majorité des cas, il suffit que la fonction  $f(x, y)$  soit **lisse** (continue et différentiable par rapport à  $x$  et  $y$ ) dans un voisinage suffisamment petit du point initiale  $(x_0, y_0)$ . ■

### Problèmes à CL

Les conditions d'existence et unicité sont souvent bien moins simples pour des problèmes à CL. Dans l'exemple plus bas on discutera le cas des EDO's linéaires où il est déjà possible de rencontrer des problèmes d'existence et d'unicité.

### 2.4.3 Imposer les CI en pratique

Les conditions initiales permettent de fixer les constantes arbitraires qui figurent dans les solutions générales.

#### EDO's linéaires

On a vu que toute EDO linéaire d'ordre  $n$  admet une solution générale de la forme

$$y(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x)}_{y_h(x)} + y_p(x) \quad (2.81)$$

Supposons donc qu'on connait les  $n$  solutions homogènes indépendantes  $\phi_i(x), i = 1, \dots, n$  ainsi qu'une solution particulière. Seul les  $n$  constantes arbitraires  $C_i, i = 1, \dots, n$  restent à déterminer. En exprimant les conditions initiales, on trouve le système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - y_p(x_0) \\ A_2 - y_p'(x_0) \\ \vdots \\ A_n - y_p^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Ce système d'équations algébriques a une solution unique (la matrice des coefficients est inversible).

**Exercice** On ajoute quelques CI aux EDO's des exercices précédents.

1.  $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$   
 $CI : y(0) = 1, y'(0) = 0$
2.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x} + x$   
 $CI : y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$
3.  $y' + xy = x$   
 $CI : y(0) = 1$

Identifier les solutions uniques. ■

### EDO's non-linéaires

Imposer une CI de la forme  $y(x_0) = y_0$  aux EDO non-linéaires traités plus haut ne pose pas de problème. Pour une EDO séparable la solution générale est de la forme  $F(x) + G(y) = C$ . Il convient de préciser que la solution est satisfait pour  $(x, y) = (x_0, y_0)$ , c.a.d. que  $F(x_0) + G(y_0) = C$ . La solution du problème à CI sera donc

$$F(x) + G(y) = F(x_0) + G(y_0) \quad (2.83)$$

Pour une EDO exacte, la solution générale est de la forme  $\Psi(x, y) = C$  et on doit avoir  $\Psi(x_0, y_0) = C$ . La solution du problème à CI sera donc

$$\Psi(x, y) = \Psi(x_0, y_0) \quad (2.84)$$

dans ce cas. Pour une EDO de Bernoulli, la condition initiale sur  $y$  en impose une sur  $u$ . Si on revient sur une forme explicite de la solution, la condition initiale fixera également la phase (ou le signe).

**Exercice** Ajouter la condition initiale  $y(0) = 1$  à l'EDO exacte  $(x^2 + 4y^3)y' + 2xy = 0$  rencontrée précédemment. ■

### 2.4.4 Imposer les CL en pratique

Le processus est très semblable pour imposer les condition aux limites. A l'aide de la solution générale on écrit les conditions aux limites et cela donne un jeu de  $n$  contraintes sur les constantes arbitraires.

#### EDO linéaires

Comme les CL ont une forme plus générale que les CI, on se limite à un exemple d'une EDO linéaire d'ordre 2 ayant comme solution générale

$$y(x) = C_1 \phi_1(x) + C_2 \phi_2(x) + y_p(x) \quad (2.85)$$

On suppose une CL de type Dirichlet en deux points  $a$  et  $b$  du domaine  $x \in [a, b]$ , c.a.d.

$$CL : y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2.86)$$

En exprimant les condition aux limites, on trouve le système linéaire suivant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi_2(a) \\ \phi_1(b) & \phi_2(b) \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}}_c = \underbrace{\begin{bmatrix} A - y_p(a) \\ B - y_p(b) \end{bmatrix}}_f \quad (2.87)$$

L'existence et l'unicité des solutions dépend intégralement de la matrice  $M$  et du vecteur  $f$ .

#### 1. Une solution unique

Dès que  $\det(M) \neq 0$ , il existe une solution unique, car la matrice  $M^{-1}$  existe.

## 2. Aucune solution

Si  $\det(\mathbf{M}) = 0$  son noyau n'est pas vide. Il peut alors arriver que le vecteur  $\mathbf{f} \neq 0$  est en dehors de l'image de  $\mathbf{M}$  et le problème n'a alors pas de solution. On peut exprimer cette condition de non-existence de solutions comme

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2 \times 1} : \mathbf{M}^\dagger \mathbf{x} = 0, \text{ et }, \mathbf{x}^\dagger \mathbf{f} \neq 0 \quad (2.88)$$

c.a.d.  $\mathbf{f}$  n'est pas orthogonal au noyau de  $\mathbf{M}^\dagger$ .

## 3. Une infinité de solutions

Dans le cas opposé ou  $\det(\mathbf{M}) = 0$  et  $\mathbf{f} \neq 0$  est dans l'image de  $\mathbf{M}$ , c.a.d. lorsque

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2 \times 1} : \mathbf{M}^\dagger \mathbf{x} = 0, \text{ et }, \mathbf{x}^\dagger \mathbf{f} = 0 \quad (2.89)$$

le problème a une infinité de solutions. En effet, il sera toujours possible d'ajouter une solution à un candidat  $\mathbf{c}$ , appartenant au noyau de  $\mathbf{M}$ .

**Exercice** Identifier sous quelles conditions sur  $k$ , le problème  $y'' + k^2 y = 0, \forall x \in [0, L], y(0) = 0, y(L) = 1$  a une solution unique ou aucune solution. ■

## 2.5 Problèmes aux valeurs propres

Les problèmes aux valeurs propres sont des problèmes aux conditions aux limites souvent rencontrés en physique, notamment en mécanique quantique. La plupart de ces problèmes sont d'ordre 2 et de type Sturm-Liouville. Ce type de problème a déjà été mentionné dans la première partie du cours (spectre d'un opérateur).

### 2.5.1 Un exemple simple

On s'intéresse au problème suivant :

$$y'' = -\lambda y \quad (2.90)$$

avec  $x \in [0, L]$  et  $\lambda$  un nombre. La solution homogène de cette EDO est

$$\begin{aligned} y &= D_1 e^{ikx} + D_2 e^{-ikx} \\ &= C \cos kx + D \sin kx \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ici  $k = \sqrt{\lambda}$  et on peut choisir l'une ou l'autre forme de la solution. Si on munit le problème de deux conditions aux limites

$$CL : y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad (2.92)$$

on obtient, en les exprimant, un système algébrique homogène :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos kL & \sin kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Ce système homogène a toujours la solution triviale  $C_1 = C_2 = 0$  et donc  $y = 0$ . Par contre, il peut aussi exister d'autres solutions, si

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kL & \sin kL \end{vmatrix} = \sin kL = 0 \quad (2.94)$$

et donc si

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad y(x) = \psi_n(x) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (2.95)$$

On identifie ici une famille de solutions de dimension infinie mais dénombrable. On remarquera que  $\psi_n(x)$  est une fonction avec  $n - 1$  zéros sur l'intervalle  $]0, L[$  qui exclue les bords.

**Espace de fonctions**

Dans cet exercice, le domaine de l'opérateur différentiel

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (2.96)$$

est celui de l'espace des fonctions  $\mathcal{E}$ , différentiables et carré-intégrables sur l'intervalle  $x \in [0, L]$  et qui satisfont les conditions limites spécifiées :

$$y(x) \in \mathcal{E} : y(x) \in L^2([0, L]), \quad y(0) = y(L) = 0 \quad (2.97)$$

Cet espace est un espace de Hilbert.

**Opérateur auto-adjoint et orthogonalité**

On introduit le produit hermitien "standard" (le complexe conjugué n'est pas important dans cet exemple)

$$\langle f|g \rangle = \int_0^L \bar{f}(x)g(x)dx \quad (2.98)$$

Par intégration par partie, on montre que l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}$  est auto-adjoint pour toute fonction  $f, g \in \mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \langle f|\hat{\mathcal{L}}g \rangle &= \int_0^L \bar{f}(x)(-g''(x))dx \\ &= -\underbrace{[f(x)g'(x)]_0^L}_{=0} + \int_0^L \bar{f}'(x)g'(x)dx \\ &= -\underbrace{[f'(x)g(x)]_0^L}_{=0} + \int_0^L (-\bar{f}''(x))g(x)dx \\ &= \langle \hat{\mathcal{L}}f|g \rangle \end{aligned} \quad (2.99)$$

Les termes de bords disparaissent à cause des conditions aux limites supposées,  $f(0) = g(0) = f(L) = g(L) = 0$ . De ce caractère auto-adjoint découlent un certain nombre de propriétés.

**Orthogonalité des fonctions propres**

La famille des fonctions propres définit une base orthogonale de l'espace des fonctions  $\mathcal{E}$ . On montre l'orthogonalité des fonctions propres par un calcul direct :

$$\langle \psi_n|\psi_m \rangle = D_n D_m \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} D_n^2 \quad (2.100)$$

Suite au  $\delta_{nm}$ , l'intégrale avec deux fonctions propres différentes ( $n \neq m$ ) disparaît. Il est possible de normaliser les fonctions propres, en posant  $D_n = \sqrt{2/L}$ . Dans ce cas

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.101)$$

garantit que

$$\langle \psi_n|\psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.102)$$

pour  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , ce qui exprime l'orthonormalité de la base des fonctions propres.

**Projection sur la base**

L'ensemble des fonctions propres  $\{\psi_i(x), i \in \mathbb{N}_0\}$  est complet pour  $\mathcal{E}$  et cela signifie qu'on peut décomposer toute fonction  $f(x) \in \mathcal{E}$  sur la base en écrivant une expansion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \psi_n(x) \quad (2.103)$$

Les coefficients d'expansion  $c_n$  se calculent comme

$$c_n = \langle \psi_n | f \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dx \quad (2.104)$$

et cela rejoint des notions introduites dans la première partie du cours.

**Exercice** Identifier la famille des fonctions propres normalisées  $\{\psi_i(x), i \in \mathbb{N}_0\}$  et les valeurs propres associées, solution du problème aux valeurs propres

$$y'' = -\lambda y, \quad CL : y(0) = 0, \quad y'(L) = 0 \quad (2.105)$$

Ici  $x \in [0, L]$ . Démontrer l'orthogonalité des fonctions propres vis à vis du produit hermitien  $\langle f | g \rangle$  standard. ■

### 2.5.2 Problèmes aux valeurs propres de Sturm-Liouville

Les trouvailles de l'exemple précédent se généralisent à une très vaste classe de problèmes aux valeurs propres, les problèmes aux valeurs propres de Sturm-Liouville.

#### Définitions

★ **problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville.** Tout problème défini par une EDO de la forme

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad x \in [a, b]$$

et des conditions aux limites de la forme

$$CL : c_1 y(a) + d_1 \frac{dy}{dx}(a) = 0, \quad c_2 y(b) + d_2 \frac{dy}{dx}(b) = 0 \quad (2.106)$$

Nous supposons que  $p(x) > 0$  et  $w(x) > 0$  sont positives (problème **régulier**). On appelle  $w(x)$  la fonction de poids et  $\lambda$  sera la valeur propre. ■

Dans les CL, posées les extrémités  $a$  et  $b$  de l'intervalle de  $x$ , les quantités  $c_i$  et  $d_i$  sont des nombres quelconques. Il est par contre important de noter que ces **CL sont homogènes**, c.a.d. la solution triviale  $y = 0$  existe toujours. Les conditions limites les plus fréquentes sont de type Dirichlet ou Neuman, mais on voit qu'un mix des 2 est admis ici. Il est possible de travailler sur un domaine infini et des conditions de régularité remplacent alors les CL.

On introduit la notation suivante

★ **Opérateur différentiel de Sturm-Liouville.**

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \quad (2.107)$$

Le **domaine** de l'opérateur différentiel sera l'ensemble des fonctions  $\mathcal{E}$  :

$$f(x) \in \mathcal{E} : f \in L^2([a, b]), f \text{ différentiable, } f \text{ satisfait les CL} \quad (2.108)$$

On introduit également deux types de produits hermitiens de fonctions.

★ **Deux produits Hermitiens de fonctions.**

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \bar{f}(x)g(x)dx, \quad \langle f | g \rangle_w = \int_a^b \bar{f}(x)g(x)w(x)dx \quad (2.109)$$

Dans le deuxième produit  $\langle f | g \rangle_w$ , on appelle la fonction  $w(x) > 0$  parfois "la mesure" et c'est pour cette raison qu'on la préfère positive. ■

**Caractère auto-adjoint de l'opérateur Sturm-Liouville**

L'opérateur différentiel de Sturm-Liouville est **un opérateur auto-adjoint**  $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}^\dagger$  si son domaine se limite à  $\mathcal{E}$ . Par deux intégrations par partie on trouve en effet que  $\forall f, g \in \mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{\mathcal{L}}g \rangle &= \int_a^b f \left[ -\frac{d}{dx} \left( p \frac{dg}{dx} \right) + qg \right] dx \\ &= \int_a^b \underbrace{\left[ -\frac{d}{dx} \left( p \frac{df}{dx} \right) + qf \right]}_{\langle \hat{\mathcal{L}}f | g \rangle} g dx + \underbrace{[-p(fg' - gf')]}_{\text{termes de bord}=0} \Big|_a^b \\ &= \langle \hat{\mathcal{L}}f | g \rangle \end{aligned} \quad (2.110)$$

Les termes de bords disparaissent à cause de l'identité de Green.

★ **Identité de Green.** Pour toutes les fonctions différentiables  $u, v \in \mathcal{E}$ ,

$$\left[ -p \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b = 0 \quad (2.111)$$

Pour démontrer cette relation, on part de l'identité de Lagrange

$$u\hat{\mathcal{L}}v - v\hat{\mathcal{L}}u = \frac{d}{dx} \left[ -p \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \quad (2.112)$$

qui se montre facilement en écrivant explicitement l'opérateur de Sturm-Liouville. Si on intègre l'identité de Lagrange sur  $[a, b]$ , on trouve **l'identité de Green** qui ne fait qu'apparaître les valeurs aux bords

$$\int_a^b (u\hat{\mathcal{L}}v - v\hat{\mathcal{L}}u) dx = \left[ -p \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b \quad (2.113)$$

Comme  $u$  et  $v$  satisfont les CL homogènes (2.106), on peut remplacer

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \Big|_a &= -\frac{c_1}{d_1} u(a) & , & & \frac{dv}{dx} \Big|_a &= -\frac{c_1}{d_1} v(a) \\ \frac{du}{dx} \Big|_b &= -\frac{c_2}{d_2} u(b) & , & & \frac{dv}{dx} \Big|_b &= -\frac{c_2}{d_2} v(b) \end{aligned} \quad (2.114)$$

et cela permet de trouver le résultat que (2.113) s'annule.

**Propriétés générales de problèmes aux valeurs propres de Sturm-Liouville**

Pour tout problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville, on démontre quelques propriétés générales. On note  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre associée à  $\psi_n(x)$  la  $n$ -ième fonction propre, solution du problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville.

★ **Propriété 1.** Les valeurs propres  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  sont réelles, dénombrables et ordonnées  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ . Il existe une valeur propre minimale, mais pas une valeur propre maximale. ■

Démontrons que les valeurs propres sont réelles. Par définition

$$\hat{\mathcal{L}}\psi_n = \lambda_n \psi_n w \quad (2.115)$$

Dans toute la suite, on n'écrira plus l'argument ( $x$ ) des fonctions, pour simplifier la notation. Le complexe conjugué de cette relation donne

$$\hat{\mathcal{L}}\bar{\psi}_n = \bar{\lambda}_n \bar{\psi}_n w \quad (2.116)$$

On multiplie (2.115) par  $\bar{\psi}_n$  et (2.116) par  $\psi_n$  et on prend la différence des deux. Le résultat est intégré sur  $[a, b]$ , ce qui donne

$$\int_a^b (\bar{\psi}_n \hat{\mathcal{L}}\psi_n - \psi_n \hat{\mathcal{L}}\bar{\psi}_n) dx = (\lambda_n - \bar{\lambda}_n) \int_a^b \psi_n \bar{\psi}_n w dx \quad (2.117)$$

Comme  $\psi_n$  et  $\bar{\psi}_n$  sont dans le domaine de  $\hat{\mathcal{L}}$ , on peut utiliser l'identité de Green expliquée plus haut afin d'obtenir :

$$0 = (\lambda_n - \bar{\lambda}_n) \int_a^b |\psi_n|^2 w dx \quad (2.118)$$

L'intégrale est forcément positive avec  $w(x) > 0$ , donc nous avons

$$(\lambda_n - \bar{\lambda}_n) = 2i \operatorname{Im}(\lambda_n) = 0 \quad (2.119)$$

Toutes les valeurs propres  $\lambda_n$  sont donc réelles.

★ **Propriété 2.** Pour la valeur propre  $\lambda_n$ , il existe une fonction propre  $\psi_n(x)$  qui a exactement  $(n - 1)$  zéros sur l'intervalle  $]a, b[$ . ■

Sans démonstration

★ **Propriété 3.** Les fonctions propres sont orthogonales vis-à-vis du produit scalaire impliquant la fonction de poids  $w(x)$  :

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_w = \int_a^b \bar{\psi}_n(x) \psi_m(x) w(x) dx = \langle \psi_n, \psi_n \rangle_w \delta_{nm} \quad (2.120)$$

avec  $\delta_{nm}$  le delta Kronecker. Souvent on choisira de normaliser la base des fonctions propres, en fixant  $\langle \psi_n, \psi_n \rangle_w = 1$  mais cela n'est pas nécessaire. ■

Démontrons l'origine de l'orthogonalité des fonctions propres. On considère deux fonctions propres  $\psi_n(x)$  et  $\psi_m(x)$  qui satisfont

$$\hat{\mathcal{L}}\psi_n = \lambda_n \psi_n w \quad , \quad \hat{\mathcal{L}}\psi_m = \lambda_m \psi_m w \quad (2.121)$$

On multiplie respectivement avec  $\psi_m$  et  $\psi_n$ , puis on prend la différence de ces deux équations et puis on intègre sur le domaine. Utilisant l'identité de Green ceci nous amène à

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \psi_n \psi_m w dx \quad (2.122)$$

Si  $m = n$ , cette relation est automatiquement satisfaite, mais si  $n \neq m$  alors l'intégrale doit valoir zéro. Ceci s'interprète donc comme une relation d'orthogonalité.

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle_w = \delta_{nm} \langle \psi_n, \psi_n \rangle_w \quad (2.123)$$

avec  $\delta_{nm}$  le delta Kronecker. Le plus souvent, on normalisera les fonctions propres afin d'avoir  $\langle \psi_m | \psi_m \rangle_w = 1$  plus simplement et alors  $\langle \psi_n | \psi_m \rangle_w = \delta_{nm}$ .

★ **Propriété 4.** L'ensemble des fonctions propres  $\{\psi_n(x), n = 1, 2, \dots\}$  est complet et définit une base de l'espace de Hilbert que constitue le domaine de  $\hat{\mathcal{L}}$ . On peut toujours normaliser les fonctions propres afin d'avoir  $\langle \psi_n | \psi_m \rangle_w = \delta_{mn}$ . La décomposition spectrale de ces fonctions s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \psi_n(x) \quad , \quad c_n = \langle \psi_n | f \rangle_w \quad (2.124)$$

On appelle  $c_n$  coefficient d'expansion, ou coefficient de Fourier généralisé. ■

Pour toute fonction du domaine de  $\hat{\mathcal{L}}$ , nous pouvons écrire la décomposition suivante

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x) \quad (2.125)$$

Pour calculer le coefficient d'expansion  $c_n$ , on multiplie avec  $\psi_n$  et  $w$ , puis on intègre sur le domaine, tout en utilisant la propriété d'orthogonalité. On trouve

$$\langle \psi_n | f \rangle_w = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle_w = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta_{mn} = c_m \quad (2.126)$$

en effet.

### 2.5.3 Exemple 1 : mécanique quantique ondulatoire en 1D

En mécanique quantique, on rencontre l'équation de Schrödinger. Dans une représentation ondulatoire et lorsque le potentiel est constant dans le temps, la fonction d'onde  $\Psi(x, t)$  doit satisfaire

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi \quad (2.127)$$

en 1D. Les états propres sont celles pour lesquelles

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} \quad (2.128)$$

Si on injecte cela dans l'équation, on trouve

$$\underbrace{\hbar\omega}_E \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi \quad (2.129)$$

On appelle  $E = \hbar\omega$  l'énergie de l'état  $\psi$ . Souvent on ajoute à cette équation des conditions limites à l'infinie, type

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi = 0 \quad (2.130)$$

afin d'imposer que la particule reste confinée dans l'espace dans les régions de plus basse énergie potentielle (là où  $V(x)$  est petit). Parfois, on idéalise un potentiel très élevé à un potentiel infiniment grand et alors on rencontre des conditions de type Dirichlet,  $\psi(0) = \psi(L) = 0$ , par exemple pour un puit de potentiel rectangulaire. Tout ceci pour dire que l'équation de Schrödinger a une structure de type Sturm-Liouville avec

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (2.131)$$

l'opérateur Hamiltonien et  $p(x) = \hbar^2/2m$ ,  $q(x) = V(x)$  et  $w(x) = 1$ . Il existe donc une famille infinie et dénombrable de fonctions propres  $\psi_n$ , ayant chacun leur énergie propre  $E_n$ . L'état fondamental  $\psi_1$  a l'énergie la plus basse  $E_1$  et par construction  $E_1 < E_2 < E_3 < \dots$ . Par définition, il est possible de normaliser les fonctions propres telles que

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.132)$$

et ces fonctions propres font une base complète. La fonction d'onde générale peut être décomposée sur cette base, c.a.d.

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t) \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (2.133)$$

### 2.5.4 Exemple 2 : ondes sur une corde élastique

Une déviation verticale d'une corde élastique  $H(x, t)$  est solution de l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (2.134)$$

avec  $c$  la vitesse d'onde. Souvent on tient cette corde par les bords, c.a.d.  $H(0, t) = H(L, t) = 0$  pour une corde de longueur  $L$  qu'on imagine sur l'intervalle  $x \in [0, L]$ . Les ondes stationnaires sont des solutions de la forme

$$H(x, t) = h(x) \cos(\omega t + \chi) \quad (2.135)$$

et  $h(x)$  doit alors être solution de

$$\frac{\omega^2}{c^2} h = -\frac{d^2 h}{dx^2}, \quad CL : h(0) = h(L) = 0 \quad (2.136)$$

Si on remplace  $\omega^2/c^2 = \lambda^2$  on voit que notre exemple simple du début de la section, correspond à ce problème aux valeurs propres. Grâce à cela (cf. TD), on peut écrire l'évolution spatio-temporelle d'une onde générale qui existe sur la corde élastique. Comme en mécanique quantique, les fonctions propres définissent une base sur laquelle on peut écrire la solution générale.

### 2.5.5 Exemple 3 : les orbitaux s de l'atome d'hydrogène

De nouveau en mécanique quantique, un exercice classique consiste en l'identification des états propres électroniques de l'atome hydrogène. Dans ce contexte, on suit l'état de l'électron à l'aide d'une fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  ou  $\vec{r}$  est le vecteur position par rapport à l'origine (le noyau). L'équation de Schrödinger est alors

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi \quad (2.137)$$

Si on suppose un état propre à la symétrie sphérique, ce qui est le cas des orbitaux s, on cherche

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(r) e^{-i\omega t} \quad (2.138)$$

avec  $r$  le rayon sphérique. Cela donne avec  $E = \hbar\omega$  le problème aux valeurs propres

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi \quad (2.139)$$

Pour mettre cela sous une forme Sturm-Liouville, il convient de multiplier avec  $r^2$

$$E\psi r^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_0} \psi \quad (2.140)$$

et cela permet d'identifier  $\lambda = E$ ,  $w(r) = r^2$ ,  $p(r) = \frac{\hbar^2 r^2}{2m}$  et  $q(r) = -e^2 r / 4\pi\epsilon_0$ . Les solutions de ce problème s'expriment à l'aide des fonctions de Laguerre qui sont des fonctions spéciales brièvement discutées dans la première partie du cours. Les états électroniques à symétrie sphérique, les orbitaux s, ne sont pas les seuls états électroniques possibles. Il en existe d'autres et pour les trouver il faut traiter l'équation de Schrödinger comme une équation différentielle partielle en 3D.



## 3. Systèmes d'EDO's

Dans toute la suite systèmes d'EDO's = systèmes d'équations différentielles ordinaires.

### 3.1 Généralités

★ **Système EDO d'ordre n.** Un système d'EDO d'ordre  $n$  est un ensemble de  $m$  équations

$$\begin{aligned} F_1[x, y_1(x), \dots, y_1^{(n)}(x), \dots, y_m(x), \dots, y_m^{(n)}(x)] &= 0 \\ \dots & \\ F_m[x, y_1(x), \dots, y_1^{(n)}(x), \dots, y_m(x), \dots, y_m^{(n)}(x)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

qui sont à satisfaire par un ensemble de  $m$  fonctions  $y_i(x)$  et leurs dérivées  $y_i'(x), y_i''(x), \dots, y_i^{(n)}(x)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  par rapport à **une seule** variable  $x$ . ■

L'**ordre** du système est fixé par la plus haute dérivée présente dans les équations. Si on souhaite résoudre un système EDO's, il faut résoudre les  $m$  équations d'un système à la fois et pas séparément.

Parfois il est possible d'éliminer le nombre de variables pour trouver une ou des EDO's d'ordre supérieur. On parle du **découplage** du système. Ceci n'est par contre pas toujours possible ou facile.

**Exercice** On dispose d'un système d'EDO's de la forme

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 + \cos x \end{cases} \quad (3.2)$$

Éliminer les variables  $y_1$  puis  $y_2$  en dérivant la troisième équation deux fois. Trouver l'EDO d'ordre 3 que  $y_3$  doit satisfaire. ■

**Exercice** Tenter de faire le même exercice mais cette fois avec

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 - y_1 \\ y_2' &= y_3 + y_1 \\ y_3' &= -y_1 + y_2 \cos x \end{cases} \quad (3.3)$$

Ca devrait être moins facile. ■

A l'opposé du découplage est le processus de réduction d'ordre. L'idée est d'introduire plus de variables pour terminer avec un système d'EDO's plus grand mais d'ordre moins élevé. Cela sera bien moins difficile car on a les certitudes suivantes.

★ **Réduction d'ordre.**

1. Toute EDO d'ordre  $n$ , peut s'écrire comme un système de  $n$  EDO's d'ordre 1.
  2. Tout système de  $m$  EDO's d'ordre  $n$ , peut s'écrire comme un système de  $nm$  EDO's du premier ordre.
- 

Donnons un exemple de l'opération à suivre sur une EDO générale d'ordre  $n$

$$y^{(n)} = f[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}] \quad (3.4)$$

On introduit  $n$  nouvelles variables  $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Celles-ci devront satisfaire le système d'EDO suivant

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f[x, y_1, y_2, \dots, y_n] \end{cases}$$

L'ordre des dérivées est réduit de  $n$  à 1, mais le nombre de variables a été accru de 1 à  $n$ .

**Exercice** La position  $\vec{r}(t)$  d'une masse  $m$  ponctuelle peut varier au cours du temps sous l'influence d'une force  $\vec{F}$ , suivant le principe fondamental de la dynamique

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (3.5)$$

On prend en compte que dans le cas général, la force  $\vec{F}$  peut varier au cours du temps  $t$  et selon la position  $\vec{r}$  et la vitesse  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  de la masse. Si on souhaite utiliser des coordonnées Cartésiennes pour suivre la masse, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \\ \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= F_x(\dots)\vec{e}_x + F_y(\dots)\vec{e}_y + F_z(\dots)\vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

Commencer dans un premier temps par écrire le système d'EDO's d'ordre 2 pour les trois variables  $x(t), y(t), z(t)$ . Dans un deuxième temps, réécrire ce système comme un système d'EDO's d'ordre 1, pour les six variables  $x(t), y(t), z(t)$  et  $u(t), v(t), w(t)$  les composantes du vecteur vitesse. ■

**R** Une étape de réduction d'ordre est nécessaire si on veut résoudre le problème à l'aide d'un ordinateur utilisant des méthodes d'intégration numériques (schéma d'Euler, Runge-Kutta, ...)

Dans la suite du chapitre, nous allons étudier des systèmes d'EDO's d'ordre 1, qui peuvent se mettre dans la forme canonique

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  et  $\mathbf{F} = [f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_n(\dots)]^T$  sont des vecteurs colonnes. Parfois on parle de système dynamique avec  $\mathbf{Y}(x)$  le vecteur d'état qui varie dans son espace de phase. On se limite également à des problèmes aux conditions initiales, ce qui signifie qu'on ajoute les  $n$  contraintes

$$\text{CI} : \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 \quad (3.8)$$

dans un même point  $x_0$ . On peut étendre le théorème de Cauchy-Lipschitz vers ce type de systèmes d'EDOs muni d'une condition initiale.

## 3.2 Systèmes linéaires

### 3.2.1 Définition

Un système de  $n$  EDO's du premier ordre (3.7) est linéaire, si  $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$  est une fonction linéaire dans l'argument vectoriel  $\mathbf{Y}$ , c.a.d. :

$$\forall \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \forall a, b : \mathbf{F}(x, a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) = a\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) + b\mathbf{F}(x, \mathbf{Z}) \quad (3.9)$$

Sinon, le système est **non-linéaire**.

★ **Système linéaire (d'EDO's).** Tout système linéaire peut s'écrire comme

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \quad (3.10)$$

soit

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{B}(x) \quad (3.11)$$

en format vectoriel. ■

Ici on note  $\mathbf{A}(x)$  une fonction matricielle avec  $n \times n$  composantes. Si  $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$  ne dépend pas de  $x$ , on parle d'un **système linéaire à coefficients constants**. Si le vecteur colonne  $\mathbf{B}(x) \neq \mathbf{0}$  le système est **inhomogène**. Si  $\mathbf{B}(x) = \mathbf{0}$ , le système est **homogène**.

### 3.2.2 Principe de superposition

La linéarité d'un système d'EDO permet d'appliquer le **principe de superposition** : si  $\mathbf{Y}(x)$  et  $\mathbf{Z}(x)$  sont des fonctions vectorielles solutions du système d'EDO's homogène, alors toute combinaison linéaire  $a\mathbf{Y}(x) + b\mathbf{Z}(x)$  restera une solution homogène.

La conséquence est que pour tout système linéaire de  $n$  EDO's d'ordre 1, on peut proposer la solution générale sous forme d'une superposition :

$$\mathbf{Y}(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i \Phi_i(x)}_{\mathbf{Y}_h(x)} + \mathbf{Y}_p(x) \quad (3.12)$$

La **solution homogène**  $\mathbf{Y}_h(x)$  est composée d'une combinaison linéaire arbitraire de  $n$  fonctions vectorielles  $\Phi_i(x)$ ,  $\{i = 1, 2, \dots, n\}$  linéairement indépendantes. Ces fonctions satisfont donc

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \frac{d\Phi_i(x)}{dx} = \mathbf{A}(x) \Phi_i(x) \quad (3.13)$$

et

$$\sum_{i=1}^n D_i \Phi_i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.14)$$

La **solution particulière** sera **une seule** solution du système d'EDO's complet :

$$\frac{dY_p(x)}{dx} = A(x) Y_p(x) + B(x) \quad (3.15)$$

On vérifie aisément que la solution générale (3.12) satisfait (3.11), quelque soient les valeurs des constantes arbitraires  $C_i, \{i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Pour une matrice  $A(x)$  générale, on ne dispose pas d'une méthode analytique pour trouver la solution  $Y(x)$ , mais le principe de superposition et les précédentes affirmations sur l'existence d'une base de solutions homogènes  $\Phi_i(x), i = 1, 2, \dots, n$  tiennent. On considèrera seulement des systèmes linéaires à coefficients constants dans la suite de cette section.

### 3.2.3 Systèmes linéaires à coefficients constants

On explique maintenant la méthode pour trouver la solution unique d'un problème

$$\frac{dY}{dx} = A Y + B(x) \quad , \quad CI : Y(x_0) = Y_0 \quad (3.16)$$

avec  $A$  une matrice constante. D'abord on trouve la solution homogène  $Y_h$ , puis la solution particulière  $Y_p$  et à la fin on fixe les constantes arbitraires afin de faire satisfaire la condition initiale.

**Trouver la solution homogène  $Y_h$**

On trouve d'abord la solution homogène  $Y_h(x)$ , c.a.d. la solution générale de

$$\frac{dY_h(x)}{dx} = A Y_h(x) \quad (3.17)$$

avec  $A$  donc une matrice constante. La méthode générale passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $Ax$ , mais pour des matrices diagonalisables, il existe une méthode plus simple passant par un calcul des valeurs et des vecteurs propres de la matrice  $A$ .

#### 1. Méthode valeurs/vecteurs propres : pour les matrices $A$ diagonalisables

Une matrice  $A$  diagonalisable est une matrice dont les vecteurs propres forme une base pour l'espace vectoriel des solutions homogènes. On rappelle que les  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont calculées comme les racines (complexes) du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.18)$$

et que les  $n$  vecteurs propres  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , sont des vecteurs colonnes solution du système algébrique

$$(A - \lambda_i I) Q_i = 0 \quad (3.19)$$

Ce système n'est jamais de rang plein et il faut le résoudre pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  séparément. Un vecteur propre est toujours déterminé à une constante multiplicative près (parfois on normalise les vecteurs propres). De différents vecteurs propres sont linéairement indépendants toujours.

On peut maintenant vérifier que les solutions homogènes recherchées sont tout simplement les fonctions vectorielles

$$\Phi_i(x) = Q_i e^{\lambda_i x} \quad (3.20)$$

pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , c.a.d. le produit du vecteur propre et d'un facteur exponentiel. Injectées dans le système linéaire homogène (3.17), on trouve en effet que

$$\frac{d}{dx} (Q_i e^{\lambda_i x}) = \lambda_i Q_i e^{\lambda_i x} = A Q_i e^{\lambda_i x} \quad (3.21)$$

et cela montre que  $\mathbf{Q}_i e^{\lambda_i x}$  est une solution homogène. L'indépendance linéaire des vecteurs propres  $\mathbf{Q}_i$  implique l'indépendance linéaire des fonctions vectorielles  $\Phi_i(x) = \mathbf{Q}_i e^{\lambda_i x}$ . En résumé, il suffit donc de calculer valeurs et vecteurs propres, afin de pouvoir écrire la solution homogène comme

$$\mathbf{Y}_h(x) = C_1 \mathbf{Q}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{Q}_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \mathbf{Q}_n e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{Q}_i e^{\lambda_i x} \quad (3.22)$$

Si on organise les vecteurs propres et les fonctions exponentielles dans les colonnes d'une matrice

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} q_{1,1}e^{\lambda_1 x} & q_{2,1}e^{\lambda_2 x} & \dots & q_{n,1}e^{\lambda_n x} \\ q_{1,2}e^{\lambda_1 x} & q_{2,2}e^{\lambda_2 x} & \dots & q_{n,2}e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1,n}e^{\lambda_1 x} & q_{2,n}e^{\lambda_2 x} & \dots & q_{n,n}e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{Q}_1 e^{\lambda_1 x}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{Q}_2 e^{\lambda_2 x}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{Q}_n e^{\lambda_n x}}$

on crée ce que l'on appelle la matrice d'un système fondamental de solutions. Suite à l'indépendance linéaire des solutions, cette matrice est toujours inversible :  $\mathbf{M}^{-1}(x)$  existe donc pour tout  $x$ .

**Exercice** (valeurs propres réelles) Trouver la solution du système linéaire suivant

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Ici valeurs et vecteurs propres peuvent s'exprimer uniquement avec des valeurs entières. Etudier quelle partie de la solution domine pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . Faire une figure qui affiche quelques trajectoires (hyperboliques) de la solution dans le plan de phase  $y_1 - y_2$ . ■

**Exercice** (valeurs propres imaginaires) Trouver la solution du système linéaire suivant

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Appliquant la méthode de ci-dessus. Montrer qu'on peut redéfinir les constantes arbitraires ( $C_1, C_2$ ) afin d'obtenir une solution sous forme réelle

$$\mathbf{Y}(x) = C \begin{bmatrix} \cos(x + \chi) \\ -\sin(x + \chi) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Faire une figure qui affiche quelques trajectoires (elliptiques) de la solution dans le plan de phase  $y_1 - y_2$ . ■

**Exercice** (valeurs propres complexes) Trouver la solution du système linéaire suivant

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ . Mettre la solution sous forme réelle et refaire une figure qui affiche quelques trajectoires (spiraux) de la solution dans le plan de phase  $y_1 - y_2$ . Si on suppose que  $a > 0$ , dans quel sens va évoluer la dynamique pour  $x$  croissant. ■

## 2. Méthode générale : calculer l'exponentielle de matrice

Pas toutes les matrices sont diagonalisables et pour ces matrices, on peut utiliser une autre méthode qui passe par l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}x$ . On définit

$$\exp(\mathbf{A}x) = \mathbf{I} + \mathbf{A}x + \mathbf{A} \mathbf{A} \frac{x^2}{2!} + \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A} \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}x)^p}{p!} \quad (3.28)$$

$I$  est la matrice identité de taille  $n \times n$  et les produits  $\mathbf{A}\mathbf{A} \dots \mathbf{A}$  sont des produits matriciels en non des produits ordinaires ! On peut dériver cette expression par rapport à  $x$ , pour trouver

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\exp(\mathbf{A}x)) &= \mathbf{0} + \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{A} \frac{2x}{2!} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \frac{3x^2}{3!} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= \mathbf{A} \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}x + \mathbf{A}\mathbf{A} \frac{x^2}{2!} + \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A} \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}x) = \exp(\mathbf{A}x)\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si on compare avec le système (3.17), on reconnaît immédiatement que  $\exp(\mathbf{A}x)$  semble résoudre le même système que  $\mathbf{Y}_h$ . Supposons que l'on arrive à calculer cette exponentielle de matrice, on pourra noter

$$\exp(\mathbf{A}x) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) & \dots & \phi_{1n}(x) \\ \phi_{21}(x) & \phi_{22}(x) & \dots & \phi_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\phi_{n1}(x)}_{\Phi_1(x)} & \underbrace{\phi_{n2}(x)}_{\Phi_2(x)} & \dots & \underbrace{\phi_{nn}(x)}_{\Phi_n(x)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Ainsi on reconnaît que les  $n$  colonnes forment un jeu de solutions  $\Phi_i(x)$ ,  $\{i = 1, 2, \dots, n\}$  linéairement indépendantes. En effet, il suffit de considérer eq. (3.29) colonne par colonne, afin de reconnaître que chaque colonne est une solution du problème homogène. L'indépendance linéaire des fonctions vectorielles  $\Phi_i(x)$  est d'ailleurs toujours assurée car la matrice  $\exp(\mathbf{A}x)$  est inversible  $\forall x$  car

$$(\exp(\mathbf{A}x))^{-1} = \exp(-\mathbf{A}x) \quad (3.31)$$

Cette relation a été montrée dans la première partie du cours (TD). En conclusion, la solution homogène peut aussi s'écrire comme une superposition arbitraire des colonnes de  $\exp(\mathbf{A}x)$  :

$$\mathbf{Y}_h(x) = C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x) + \dots + C_n \Phi_n(x) \quad (3.32)$$

Ici aussi, on peut introduire une matrice d'un système fondamental de solutions  $\mathbf{M}(x)$ , que l'on choisit directement comme  $\mathbf{M}(x) = \exp(\mathbf{A}x)$ .

**R** Si  $\mathbf{A}$  est diagonalisable, la solution homogène (3.32) basée sur l'exponentielle de matrice sera différente de celle basée sur les vecteurs propres (3.22), mais les deux formes de la solution seront néanmoins linéairement dépendantes.

**Exercice** On reconsidère l'exercice précédent

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et les vecteurs propres  $\mathbf{q}_1 = [q_{1,1}, q_{1,2}]^T$ ,  $\mathbf{q}_2 = [q_{2,1}, q_{2,2}]^T$  de la matrice ont déjà été calculé et cela signifie qu'on a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{2,1} \\ q_{1,2} & q_{2,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{2,1} \\ q_{1,2} & q_{2,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \quad (3.34)$$

ou alternativement  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$ . Calculer  $\mathbf{Q}^{-1}$  puis montrer que

$$\exp(\mathbf{A}x) = \mathbf{Q} \exp(\mathbf{\Lambda}x) \mathbf{Q}^{-1} \quad (3.35)$$

Calculer cette exponentielle de matrice. Ecrire une solution homogène alternative utilisant les colonnes de  $\exp(\mathbf{A}x)$ . ■

Le vrai intérêt de la méthode qui passe par l'exponentielle de matrice est qu'on peut aussi considérer des matrices non-diagonalisables. L'exercice suivant donne l'exemple le plus simple d'un tel cas.

**Exercice** On étudie l'exemple le plus simple d'une matrice  $A$  non-diagonalisable :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_Y \quad (3.36)$$

La matrice à donc une valeur propre double  $\lambda = a$  et un des éléments non-diagonaux est non-nulle. Le calcul des vecteurs propres de cette matrice pose problème, car si on cherche abusivement à les calculer, le système  $AQ_i = aQ_i$  sera

$$\begin{cases} a q_{i,1} + q_{i,2} = a q_{i,1} \\ a q_{i,2} = a q_{i,2} \end{cases}$$

Une solution est

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

mais on ne peut pas trouver une deuxième solution  $Q_2$  différente. Face à ce problème d'une analyse clairement pas adaptée à la situation, faisons confiance à notre exponentielle de matrice. Montrer par un calcul direct que

$$\exp(Ax) = \begin{bmatrix} \exp(ax) & \partial(\exp(ax))/\partial a \\ 0 & \exp(ax) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ax} & x e^{ax} \\ 0 & e^{ax} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Ecrire la solution du problème (homogène) à partir de ce résultat. La solution est visualisée dans l'espace de phase  $y_1 - y_2$  en figure (2). On y a choisit  $a = -1$ . ■

**R** De l'analyse des EDO's linéaires d'ordre  $n$  en chapitre 1, on se souvient que les racines  $\lambda$  de multiplicité  $k$  génèrent elles aussi des solutions homogènes de la forme  $\mathcal{P}_{k-1}(x)e^{\lambda x}$  avec  $\mathcal{P}_{k-1}(x)$  un polynôme arbitraire d'ordre  $k-1$ . Comme toute EDO linéaire d'ordre  $n$  peut être écrite comme un système d'ordre 1, on ne doit pas s'étonner que ce type de fonctions, polynômes qui multiplient des exponentielles, intervient aussi dans le contexte présent des systèmes linéaires.

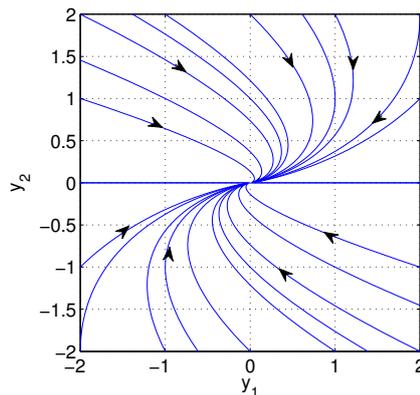


FIGURE 3.1 – Solution du systèmes linéaire non-diagonalisable (3.36) dans le plan de phase, pour  $a = -1$

Il est possible de généraliser ces trouvailles à des matrices  $A$  quelconques. Toutes les matrices, diagonalisables ou pas, peuvent se réduire à la forme de Jordan, c.a.d. il existera toujours une matrice  $P$  inversible et telle que :

$$J = P^{-1} A P \quad , \quad A = P J P^{-1} \quad (3.39)$$

Cette matrice de Jordan  $\mathcal{J}$  est identique à la matrice  $\Lambda$  si  $A$  est diagonalisable, sinon elle est diagonale par bloc, c.a.d. de la forme

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}^{(1)} & & & \\ & \mathcal{J}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{J}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

avec chaque bloc de la forme

$$\mathcal{J}^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

et ayant les dimensions  $k_j \times k_j$  si  $\lambda_j$  est une valeur propre à la multiplicité  $k_j$ . L'exponentielle de cette matrice de Jordan prendra la forme

$$\exp(\mathcal{J}x) = \begin{bmatrix} \exp(\mathcal{J}^{(1)}x) & & & \\ & \exp(\mathcal{J}^{(2)}x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\mathcal{J}^{(m)}x) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

avec

$$\exp(\mathcal{J}^{(j)}x) = e^{\lambda_j x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Au final on aura

$$\exp(\mathbf{A}x) = \mathbf{P} \exp(\mathcal{J}x) \mathbf{P}^{-1} \quad (3.44)$$

et les colonnes de cette matrice contiennent les fonctions vectorielles  $\Phi_i(x)$  qui permettent d'écrire la solution homogène.

Après tous ces calculs, il est utile de rappeler que l'objectif principal de cette sous-section était de trouver la solution homogène  $\mathbf{Y}_h$ . Il est évident que la méthode générale passant par l'exponentielle de matrice est plus lourde à mettre en oeuvre. Dans les exercices, on préférera donc **systématiquement** de pratiquer la méthode passant par les valeurs et vecteurs propres si cela est possible. Il suffit de savoir mettre en application la méthode passant par l'exponentielle de matrice sur des tout petits systèmes.

#### Trouver une solution particulière $\mathbf{Y}_p$

Comme pour les EDO's linéaires, la recherche d'une solution particulière  $\mathbf{Y}_p$  solution de

$$\frac{d\mathbf{Y}_p}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_p + \mathbf{B}(x) \quad (3.45)$$

est assez simple dans quelques cas particuliers où la fonction vectorielle  $\mathbf{B}(x)$  est séparable en une superposition de fonctions élémentaires de type polynomial, exponentiel ou trigonométrique. On cherche la solution particulière comme une superposition de ces mêmes catégories de fonctions.

1. *Polynômial* :  $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_0 + x \mathbf{B}_1 + \dots + x^p \mathbf{B}_p$ 

Commençons par le cas de  $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_0$  constant. Il suffit de chercher la solution particulière  $\mathbf{Y}_p = \mathbf{D}_0$  constant aussi car

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{D}_0}{dx}}_{=0} = \mathbf{A} \mathbf{D}_0 + \mathbf{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{D}_0 = -\mathbf{B}_0 \quad (3.46)$$

Un système linéaire doit donc être résolu pour trouver la solution particulière. Cette méthode s'étend facilement vers des  $\mathbf{B}(x)$  polynomiaux d'ordre  $p$  quelconque. La première étape consiste à bien mettre  $\mathbf{B}(x)$  sous cette forme polynomiale. Donnons un exemple

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} 4x + x^2 \\ 3 - 2x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_0} + x \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} + x^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2} \quad (3.47)$$

On cherchera dans ce problème, la solution particulière comme un polynôme d'exactly le même ordre, c.a.d.

$$\mathbf{Y}_p(x) = \mathbf{D}_0 + x \mathbf{D}_1 + \dots + x^p \mathbf{D}_p \quad (3.48)$$

avec  $\mathbf{D}_i$  des vecteurs colonnes à déterminer. Si on injecte cette solution dans l'EDO pour la solution particulière on trouvera que

$$\underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{D}_p + \mathbf{B}_p)}_{=0} x^p + \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{D}_{p-1} + \mathbf{B}_{p-1} - p \mathbf{D}_p)}_{=0} x^{p-1} + \dots + \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{D}_0 + \mathbf{B}_0 - \mathbf{D}_1)}_{=0} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

Les équations devant les différentes puissances en  $x$ , doivent être satisfaits séparément et on peut les résoudre en cascade, commençant par la puissance la plus élevée

$$\mathbf{D}_p \rightarrow \mathbf{D}_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{D}_0 \quad (3.50)$$

Chaque étape nécessitera de résoudre un système linéaire algébrique.

2. *Somme d'exponentielles* :  $\mathbf{B}(x) = \sum_m \mathbf{B}_m e^{\alpha_m x}$ 

Si dans  $\mathbf{B}(x)$  on trouve des fonctions du type exp, sin, cos, cosh, sinh, exp, on commencera par les séparer en en simples exponentielles. Donnons un exemple concret

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} e^x + 3 \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} e^x + \underbrace{\begin{bmatrix} -3i/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2} e^{ix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3i/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_3} e^{-ix} \quad (3.51)$$

avec donc  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, i, -i)$ . Si ces  $\alpha_m$  sont différents des valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$ , on peut trouver la solution particulière sous une forme

$$\mathbf{Y}_p(x) = \sum_m \mathbf{D}_m e^{\alpha_m x} \quad (3.52)$$

Il suffit d'injecter cette proposition de solution dans l'équation et de regrouper les termes devant chaque fonction exponentielle. Cela donne des équations qui permettent de calculer les vecteurs  $\mathbf{D}_m$  comme les solutions de

$$(\mathbf{A} - \alpha_m \mathbf{I}) \mathbf{D}_m = -\mathbf{B}_m \quad (3.53)$$

Ici encore, il faut donc résoudre des systèmes linéaires algébriques afin de trouver la solution particulière.

3. *Somme de fonctions trigonométriques* :  $\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1 \sin kx + \mathbf{B}_2 \cos kx$ 

Ceci est un cas particulier du précédent. On peut directement proposer la solution particulière comme

$$\mathbf{Y}_p(x) = \mathbf{D}_1 \sin kx + \mathbf{D}_2 \cos kx \quad (3.54)$$

Après injection dans l'EDO, on trouvera deux systèmes d'équations algébriques qui couplent  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$  qu'on peut résoudre. La méthode ne fonctionne pas si  $\pm ik$  sont parmi les valeurs  $\lambda_i$ .

## 4. Combinaison des 3 cas précédents :

Il est possible de rencontrer des combinaisons des 3 cas précédents comme on le verra en TD.

**Exercice** Trouver la solution de

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ e^x \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

**Exercice** Trouver la solution de

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos kx \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

avec  $k \neq 1$

Dans le cas d'un  $\mathbf{B}(x)$  général, on peut généraliser la **méthode de la variation de la constante** au contexte matriciel. Cette méthode est laborieuse et il faut donc préférer les méthodes du haut si  $\mathbf{B}(x)$  est "simple". On suppose que la solution homogène soit connue, c.a.d. que les  $n$  fonctions vectorielles  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  linéairement indépendantes soient connues. On cherche la solution particulière comme

$$\mathbf{Y}_p(x) = D_1(x)\Phi_1(x) + D_2(x)\Phi_2(x) + \dots + D_n(x)\Phi_n(x) \quad (3.57)$$

On injecte cette proposition de solution dans le système (3.16) et il restera alors un système linéaire algébrique pour les dérivées  $D'_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) & \dots & \phi_{1n}(x) \\ \phi_{21}(x) & \phi_{22}(x) & \dots & \phi_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(x) & \phi_{n2}(x) & \dots & \phi_{nn}(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} D'_1(x) \\ D'_2(x) \\ \vdots \\ D'_n(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}'(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \quad (3.58)$$

D'abord on doit résoudre ce système linéaire, ce qu'on peut écrire formellement comme  $\mathbf{D}'(x) = \mathbf{M}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)$  (ne calculer pas la matrice inverse si  $n$  trop grand), puis on doit intégrer pour trouver

$$\mathbf{D}(x) = \int^x \mathbf{M}^{-1}(\tilde{x})\mathbf{B}(\tilde{x})d\tilde{x} \quad (3.59)$$

Cette méthode est rarement facile à mettre en oeuvre. L'exercice suivant donne un exemple.

**Exercice** On reprend un exercice précédent, mais cette fois ci avec un terme en plus qui rend le système inhomogène

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos x \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Commencer par rappeler les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et vecteurs propres associées  $\mathbf{q}_1 = [q_{1,1}, q_{1,2}]^T$ ,  $\mathbf{q}_2 = [q_{2,1}, q_{2,2}]^T$ . Proposer ensuite  $\mathbf{Y}_p(x) = D_1(x)\mathbf{q}_1 e^{\lambda_1 x} + D_2(x)\mathbf{q}_2 e^{\lambda_2 x}$  comme solution au système pour en déduire le système linéaire algébrique pour  $\mathbf{D}'(x)$ . Résoudre ce système linéaire pour trouver  $D'_1(x)$  et  $D'_2(x)$  puis intégrer pour obtenir

$$D_1(x) = \frac{1}{4} \left( -ix + \frac{e^{-2ix}}{2} \right), \quad D_2(x) = \frac{1}{4} \left( ix + \frac{e^{2ix}}{2} \right) \quad (3.61)$$

Montrer qu'au final la solution particulière se met sous la forme

$$\mathbf{Y}_p(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

### Imposer une condition initiale

Si on impose une condition initiale.

$$CI : \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 \quad (3.63)$$

celle-ci fixera les valeurs des constantes arbitraires. On exprime cette condition à l'aide de la solution générale :

$$\sum_{i=1}^n C_i \Phi_i(x_0) + \mathbf{Y}_p(x_0) = \mathbf{Y}_0 \quad (3.64)$$

Ceci donne un système linéaire algébrique pour les constantes  $C_j$  qu'on devra résoudre afin d'identifier la solution unique

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11}(x_0) & \phi_{12}(x_0) & \dots & \phi_{1n}(x_0) \\ \phi_{21}(x_0) & \phi_{22}(x_0) & \dots & \phi_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(x_0) & \phi_{n2}(x_0) & \dots & \phi_{nn}(x_0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(x_0)} \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{0,1} - y_{p,1}(x_0) \\ y_{0,2} - y_{p,2}(x_0) \\ \vdots \\ y_{0,n} - y_{p,n}(x_0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}_p(x_0)} \quad (3.65)$$

Encore un autre système linéaire à résoudre.

**Exercice** On reprend la suite de l'exercice précédent en ajoutant une condition initiale. Montrer que la solution de

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos x \end{bmatrix}, \quad CI : \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

est

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Comme annoncé dans le premier chapitre, la méthode de la variation de la constante nous permet également de trouver des solutions particulière d'EDO's linéaires d'ordre  $n$ .

**Exercice** Trouver la solution de

$$y'' + y = \cos x \quad (3.68)$$

muni de la condition initiale

$$CI : y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (3.69)$$

Récrire l'équation comme un système d'ordre 1 dans les nouvelles variables  $[y_1, y_2] = [y, y']$ . Trouver la solution homogène, puis une solution particulière par la méthode de la variation des constantes. Imposer enfin la condition initiale.

Si le système est homogène, la solution au problème à condition initiale se laisse écrire de manière très condensée à l'aide de l'exponentielle de matrice. On vérifié aisément que

$$\mathbf{Y}(x) = e^{\mathbf{A}(x-x_0)} \mathbf{Y}_0 \quad (3.70)$$

est solution du système homogène et comme  $\exp(\mathbf{A}0) = \mathbf{I}$ , la condition initiale est automatiquement satisfaite. Pour cette raison on dit que la matrice  $\exp(\mathbf{A}(x - x_0))$  agit comme une matrice d'évolution, permettant d'avancer le système d'un état à l'autre.

**R** En mécanique quantique, on retrouve ce genre de relations sous forme d'opérateurs. Si  $|\psi\rangle$  désigne l'état du système quantique, l'équation de Schrödinger exige que

$$i \hbar \partial_t |\psi\rangle = \widehat{\mathcal{H}} |\psi\rangle \quad (3.71)$$

avec  $\widehat{\mathcal{H}}$  l'hamiltonien du système. Si on connaît  $|\psi(t_0)\rangle$ , l'état initiale du système à temps  $t_0$  alors l'état à un temps ultérieur sera

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\widehat{\mathcal{H}}(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle \quad (3.72)$$

L'opérateur

$$\widehat{\mathcal{U}} = e^{-i\widehat{\mathcal{H}}(t-t_0)/\hbar} \quad (3.73)$$

est l'opérateur d'évolution et suite au caractère Hermitien de  $\widehat{\mathcal{H}}$  il sera unitaire,  $\widehat{\mathcal{U}}\widehat{\mathcal{U}}^\dagger = \widehat{\mathcal{I}}$ , ce qui permet de garder une distribution de probabilité normalisée à tout temps,

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = 1 \quad (3.74)$$

### 3.3 Systèmes non-linéaires

Une grande partie des systèmes d'EDOs que l'on rencontre en physique sont non-linéaires et de la forme canonique (3.7). La théorie de ces systèmes dynamiques est une branche des mathématiques très avancée et il existe plusieurs outils pour analyser le comportement des systèmes d'EDO's non-linéaires. Ici on se limitera à la discussion d'une méthode souvent utilisée pour comprendre la dynamique au voisinage d'un état d'équilibre.

#### 3.3.1 Analyse locale autour d'un état équilibre

Supposons un système d'EDO's de la forme canonique (3.7). Un tel système sera **autonome** s'il est de la forme

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \quad (3.75)$$

où la fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$  ne dépend pas explicitement de la variable  $t$ . On change de nom  $x \rightarrow t$  pour mieux faire référence à une variable  $t$  temporelle, ce qui facilitera la compréhension du vocabulaire utilisé. Pour de tels systèmes autonomes, on peut chercher des états d'équilibre et linéariser la dynamique autour de ces points, afin de dire un mot sur la stabilité de ces points d'équilibre.

##### Etat d'équilibre ou point fixe

On appelle  $\mathbf{Y}_e = [y_{e,1}, y_{e,2}, \dots, y_{e,n}]^T$  un (vecteur d') état d'équilibre ou point fixe d'un système autonome (3.75), si

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}_e) = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

On rappelle que ceci veut dire que les  $n$  composantes de la fonction vectorielle  $\mathbf{F}$  s'annulent en ce point :

$$\begin{cases} f_1(y_{e,1}, y_{e,2}, \dots, y_{e,n}) = 0 \\ f_2(y_{e,1}, y_{e,2}, \dots, y_{e,n}) = 0 \\ \dots \\ f_n(y_{e,1}, y_{e,2}, \dots, y_{e,n}) = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

En toute évidence,  $d\mathbf{Y}_e/dt = 0$  au point d'équilibre, d'où son nom. Un même système d'EDO's peut avoir aucun, 1, 2 voir une infinité de points fixes.

**Stabilité d'un point fixe**

Dans un état d'équilibre, l'état d'un système est au repos, mais si on s'écarte de cet équilibre, en perturbant légèrement la dynamique par

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}_e + \epsilon \mathbf{Z}(t) \quad , \quad \epsilon \ll 1 \quad (3.78)$$

il n'est pas garanti que l'écart  $\mathbf{Z}(t)$  décroît au cours du temps. S'il existe des  $\mathbf{Z}(t)$  qui peuvent croître, on dit que le point fixe  $\mathbf{Y}_e$  devient instable.

Afin de contourner des conditions nécessaires pour observer une instabilité on peut procéder à une étude de stabilité. Une étude **stabilité linéaire** s'intéresse au devenir de perturbations infinitésimales, de taille  $\epsilon \rightarrow 0$  et on dispose d'une méthode mathématique très bien contrôlée. Une étude de **stabilité non-linéaire** s'intéresse au devenir de perturbations infinitésimales, de taille  $\epsilon$  finie et mettre en oeuvre ces méthodes est bien plus difficile.

**Etude de stabilité linéaire**

Pour répondre à la question de stabilité d'un point fixe, on dispose d'une méthode : on **linéarise** la dynamique autour d'un point d'équilibre  $\mathbf{Y}_e$  que l'on suppose connu. Pour cela, on propose  $\mathbf{Y}_e + \epsilon \mathbf{Z}$  comme solution au système d'EDO

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Y}_e + \epsilon \mathbf{Z}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}_e + \epsilon \mathbf{Z}) \quad (3.79)$$

Ensuite on s'intéresse une perturbation infinitésimale, c.a.d. une perturbation dont l'amplitude  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ce processus de limite permet de faire un développement limité du membre de droite autour du point d'équilibre :

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{Y}_e}{dt}}_{=0} + \epsilon \frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_e)}_{=0} + \epsilon \left( z_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_1}(\mathbf{Y}_e) + z_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_2}(\mathbf{Y}_e) + \dots + z_n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_n}(\mathbf{Y}_e) \right) + O(\epsilon^2) \quad (3.80)$$

Les termes d'ordre  $O(\epsilon^0)$  disparaissent car on a supposé un équilibre. Les termes d'ordre  $O(\epsilon^2)$  sont plus petites et on fait une approximation en les ignorant. On obtient alors **le système d'EDO's linéarisé** pour la perturbation  $\mathbf{Z}(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial y_1 & \partial f_1 / \partial y_2 & \dots & \partial f_1 / \partial y_n \\ \partial f_2 / \partial y_1 & \partial f_2 / \partial y_2 & \dots & \partial f_2 / \partial y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n / \partial y_1 & \partial f_n / \partial y_2 & \dots & \partial f_n / \partial y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{Y}_e)} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \quad (3.81)$$

La **matrice Jacobienne**  $\mathbf{J}(\mathbf{Y}_e)$  est une matrice à coefficients constants, que l'on calcule en évaluant toutes les dérivées partielles des fonctions  $f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dans le point d'équilibre  $\mathbf{Y}_e$ .

Afin d'évaluer la stabilité linéaire d'un point fixe, il convient de calculer la solution homogène du système d'EDO's linéarisé. Dans le cas le plus courant, la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{Y}_e)$  sera diagonalisable et on pourra donc trouver sa solution homogène

$$\mathbf{Z}(t) = C_1 \mathbf{q}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{q}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \mathbf{q}_n e^{\lambda_n t} \quad (3.82)$$

Ici  $C_i$  sont des coefficients arbitraires,  $\lambda_i$  et  $\mathbf{q}_i$  les valeurs et vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{Y}_e)$ . Les  $\mathbf{q}_i$  sont souvent appelés **modes propres**. En inspectant les valeurs propres  $\lambda_i$ , on peut conclure sur la stabilité linéaire d'un point d'équilibre en focalisant sur le comportement de cette solution à temps longs  $t \rightarrow +\infty$ .

1. Le point d'équilibre  $\mathbf{Y}_e$  sera linéairement **instable** s'il existe des valeurs propres avec

$$\text{Re}(\lambda_k) > 0 \quad (3.83)$$

A temps long la solution

$$\mathbf{Z}(t) = C_k \mathbf{q}_k e^{\lambda_k t} \quad (3.84)$$

croît alors exponentiellement et infiniment. L'écart avec le point d'équilibre va donc s'agrandir et il sera nécessaire de retourner vers le vrai système non-linéaire, pour connaître la suite de l'évolution du système. Mais au moins, on sait que l'équilibre n'est pas stable : le système ne va pas y rester. Si plusieurs modes  $Q_k$  sont instables, alors aux temps longs on s'attend à voir le mode  $k$  le plus instable, avec la plus grande partie réelle  $\text{Re}(\lambda_k)$ .

2. Le point d'équilibre  $Y_e$  sera linéairement **stable** si toutes les valeurs propres sont telles que

$$\text{Re}(\lambda_k) < 0 \quad (3.85)$$

A temps long la solution

$$Z(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.86)$$

quelque soient les valeurs  $C_k$ . L'écart avec le point d'équilibre va donc toujours diminuer et le système aimera donc rester proche de son état d'équilibre  $Y_e$ .

3. Le point d'équilibre  $Y_e$  sera **marginalelement stable** si aucun vecteur propre est instable, mais s'il existe au moins un (deux pour un système réel) vecteur propre  $q_k$  qui a sa valeur propre

$$\text{Re}(\lambda_k) = 0 \quad (3.87)$$

Si la partie imaginaire est non-nulle, la dynamique résultante pour  $Z(t)$  pourra être oscillatoire.

### Stabilité linéaire non-modale

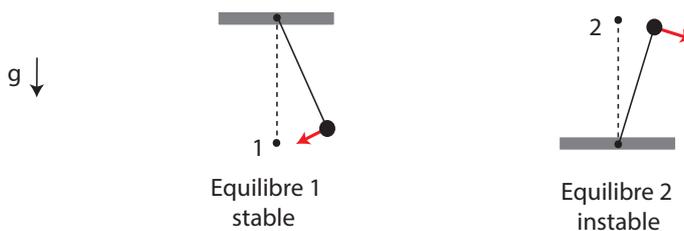
L'absence de modes propres instables (à  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$ ), ne signifie pas automatiquement qu'une perturbation ne pourra jamais croître temporairement. En effet, il est possible qu'il existe des conditions initiales  $Z(0)$  qui sont telles que

$$\|Z(t)\| = \|\sqrt{\exp(\mathbf{J}(t - t_0))}Z(0)\| \gg \|Z(0)\| \quad (3.88)$$

à un temps  $t$  finie. Cela signifie qu'une perturbation pourra parfois initialement croître, pour disparaître à temps très long. Parfois cette croissance transitoire peut suffire pour qu'une perturbation de taille finie, finit par devenir tellement grande que les non-linéarités ignorées ne sont plus tout à fait négligeables. On parle ici de la stabilité non-modale. Pour faire une analyse de stabilité non-modale, il faut étudier en détail les propriétés de la matrice d'évolution  $\exp(\mathbf{J}(t - t_0))$  ce qui est difficile sans assistance numérique par ordinateur.

### 3.3.2 Exemple physique : le pendule

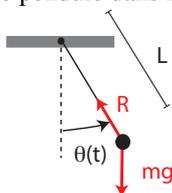
Pour illustrer mieux la notion de stabilité, on considère le cas classique du pendule



Ce pendule a deux points d'équilibre. Le point 1 du bas est stable car tout écart de la position d'équilibre le ramènera vers la position 1. Le point d'équilibre du haut, point 2, est instable car toute écart de cette position s'agrandira.

#### Système & PFD

Un pendule idéal est une masse  $m$  liée par une tige de masse 0 et de longueur  $L$  à un point d'attache. Si on met cette pendule dans le champ de gravité de la terre elle subira l'accélération gravitationnelle  $g$ .



Si on note  $\theta(t)$ , l'angle de déviation par rapport à la verticale, la mécanique classique (théorème du moment cinétique) nous indique que

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (3.89)$$

et  $R = mg \cos \theta$  sera la force de réaction exercée par la tige.

### Conservation de l'énergie mécanique

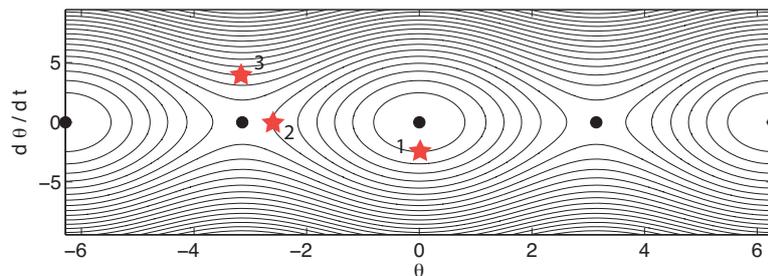
La solution est "connue" sous forme implicite. Si on multiplie cette EDO par  $Ld\theta/dt$ , on peut la récrire comme

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mL^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgL \cos \theta \right] = 0 \quad (3.90)$$

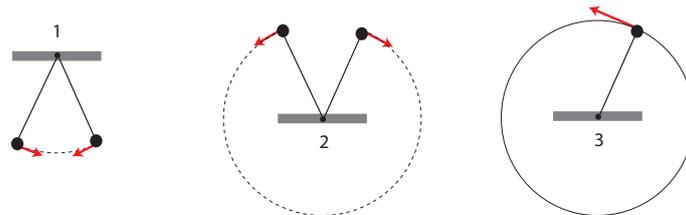
Entre les crochets, on reconnaît l'expression de l'énergie mécanique dans le système et cette EDO exprime donc sa conservation. On écrit donc

$$\frac{mL^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgL \cos \theta = E_M \quad (3.91)$$

avec  $E_M$  l'énergie mécanique qui est donc une constante du mouvement. Dans la figure ci-dessus, on affiche un "portrait de phase" de cette solution. Les lignes sont des iso-lignes de énergie mécanique  $E_M$ .



En spécifiant des conditions initiales sur  $\theta(0)$  and  $d\theta/dt(0)$ , on choisira une ligne parmi ces contours, qu'on ne quittera plus au cours du temps. Pour se faire une idée qualitative du mouvement du pendule, on schématise ci-dessous l'évolution du pendule si on suit l'une des 3 lignes marquées dans la figure au dessus.



Il s'agit d'oscillations à faible amplitude (1), grande amplitude (2) ou des rotations soutenues du pendule (3) sans jamais inverser de sens.

### Points fixes & analyse de stabilité

Cet exemple est illustratif pour appliquer la méthode de l'analyse de stabilité linéaire. On commence par écrire l'EDO d'ordre 2 (3.89) comme un système de 2 EDO's d'ordre 1. On note  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ .

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -(g/l) \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Les points d'équilibre sont définis par

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (3.93)$$

Soit tous les points,  $\theta = n\pi$ ,  $\dot{\theta} = 0$  avec  $n$  entier. Ces points sont marqués avec des ( $\bullet$ ) dans les plans de phase.

On fait maintenant une analyse de stabilité linéaire dans ces deux points d'équilibre

1. Point  $\theta = 0$ , point d'équilibre du bas

On écrit le système d'EDO's linéarisé autour du point d'équilibre du bas, c.a.d. on substitue  $\theta(t) = 0 + \epsilon\phi(t)$  dans le système non-linéaire (3.92) et on utilise le DL

$$\sin(0 + \epsilon\phi) = \underbrace{\sin 0}_{=0} + \epsilon\phi \underbrace{\cos(0)}_{=1} + O(\epsilon^2) \quad (3.94)$$

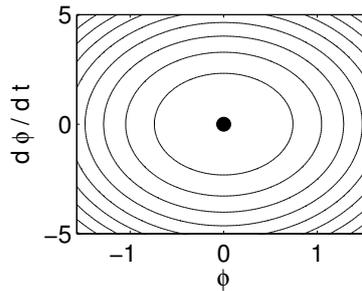
La perturbation linéaire  $\phi(t)$  satisfait

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ddot{\phi} + (g/l)\phi = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{g/l} \quad (3.95)$$

Ce point d'équilibre est donc marginalement stable. La solution est ici

$$\begin{cases} \phi(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \\ \dot{\phi}(t) = -C\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t \end{cases}, \quad \phi^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = C^2 + D^2 \quad (3.96)$$

avec  $\omega = \sqrt{g/l}$ ,  $C, D$  des constantes arbitraires. Dans le plan de phase  $\phi - \dot{\phi}$ , la dynamique suivra des ellipses, comme visualisé dans la figure ci-dessous.



On dit que le point d'équilibre du bas est un point elliptique.

2. Point  $\theta = \pi$ , point d'équilibre du haut

Autour du point d'équilibre du haut, on substitue  $\theta(t) = \pi + \epsilon\chi(t)$  dans le système non-linéaire (3.92) et on utilise le DL

$$\sin(\pi + \epsilon\chi) = \underbrace{\sin \pi}_{=0} + \epsilon\chi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + O(\epsilon^2) \quad (3.97)$$

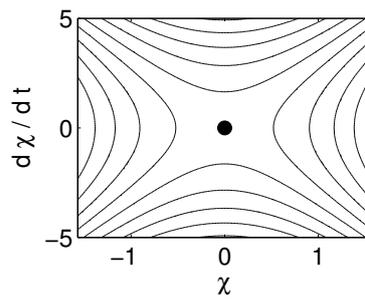
La perturbation linéaire  $\chi(t)$  satisfait donc

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \chi \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +(g/l) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\chi} - (g/l)\chi = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm \sqrt{g/l} \quad (3.98)$$

Ce point d'équilibre est donc instable. La solution est ici

$$\begin{cases} \chi(t) = C e^{\omega t} + D e^{-\omega t} \\ \dot{\chi}(t) = C \omega e^{\omega t} - D \omega e^{-\omega t} \end{cases}, \quad \chi^2 - \frac{\dot{\chi}^2}{\omega^2} = 4CD \quad (3.99)$$

avec  $\omega = \sqrt{g/l}$ ,  $C, D$  deux constantes. On peut remarquer que dans le plan de phase  $\chi - \dot{\chi}$ , la dynamique suivra des lignes hyperboliques, comme montré dans la figure (b) ci-dessus. On dit que le point d'équilibre du haut est un point hyperbolique.



Dans cet exemple sur le pendule, on retrouve bien le comportement physique auquel on s'attend. L'équilibre du bas est stable alors que celui du haut est instable. Il est intéressant de comparer les plans de phases donnés par l'analyse locale à ceux donnés par la loi de conservation de l'énergie mécanique. Ceci permet de comprendre que notre analyse de stabilité locale agit comme un zoom sur la partie de l'espace de phase autour de ces points d'équilibres et qu'elle ne nous donne qu'une approximation de la vraie dynamique non-linéaire.



## 4. EDP's

Dans toute la suite EDP = équation différentielle partielle

### 4.1 Généralités

On considère une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de plusieurs variables  $x_1, x_2, \dots, x_p$  et ses dérivées partielles notées comme

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_{xx}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial_{xy}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (4.1)$$

dans ce polycopier. D'autres ouvrages peuvent préférer la notation indicielle

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (4.2)$$

que nous n'utilisons pas ici. On définit une équation différentielle partielle comme-ci.

★ **Equation différentielle partielle d'ordre  $n$ .** Toute relation de la forme

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_p, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}, \dots, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x_p^n}\right) = 0 \quad (4.3)$$

Comme pour les EDO's, l'ordre  $n$  est fixé par la plus haute dérivée partielle dans l'équation. Dans ce chapitre, on ne s'intéressera seulement aux EDP d'ordre 1 ou 2. Une partie de notre effort sera consacrée à la recherche de solutions séparables.

★ **Solution séparable.** On appelle  $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$  une solution séparable d'une EDP (4.3) si elle est de la forme

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = X_1(x_1)X_2(x_2) \dots X_p(x_p) \quad (4.4)$$

Dans cette solution, les dépendances spatiales apparaissent séparément en facteurs différents. Cette forme de la solution permet de facilement imposer des conditions limites sur un domaine délimité par des surfaces coordonnées (surface où l'une des coordonnées  $x_j = Cst$ ).

## 4.2 EDP linéaire d'ordre 1

### 4.2.1 Définition

Une EDP linéaire d'ordre 1 est nécessairement de la forme

★ **EDP linéaire d'ordre 1.**

$$\sum_{i=1}^p a_i(x, y) \frac{\partial f}{\partial x_i} + c(x, y)f = g(x, y) \quad (4.5)$$

Si  $g(x, y) = 0$  cette EDP est homogène. ■

Suite à la linéarité, on pourra chercher la solution sous la forme d'une superposition de solution homogène et particulière, comme avant mais ce vocabulaire n'est pas souvent utilisé dans ce contexte.

### 4.2.2 Solutions séparables

Certains EDP's linéaires d'ordre 1 sont séparables, c'est à dire, elles admettent des solutions séparables. Focalisons sur un cas simple, ou  $c = g = 0$ . L'EDP linéaire est alors de la forme

$$a(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

Si on injecte la solution séparable dans cette EDP, alors on obtient

$$a(x, y) X'(x) Y(y) + b(x, y) X(x) Y'(y) = 0 \quad (4.7)$$

Division par  $X(y)Y(y)$  donne

$$a(x, y) \frac{X'(x)}{X(x)} + b(x, y) \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0 \quad (4.8)$$

On dit que l'EDP restante est **séparable** s'il est possible, après multiplication par une fonction  $M(x, y)$ , d'isoler une partie qui dépend uniquement de  $x$ , d'une partie qui dépend uniquement de  $y$ , soit

$$\underbrace{M(x, y) a(x, y) \frac{X'(x)}{X(x)}}_{f \text{ de } x} + \underbrace{M(x, y) b(x, y) \frac{Y'(y)}{Y(y)}}_{f \text{ de } y} = 0 \quad (4.9)$$

Une condition nécessaire pour avoir cette propriété est que  $M(x, y) a(x, y) = A(x)$  et  $M(x, y) b(x, y) = B(y)$  soit de manière plus pratique

★ L'EDP (4.6) admet des solutions séparables si

$$\frac{a(x, y)}{b(x, y)} = \frac{B(y)}{A(x)} \quad (4.10)$$

Supposant que cette propriété soit satisfaite, nous avons alors la possibilité de continuer notre recherche d'une solution séparable

$$\underbrace{\frac{X'(x)}{A(x)X(x)}}_{=\sigma} + \underbrace{\frac{Y'(y)}{B(y)Y(y)}}_{=-\sigma} = 0 \quad (4.11)$$

Les deux termes ne peuvent que s'annuler pour tout  $(x, y)$ , si on peut les égaliser à  $\pm\sigma$  où  $\sigma \in \mathbb{C}$  est ce qu'on appelle une **constante de séparation**. La valeur de cette constante est totalement arbitraire pour l'instant et

remarquons il ne s'agit pas ici d'une constante d'intégration. L'introduction de la constante de séparation nous amène à résoudre un système de 2 EDO's linéaires d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{X'(x)}{A(x)X(x)} = \sigma \\ \frac{Y'(y)}{B(y)Y(y)} = -\sigma \end{cases} \quad (4.12)$$

On peut intégrer exactement ces 2 EDO's à

$$\begin{cases} X(x) = C_x e^{\sigma \int^x A(\tilde{x}) d\tilde{x}} \\ Y(y) = C_y e^{-\sigma \int^y B(\tilde{y}) d\tilde{y}} \end{cases} \quad (4.13)$$

Ici  $C_x, C_y$  sont deux constantes arbitraires, mais seul leur produit  $C = C_x C_y$  agit comme une constante significative. En effet, on ne doit pas oublier qu'on cherche une solution séparable de la forme

$$f(x, y) = X(x)Y(y) = C e^{\sigma \int^x A(\tilde{x}) d\tilde{x}} e^{-\sigma \int^y B(\tilde{y}) d\tilde{y}} \quad (4.14)$$

La valeur de la constante de séparation  $\sigma$  est arbitraire. Suite à la linéarité de l'EDP, on peut donc superposer une infinité de ce type de solutions.

**Exercice** Appliquer cette méthode pour trouver des solutions séparables de

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

On peut généraliser la méthode à des  $c, g$  non-nulles et à plusieurs dimensions, mais toutefois il faudra des équations très spécifiques si on veut qu'elles admettent des solutions séparables. Ceci vient du fait que les variables  $x$  et  $y$ , présentes dans l'EDP ne sont peut être pas du tout des bonnes variables pour écrire la solution de manière simple.

### 4.2.3 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est bien plus générale et elle n'est pas limitée à des EDP's d'ordre 1 ayant la forme (4.6) avec la propriété (4.10), etc. Cette méthode des caractéristiques nous permet de trouver une famille de courbes, les **lignes caractéristiques**, (ou surfaces, volumes en dimension plus élevée), qui vont faciliter l'écriture de la solution. Cela s'interprète comme un changement de coordonnées générales qui nous est indiqué par l'équation même. La présentation de la méthode est loin d'être complète ici. Le but est de situer quelques idées.

#### Un exemple sur un EDP simple

On focalise un instant sur la même EDP d'ordre 1 linéaire en 2 dimensions, de la forme

$$a(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

On définit une courbe paramétrisée dans l'espace  $x - y$  par deux équations

$$x(s) = \dots, \quad y(s) = \dots \quad (4.17)$$

avec  $s$  un paramètre qui varie dans un intervalle  $[s_0, s_f]$  hypothétique. Le long de cette courbe, une fonction  $f(x(s), y(s))$  variera comme

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} \quad (4.18)$$

Ainsi, si on prend, l'EDP d'origine, on peut tenter d'égaliser

$$\underbrace{a(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}}_{df/ds} = 0 \quad (4.19)$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= a(x, y) \\ \frac{dy}{ds} &= b(x, y) \\ \frac{df}{ds} &= 0\end{aligned}\tag{4.20}$$

pour tout  $s \in [s_0, s_f]$ . Les deux premières équations de système d'EDO's, s'interprètent comme la définition de la courbe sur laquelle il est possible de récrire l'EDP comme  $df/ds = 0$ . Cette équation n'indique rien d'autre que  $f$  se conserve le long de cette courbe : la courbe sera une iso-ligne de  $f$  qui satisfait l'EDP. Pour calculer la position de ces **lignes caractéristiques**, on remarque que les équations pour  $x$  et  $y$  sont autonomes (indépendantes du paramètre  $s$ ). Cela signifie qu'on peut les prendre ensemble afin d'isoler  $ds$

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} = ds\tag{4.21}$$

La première égalité mène à la relation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}\tag{4.22}$$

qui est une EDO d'ordre 1. Sa solution générale définit **la famille des lignes caractéristiques** et il s'agit d'une famille, car la constante d'intégration qui apparaîtra pourra varier librement. On résoudra l'équation par la méthode adéquate, mais il est toujours possible de le mettre sous la forme

$$d\Psi(x, y) = 0\tag{4.23}$$

c.a.d. pour une EDO exacte. Ainsi, la fonction  $\Psi(x, y)$  jouera le rôle d'une nouvelle coordonnée et la solution du problème sera

$$f = g(\Psi)\tag{4.24}$$

Avant d'expliquer plus finement la raison d'être de cette solution, donnons un premier exemple simple avant où l'EDP

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0\tag{4.25}$$

à  $a, b \in \mathbb{R}$  constants. Les lignes caractéristiques sont solution de

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \Rightarrow \underbrace{d(ay - bx)}_{\Psi(x, y)} = 0\tag{4.26}$$

À chaque valeur constante de  $\Psi$  on trouve une ligne caractéristique. Ici, ces lignes sont des droites. Tout comme la fonction  $\Psi$ , la fonction  $f$  doit elle aussi rester constante le long des lignes caractéristiques. Cela signifie que  $f$  ne peut être qu'une fonction de  $\Psi(x, y)$  :

$$f(x, y) = g(\Psi) = g(ay - bx)\tag{4.27}$$

Il suffit d'injecter cette forme de la solution dans l'EDP initiale pour se convaincre que tout  $F$  différentiable convient.

**Exercice** Trouver les lignes caractéristiques de l'EDP

$$-y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0\tag{4.28}$$

Donner la forme générale de la solution  $f(x, y) = g(\Psi) = \dots$  ■

Pour mieux comprendre la méthode, on constate qu'on peut récrire l'EDP (4.16) comme

$$a(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (4.29)$$

avec  $\vec{u} = a(x, y) \vec{e}_x + b(x, y) \vec{e}_y$  un champ vectoriel. Si  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$  cela indique que la fonction  $f$  ne peut pas varier le long des lignes (de courant) tangentes au champ vectoriel  $\vec{u}$ . La fonction  $f$  peut par contre varier librement dans la direction perpendiculaire à  $\vec{u}$  et c'est cette liberté qu'on retrouve en écrivant  $f = F(\Psi)$  : la valeur  $f$  reste constant le long d'une ligne caractéristique particulière (un  $\Psi$  particulier), mais la fonction  $F$  elle-même est générale. De quelque sorte,  $\Psi$  est une nouvelle coordonnée générale, perpendiculaire aux lignes de courant de  $\vec{u}$ .

**Exercice** Dessiner le champ vectoriel  $\vec{u} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  associé au problème  $-y\partial_x f + x\partial_y f = 0$  ainsi que quelques lignes de courant (lignes parallèles à  $\vec{u}$ ). Montrer que chaque ligne de courant est caractérisée par une valeur unique de  $\Psi$ , que  $\Psi$  est en effet une nouvelle coordonnée générale, perpendiculaire aux lignes de courant de  $\vec{u}$ . ■

**Exercice** Reformuler le problème  $-y\partial_x f + x\partial_y f = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$  utilisant des coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Commencer par écrire  $\vec{u} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  en coordonnées cylindriques utilisant

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad (4.30)$$

et

$$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \quad , \quad \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \quad (4.31)$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est  $\vec{\nabla} f = \partial_r f \vec{e}_r + r^{-1} \partial_\theta f \vec{e}_\theta$ . Montrer que  $f = F(r)$  est solution de l'EDP. Comparer au résultat de l'exercice précédent. ■

**Exercice** L'EDO définissant les lignes caractéristiques de l'EDP  $a(x, y)\partial_x f + b(x, y)\partial_y f = 0$  peut être une EDO exacte ayant  $\Psi(x, y) = C$  comme solution. Montrer que cela nécessite que le champ  $\vec{u} = a(x, y)\vec{e}_x + b(x, y)\vec{e}_y$  soit solénoïdal ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ). Montrer que l'EDP s'exprime alors à l'aide du crochet de Poisson

$$\{f, \Psi\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

qui a  $f(x, y) = g(\Psi(x, y))$  comme solution générale. ■

### Extension à dimension plus élevée

La méthode précédente s'étend à plusieurs dimensions. Prenons un cas 3D comme exemple et celui d'une EDP linéaire de la forme :

$$a(x, y, z)\partial_x f + b(x, y, z)\partial_y f + c(x, y, z)\partial_z f = 0 \quad (4.33)$$

Ici aussi, on peut passer par l'introduction d'une courbe paramétrisé  $x(s), y(s), z(s)$  et chercher la courbe telle que

$$\underbrace{\frac{a(x, y, z)}{dx/ds} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b(x, y, z)}{dy/ds} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{c(x, y, z)}{dz/ds} \frac{\partial f}{\partial z}}_{df/ds} = 0 \quad (4.34)$$

L'exigence  $dx/ds = a$ ,  $dy/ds = b$ ,  $dz/ds = c$  se traduit par l'égalité de

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)} \quad (4.35)$$

Il convient de prendre ces équations par pair, c.a.d. de résoudre

$$\begin{cases} \frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} \\ \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)} \end{cases} \quad (4.36)$$

en même temps afin de trouver cette fois-ci deux familles de "surfaces" caractéristiques. Dans le cas heureux, il est possible de réduire ce système à deux différentielles exactes, c.a.d.

$$\begin{cases} d\Psi(x, y, z) = 0 \\ d\Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Cela n'est pas toujours garantie et les fonctions  $\Psi(x, y, z)$  et  $\Phi(x, y, z)$  ne sont jamais uniques par ailleurs. Si on a trouvé des fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$ , la solution  $f(x, y, z)$  de l'EDP est par contre connue comme

$$f(x, y, z) = g(\Psi(x, y, z), \Phi(x, y, z)) \quad (4.38)$$

c.a.d. comme une fonction arbitraire des fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$ .

**Exercice** Etudier le cas simple de l'EDP (4.33) avec  $a, b, c$  des constantes. Montrer que

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \\ \Phi &= \frac{z}{c} - \frac{x}{a} \end{aligned} \quad (4.39)$$

est un choix convenable de surfaces caractéristiques et que la solution générale est

$$f(x, y, z) = g\left(\Psi, \Phi\right) = g\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}, \frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right) \quad (4.40)$$

Vérifier cette solution en l'injectant directement dans l'EDP. ■

Ici aussi, on peut encore donner une interprétation géométrique similaire. On introduit le champ vectoriel

$$\vec{u} = a(x, y, z)\vec{e}_x + b(x, y, z)\vec{e}_y + c(x, y, z)\vec{e}_z \quad (4.41)$$

L'EDP original s'écrit encore comme  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$ . La fonction  $f$  ne varie pas dans la direction de  $\vec{u}$ , mais sa variation dans *le plan perpendiculaire* à  $\vec{u}$  reste arbitraire. C'est cette liberté *bidimensionnelle* qu'on paramétrise maintenant à l'aide de *deux* fonctions, deux nouvelles coordonnées  $\Psi, \Phi$  en 3D. Supposant qu'on puisse trouver deux bons  $\Psi(x, y, z)$  et  $\Phi(x, y, z)$  différentes et telles que

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0 \quad , \quad \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (4.42)$$

alors on aura la garantie que

$$f(x, y, z) = g(\Psi(x, y, z), \Phi(x, y, z)) \quad (4.43)$$

est une solution du problème. En effet,

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial g}{\partial \Psi} \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Psi)}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial \Phi} \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi)}_{=0} = 0 \quad (4.44)$$

Cette même méthode se généralise à dimension plus élevée.

#### Extension aux EDP's quasi-linéaires

Il est possible de généraliser la méthode des caractéristiques à d'autres EDP's **quasi-linéaires** et cela inclue toutes les EDP's linéaires. Pour résoudre un tel problème en  $n$  dimensions, on replacera le problème en  $n + 1$  dimensions. On se limite à aux EDPs quasi-linéaires en 2D.

★ **Méthode des caractéristiques.** Soit  $f(x, y)$  une fonction qui dépend de deux variables. Une EDP quasi-linéaire d'ordre 1 est de la forme

$$a(x, y, f) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y, f) \frac{\partial f}{\partial y} = c(x, y, f) \quad (4.45)$$

Pour résoudre cette équation, par la méthode des caractéristiques, on commence par écrire les équations caractéristiques

$$\frac{dx}{a(x, y, f)} = \frac{dy}{b(x, y, f)} = \frac{df}{c(x, y, f)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{a(x, y, f)} = \frac{dy}{b(x, y, f)} \\ \frac{dy}{b(x, y, f)} = \frac{df}{c(x, y, f)} \end{cases} \quad (4.46)$$

Avec deux signes d'égalité, on a encore un système de deux EDO's non-linéaires. Comme dans l'exemple 3D, on cherchera à identifier des fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$  telles que

$$d\Phi(x, y, f) = 0 \quad , \quad d\Psi(x, y, f) = 0 \quad (4.47)$$

La solution l'EDP se présente sous forme implicite

$$g(\Psi(x, y, f), \Phi(x, y, f)) = 0 \quad (4.48)$$

et parfois il sera possible d'en isoler une forme solution explicite  $f = \dots$ , mais pas toujours. ■

Pour comprendre l'approche on adopte une vision géométrique en 3D. On imagine  $(x, y, z)$  les coordonnées Cartésiennes d'un espace à trois dimensions. La solution  $f(x, y)$  du problème  $a\partial_x f + b\partial_y f = c$  peut être assimilée à une surface  $z = f(x, y)$ . On introduit la fonction

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z \quad (4.49)$$

qui s'annule ( $F = 0$ ) à l'endroit de la surface. Cette fonction  $F$ , étant constant sur la surface, ne varie que dans la direction perpendiculairement à la surface. En conséquence,

$$\vec{\nabla} F = \vec{\nabla} f - \vec{e}_z \quad (4.50)$$

donne la direction normale à la surface. Si on introduit maintenant le champ vectoriel

$$\vec{u} = a(x, y, z) \vec{e}_x + b(x, y, z) \vec{e}_y + c(x, y, z) \vec{e}_z \quad (4.51)$$

alors on remarque qu'une relation d'orthogonalité entre  $\vec{u}$  et  $\vec{\nabla} F$  donne

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} F = 0 \Leftrightarrow a(x, y, z) \partial_x f + b(x, y, z) \partial_y f - c(x, y, z) = 0 \quad (4.52)$$

Il suffit d'exiger que cette équation soit valable à l'endroit  $z = f(x, y)$  pour retrouver l'EDP quasi-linéaire qu'on souhaite résoudre. Il est intéressant ici de constater que cette équation 3D est *linéaire* en  $f$  alors que l'équation originale ne l'est pas. Ensuite, on suit la même logique qu'en 3D. Si on arrive à trouver deux fonctions  $\Psi(x, y, z)$  et  $\Phi(x, y, z)$  différentes et telles que  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0$  alors on aura la garantie que

$$F(x, y, z) = g(\Psi(x, y, z), \Phi(x, y, z)) \quad (4.53)$$

est une solution du problème 3D (4.52). En effet,

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial g}{\partial \Psi} \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Psi)}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial \Phi} \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Phi)}_{=0} = 0 \quad (4.54)$$

Toute la finesse, se trouve maintenant dans le fait qu'on exprime que la solution du problème 3D (4.53) tient sur la surface  $z = f(x, y)$  où  $F = 0$ . Ainsi on retrouve

$$F(x, y, f(x, y)) = g(\Psi(x, y, f), \Phi(x, y, f)) = 0 \quad (4.55)$$

comme solution implicite du problème original 2D. La solution de l'équation quasi-linéaire en 2D se trouve comme un cas particulier de la solution d'un problème 3D.

En pratique, le calcul des fonctions  $\Psi(x, y, z)$  et  $\Phi(x, y, z)$  n'est pas différent du cas 3D. Après tout, la seule chose qu'on souhaite est que  $\vec{\nabla}\Psi$  et  $\vec{\nabla}\Phi$  sont tous les deux orthogonaux à  $\vec{u}$ , défini de la même manière avec les notations choisies. Le long de la courbe  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$  on a

$$\frac{d\Psi}{dt} = \vec{\nabla}\Psi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.56)$$

pour toute fonction  $\Psi(x, y, z)$ . Si on égalise

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} dx/dt = a(x, y, z) \\ dy/dt = b(x, y, z) \\ dz/dt = c(x, y, z) \end{cases} \quad (4.57)$$

alors on réalisera  $d\Psi/dt = 0$  car  $\vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{u} = 0$ . Elimination de  $dt$  donne

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)} \quad (4.58)$$

comme dans le cas 3D traité précédemment et il suffit de renoter  $z = f$ , sur la surface pour retrouver les équations mentionnées plus haut.

**Exercice** Trouver la solution générale des EDP's suivantes

1.  $\partial_t f + \partial_x(fx^2) = 0$
2.  $\partial_t f + \partial_x(f^2/2) = -\lambda f$
3.  $\partial_t f + \partial_x(f \cos x) = 0$  (Trouver la fonction primitive de la secante sur le web)

utilisant cette méthode des caractéristiques. ■

### Exemple étonnant : l'équation de Burgers

L'équation de Burgers est une EDP non-linéaire qui intervient en mécanique des fluides.

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (4.59)$$

Si on cherche les lignes caractéristiques de cette équation quasi-linéaire, on trouvera

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0} \quad (4.60)$$

L'équation  $\frac{du}{0}$  indique que  $du = 0$  donc  $\Psi = u$ . L'autre grandeur isolé est  $\Phi = x - ut$ . Appliquant ce qu'on vient de voir, on doit avoir comme solution implicite

$$g(u, x - ut) = 0 \quad (4.61)$$

avec  $g$  arbitraire. Une forme explicite serait

$$u = F(x - ut) \quad (4.62)$$

avec  $F$  une fonction arbitraire mais on remarque immédiatement que cela n'aide pas beaucoup, la variable  $u$  est présente des deux cotés de la solution. Evaluons les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= F'(-u - t\partial_t u) \Leftrightarrow \partial_t u = -\frac{F'u}{1 + tF'} \\ \partial_x u &= F'(1 - t\partial_x u) \Leftrightarrow \partial_x u = \frac{F'}{1 + tF'} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Clairement l'équation de Burgers est bien satisfaite par cette solution. Toutefois, la présence des facteurs  $(1 + tF')$  dans les dénominateurs des fractions indiquent que la solution ne restera pas nécessairement

différentiable à tout temps ultérieur. En effet, si  $F' < 0$  quelque-part, si la fonction  $F$  est donc décroissant à au moins un endroit, alors la solution ne pourra pas se prolonger au delà d'un certain temps qui est

$$t_* = \max_x \frac{1}{|F'|} \quad (4.64)$$

A ce temps, se formera une discontinuité dans la solution et certains ingrédients de physique manquent pour décrire ce qui se passe à ce moment. Non par hasard, l'équation de Burgers est étudiée dans le contexte de la formation d'un "choc" en hydrodynamique.

## 4.3 EDP linéaires d'ordre 2

### 4.3.1 Définition

★ Dans un espace à  $n$  dimensions, une EDP linéaire d'ordre 2 doit forcément être de la forme

$$\sum_{i,j=1}^n \left[ a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \sum_{j=1}^n \left[ b_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] + c(x_1, \dots, x_n) f = g(x_1, \dots, x_n) \quad (4.65)$$

pour  $f(x_1, \dots, x_p)$  une fonction scalaire. ■

Comme d'habitude le problème de superposition tient pour cette équation linéaire.

### 4.3.2 Classification

Focalisons sur les EDP linéaires d'ordre 2 à coefficients  $a_{ij}$ ,  $b_j$  et  $c$  constants :

$$\sum_{i,j=1}^n \left[ a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \sum_{j=1}^n \left[ b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + cu = g(x_1, \dots, x_n) \quad (4.66)$$

On peut considérer  $a_{ij} = a_{ji}$  sans perte de généralité et cela signifie que la matrice  $\mathbf{A}$  qui regroupe les coefficients  $a_{ij}$  est donc symétrique  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ . Cela nous permet de simplifier l'EDP en faisant un changement du système de coordonnées linéaire. On écrit :

$$y_k = \sum_{i=1}^n p_{ki} x_i \quad (4.67)$$

avec  $p_{ki}$  les composantes d'une matrice de transformation  $\mathbf{P}$ . Pour évaluer l'effet de ce changement de coordonnées dans l'EDP, on récrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^n p_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} = \sum_{k,l=1}^n p_{ki} p_{lj} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \quad (4.69)$$

Si on remplace ces dérivées dans l'EDP (4.66), on obtient

$$\sum_{k,l=1}^n \left[ \sum_{i,j=1}^n p_{ki} a_{ij} p_{lj} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \dots = 0 \quad (4.70)$$

On focalise notre attention sur les termes de degré 2 seulement, pour y remarquer un produit matriciel

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ki} a_{ij} p_{jl} = (\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^T)_{kl} \quad (4.71)$$

De vos cours d'algèbre linéaire, vous pouvez peut être vous rappeler qu'une matrice  $A$  réelle et symétrique peut être diagonalisée par une matrice  $P$  orthogonale ( $P^{-1} = P^T$ ). Autrement dit, on a la garantie qu'il existe une matrice  $P$  telle que

$$PAP^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

avec  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ . L'EDP exprimée dans les nouvelles variables devient alors

$$\sum_{k=1}^n \left[ \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \beta_k \frac{\partial u}{\partial y_k} \right] + cu = \gamma(y_1, \dots, y_n) \quad (4.73)$$

avec

$$\beta_k = \sum_{j=1}^n P_{kj} b_j, \quad \gamma(y_1, \dots, y_n) = g(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)) \quad (4.74)$$

Selon les valeurs des coefficients  $\lambda_k$ , on classe les EDP's dans trois catégories principales :

1. *EDP elliptiques* : si tous les coefficients  $\lambda_k$  sont non-nuls et du même signe. Un exemple connu est l'EDP du problème de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.75)$$

2. *EDP hyperboliques* : si tous les coefficients  $\lambda_k$  sont non-nuls mais pas nécessairement du même signe. Un exemple connu est l'EDP est l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad (4.76)$$

avec  $c$  la célérité de l'onde.

3. *EDP paraboliques* : un des coefficients  $\lambda_k$  est nul et les autres sont du même signe. Un exemple connu est l'EDP est l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.77)$$

avec  $D$  le coefficient de diffusion.

Cette classification n'est pas complète, mais cela couvre néanmoins de nombreuses équations qu'on rencontre en physique.

**R** Si les coefficients de l'EDP linéaire ne sont pas constants, on peut encore chercher un changement de coordonnées adéquat (locale, non-linéaire) qui simplifierait l'EDP, mais ceci n'est pas souvent facile. La classification de ces types d'EDP's n'est alors plus du tout une affaire simple voir relevante car une même équation peut avoir un caractère elliptique dans une région de l'espace en même temps qu'un caractère hyperbolique dans une autre région.

**R** Il est possible d'étendre la méthode des caractéristiques aux EDP d'ordre 2 linéaire, mais on ne traite pas cette méthode ici.

## 4.4 Le problème de Laplace

### 4.4.1 L'opérateur Laplacien

L'opérateur Laplacien joue un rôle primordial en physique, car on le rencontre dans quasiment toutes les disciplines physiques qui font appel aux EDP. On le définit de manière intrinsèque (indépendant du système de coordonnées) comme l'opérateur différentiel d'ordre deux

★ **Laplacien.**

$$\Delta = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} = \nabla^2 \quad (4.78)$$

Calculer le Laplacien d'un champ scalaire revient à d'abord calculer son gradient, puis la divergence de ce gradient. On peut calculer le Laplacien de tout genre de champ scalaire, vectoriel ou tensoriel, mais ici on se limitera à des champs scalaires.

**Laplacien en coordonnées Cartésiennes**

Dans un espace à  $n$  dimensions, avec  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  des coordonnées Cartésiennes et  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une fonction quelconque, on appelle

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \quad (4.79)$$

le Laplacien de  $f$ . La plupart des applications en physique se situent dans un espace à 1, 2 ou 3 dimensions. L'opérateur Laplacien est invariant vis à vis de toutes les translations, rotations ou réflexions. Une telle transformation s'écrit

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{x} \quad , \quad y_i = a_i + \sum_{j=1}^n R_{ij} x_j \quad (4.80)$$

avec  $\mathbf{a}$  un vecteur constant et  $\mathbf{R}$  une matrice orthogonale  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ . On montre alors que

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i,j,k=1}^n R_{ji} R_{ki} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \quad (4.81)$$

Comme nous avons

$$\sum_{i=1}^n R_{ji} (R^T)_{ik} = (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)_{jk} = (\mathbf{I})_{jk} = \delta_{jk} \quad (4.82)$$

on simplifie donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{j,k=1}^n \delta_{jk} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} = \Delta_y \quad (4.83)$$

On vient donc de montrer que  $\Delta_x = \Delta_y$ , que l'opérateur Laplacien reste invariant. La conséquence de cette propriété de symétrie est que le Laplacien aura une forme "simple" dans tous les systèmes de coordonnées qui ont des symétries de translation ou de rotations : coordonnées Cartésiennes, cylindriques, sphériques, etc.

**Laplacien en coordonnées curvilignes**

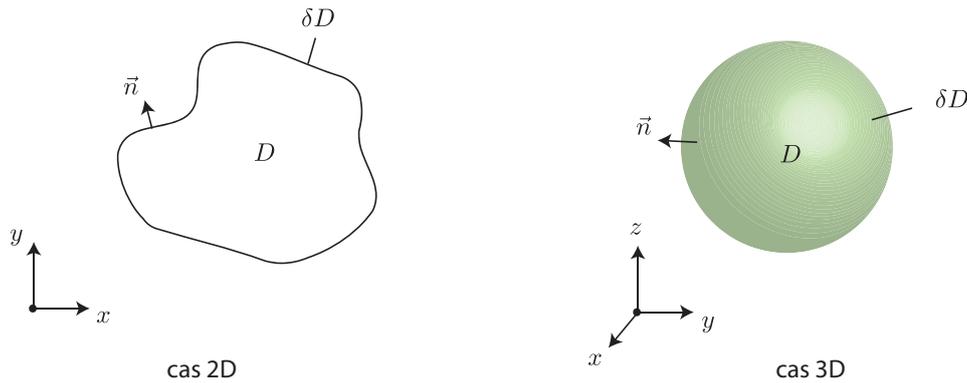
On utilise fréquemment des coordonnées curvilignes en physique. En 2D et dans ce poly, on fera quelques calculs en coordonnées polaires (cylindriques)  $(r, \theta)$ . Le Laplacien sera alors

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (4.84)$$

En 3D, on étudiera un exemples en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  (attention, pas le même  $\theta$ ) :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (4.85)$$

Pour comprendre l'origine de ces formules plus complexes, il faut reviser l'analyse vectorielle et notamment les systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales.



#### 4.4.2 Définition du problème de Laplace

★ **Problème de Laplace.** Une fonction  $f$  solution du problème

$$\Delta f = 0 \quad (4.86)$$

dans un domaine  $D$ , satisfait un problème de Laplace. ■

On dit aussi que  $f$  est une **fonction harmonique**. Souvent on résolve un problème de Laplace ensemble avec un jeu de conditions aux limites sur le bord  $\delta D$  du domaine à la normale  $\vec{n}$  (cf. figure de ci-dessus). On rencontre les cas suivants.

★ **CL Dirichlet.** On impose la valeur de la fonction  $f$  sur le bord

$$CL : f|_{\delta D} = h|_{\delta D} \quad (4.87)$$

La fonction  $h$  est supposée connue. ■

★ **CL Neuman.** On impose la valeur de la dérivée normale au bord

$$CL : \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = H|_{\delta D} \quad (4.88)$$

La fonction  $H$  est supposée connue. ■

★ **CL mixte (Robin).** On impose

$$CL : \alpha f|_{\delta D} + \beta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = \mathcal{H}|_{\delta D} \quad (4.89)$$

Les fonctions  $\alpha, \beta, \mathcal{H}$  sont supposées connues. ■

La notation  $|_{\delta D}$  signifie "sur le bord  $\delta D$ ". On dit que les conditions limites sont **homogènes** si  $h|_{\delta D} = 0$ ,  $H|_{\delta D} = 0$  ou  $\mathcal{H}|_{\delta D} = 0$ .

Si le domaine est de taille infinie ou comprend des singularités du système de coordonnées (exemple : l'origine  $r = 0$  en coordonnées polaires ou sphériques), on doit y poser des conditions de régularité qui expriment que la solution n'y diverge pas, tend vers zéro ou vers une fonction désirée. On verra plusieurs exemples dans la suite. Ces conditions jouent le même rôle que les conditions aux limites et on les fera apparaître quand on pose les CL d'un problème.

#### 4.4.3 Théorème min-max & unicité de la solution

★ **Théorème min-max.** Soit un champ  $f(x_1, \dots, x_n)$ , qui satisfait le problème de Laplace dans un domaine  $D$  avec une CL de type Dirichlet ou Neuman ou mixte sur le bord  $\delta D$ . Les valeurs minimales et maximales de  $f$  doivent être atteintes sur le bord du domaine  $\delta D$  et jamais à l'intérieur de  $D$ . ■

Supposons que  $f$  satisfait  $\Delta f = 0$  et atteint un maximum en  $\vec{x}_{max} \in D$ . Toutes les premières dérivées partielles doivent donc s'annuler et toutes les deuxièmes dérivées partielles doivent être de signe négatif

$$\forall j \in 1, \dots, n : \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_{max}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_{max}} < 0 \quad (4.90)$$

On comprend directement que cette dernière propriété n'est pas compatible avec le caractère Laplacien de  $f$  qui impose que

$$\Delta f \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{max}} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_{max}} = 0 \quad (4.91)$$

dans ce point. L'affirmation initiale est donc fautive : il n'existe aucun point  $\vec{x}_{max} \in D$  où la fonction harmonique  $f$  peut atteindre son maximum. Ceci implique donc que le maximum doit se trouver sur le bord du domaine  $\delta D$ . On tient exactement le même raisonnement pour le minimum.

Une conséquence du précédent théorème est que la seule solution de

$$\Delta f = 0 \quad , \quad \vec{r} \in D \quad , \quad CL : f = C \quad , \quad \vec{r} \in \delta D \quad (4.92)$$

doit être  $f = C$  partout quelque soit la valeur de la constante  $C$ . Ceci permet de démontrer l'unicité de la solution du problème de Laplace, muni d'une condition limite de type Dirichlet.

★ **Unicité (Laplace + CL Dirichlet).** La solution  $f$  du problème de Laplace muni de conditions aux limites de type Dirichlet

$$\Delta f = 0, \quad f|_{\delta D} = h \quad (4.93)$$

avec  $h$  une fonction continue quelconque est unique.

Supposant qu'il existerait deux solutions différentes,  $f_1$  et  $f_2$ . Suite à la linéarité du problème de Laplace, la fonction  $g = f_1 - f_2$  satisfait

$$\Delta g = 0 \quad (4.94)$$

et sur les bords, la condition aux limites

$$g|_{\delta D} = h - h = 0 \quad (4.95)$$

En vue de ce qu'on a remarqué au dessus,  $g = f_1 - f_2 = 0$  doit être la seule solution du problème et cela signifie donc que  $f_1 = f_2$ , que la solution est unique.

Lorsqu'on utilise des conditions limites de types Neuman, la solution est toujours indéterminée à une constante près. Mais lorsqu'on a à faire à un domaine multiplement connecté, il peut y avoir d'autres sources de non-unicité.

#### 4.4.4 Signification mathématique : minimisation des gradients

Le problème de Laplace identifie une condition nécessaire pour qu'une fonction  $f$  minimise l'intégrale

$$L = \int_D \|\vec{\nabla} f\|^2 dV \quad (4.96)$$

pour  $f$  satisfaisant une condition de type Dirichlet ou Neuman sur le bord. Ce résultat est facile à démontrer à l'aide du calcul variationnel. On calcule la modification à  $L$ , notée  $\delta L$  qui est causée par une petite modification de la fonction  $f$  à  $f + \delta f$  dans l'intégrale. Ceci se fait de la manière suivante

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_D \|\vec{\nabla}(f + \delta f)\|^2 dV - \int_D \|\vec{\nabla} f\|^2 dV \\ &= \int_D 2\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla}(\delta f) dV && \text{(ignorer le terme de } \|\vec{\nabla}(\delta f)\|^2) \\ &= - \int_D 2\Delta f(\delta f) dV + \oint_{\delta D} \underbrace{2\vec{\nabla} f \cdot \vec{n}}_{=0} \delta f dS && \text{(intégration par partie)} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Le terme de bord qui est généré ici s'annule car soit  $\vec{\nabla}f \cdot \vec{n}|_{\delta D} = 0$  soit  $\delta f|_{\delta D} = 0$ . En conséquence

$$\delta L = - \int_D 2\Delta f \delta f dV \quad (4.98)$$

Lorsque la fonctionnelle  $L$  atteint un extremum, on a  $\delta L = 0$  pour tout  $\delta f$  possible. Cela nécessite que l'intégrandum s'annule ou encore que

$$\Delta f = 0 \quad + \text{CL : Dirichlet ou Neuman} \quad (4.99)$$

La fonction  $f$  qui minimise (4.96) en est bien une qui est solution d'un problème de Laplace.

#### Minimisation d'énergie de surface

Une solution du problème de Laplace peut aussi minimiser d'autres fonctionnelles que (4.96). Un exemple physique concret est celui où on cherche une surface ayant une énergie de surface minimale. C'est le cas des films de savon ou des membranes élastiques.

Notons  $z = f(x, y)$  la déformation verticale d'une membrane élastique, qui s'étend horizontalement sur une zone  $(x, y) \in \mathcal{S}$ . Sur les bords  $\delta\mathcal{S}$ , on suppose la membrane tendue à une certaine hauteur spécifiée par la fonction  $h$  :

$$f|_{\delta\mathcal{S}} = h|_{\delta\mathcal{S}} \quad (4.100)$$

une CL de type Dirichlet. L'énergie de surface est calculable par

$$E = \gamma \int_{\mathcal{S}} \sqrt{1 + \|\vec{\nabla}f\|^2} dx dy \quad (4.101)$$

avec  $\gamma$ , la tension de surface supposée constante. Comparant cette fonctionnelle à (4.96), on comprend assez bien qu'une fonction qui minimise  $L$ , minimisera également  $E$ . Un même calcul variationnel de  $\delta E$  mène en effet à

$$\delta E = -\gamma \int_{\mathcal{S}} \frac{\nabla^2 f}{2\sqrt{1 + \|\vec{\nabla}f\|^2}} \delta h dx dy \quad (4.102)$$

Cela implique qu'une surface minimale est telle que

$$\frac{\nabla^2 f}{2\sqrt{1 + \|\vec{\nabla}f\|^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f = 0 \quad (4.103)$$

Une membrane déformée cherche naturellement une forme solution du problème de Laplace.

#### 4.4.5 Solutions séparables en 2D : coordonnées Cartésiennes $(x, y)$

On cherche des solutions séparables du problème de Laplace en 2D, en coordonnées Cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (4.104)$$

Cette solution séparable sera de la forme  $f(x, y) = X(x)Y(y)$  et doit donc satisfaire

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (4.105)$$

On divise cette expression par  $XY$  afin de trouver

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{f de } x} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{f de } y} = 0 \quad (4.106)$$

Les deux termes doivent s'annuler et comme chaque terme dépend soit de  $x$ , soit de  $y$ , on doit nécessairement avoir

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \quad , \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\sigma \quad (4.107)$$

avec  $\sigma \in \mathbb{C}$  une constante de séparation, à priori quelconque et complexe. Cette étape de séparation mène donc à deux EDO's qui sont faciles à résoudre.

**Une forme possible des solutions séparables**

Pour simplifier l'écriture de la solution, on récrit  $\sigma = -k^2$ . Ce choix est adéquat et il n'y a aucune perte de généralité. La solution de

$$\begin{aligned} X''(x) + k^2 X(x) &= 0 \\ Y''(y) - k^2 Y(y) &= 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

est alors plus jolie à écrire. Attention toutefois à bien distinguer le cas  $k = 0$  du cas  $k \neq 0$ .

1. Avec  $k \neq 0$ , on trouve par exemple

$$\begin{aligned} X(x) &= A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx} \\ Y(y) &= B_+ e^{ky} + B_- e^{-ky} \end{aligned} \quad (4.109)$$

ou alternativement

$$\begin{aligned} X(x) &= A_s \sin(kx) + A_c \cos(kx) \\ Y(y) &= B_s \sinh(ky) + B_c \cosh(ky) \end{aligned} \quad (4.110)$$

avec  $A_{\pm}, B_{\pm}$  des constantes arbitraires.

2. Le cas  $k = 0$ , nécessite un traitement à part et donne les solutions

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 + A_2 x \\ Y(y) &= B_1 + B_2 y \end{aligned} \quad (4.111)$$

avec  $A_1, A_2, B_1, B_2$  des constantes arbitraires.

En résumé, une solution séparable du problème de Laplace en 2D et en coordonnées Cartésiennes est de la forme

$$f(x, y) = X(x)Y(y) = \begin{cases} (A_1 + A_2 x)(B_1 + B_2 y) & , \quad k = 0 \\ (A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx})(B_+ e^{ky} + B_- e^{-ky}) & , \quad \forall k \in \mathbb{C}_0 \end{cases} \quad (4.112)$$

La constante  $k \in \mathbb{C}$  est arbitraire et aucunement fixée par l'équation différentielle  $\Delta f = 0$ .

**Des formes alternatives**

Le choix de la constante de séparation est totalement arbitraire et au lieu de prendre  $\sigma = -k^2$  on aurait pu prendre  $\sigma = k^2$ . Cela aurait mené à une solution alternative de la forme

$$f(x, y) = (a_+ e^{kx} + a_- e^{-kx})(b_+ e^{iky} + b_- e^{-iky}) \quad (4.113)$$

ou

$$f(x, y) = (\alpha_s \sinh(kx) + \alpha_c \cosh(kx))(\beta_s \sin(ky) + \beta_c \cos(ky)) \quad (4.114)$$

dans le cas  $k \neq 0$ . Cette forme de la solution est équivalent à (4.112) car  $k$  est arbitraire et complexe.

**Superposition de solutions séparables**

Le problème de Laplace étant linéaire, cela signifie que la superposition de  $f_1$  et  $f_2$ , deux solutions différentes, reste une solution. En pratique, la solution d'un problème de Laplace se présentera souvent comme une somme de solutions séparables, par exemple,

$$f(x, y) = xy + 3x + e^{-y} \cos x + \cosh(10x) \sin(10y) \quad (4.115)$$

est solution de  $\Delta f = 0$ .

**Les CL (ou la régularité de la solution) fixent la solution**

La possibilité de superposer de diverses solutions séparables, dépendante chacune de constantes arbitraires suggère qu'il faut regarder au delà de l'équation  $\Delta f = 0$  afin de fixer la solution. C'est en exprimant les conditions aux limites que l'on écartera en effet de très nombreuses possibilités et qu'on trouvera la solution du problème.

Donnons un exemple simple afin de fixer les idées. On cherche la solution d'un problème de Laplace en coordonnées Cartésiennes et dans un domaine semi-infini :

$$D : x \in ] - \infty, +\infty[ , y \in ] - \infty, 0] \quad (4.116)$$

Sur la paroi, en  $y = 0$ , on impose la condition aux limites

$$CL_1 : f(x, 0) = \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad (4.117)$$

et pour  $y \rightarrow +\infty$ , on veut que la solution s'annule. Il s'agit là, d'une condition de régularité qu'on exprime comme

$$CL_2 : \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0 \quad (4.118)$$

La première condition aux limites,  $CL_1$ , indique que pour  $y = 0$  la solution doit se comporter comme un cosinus. Une solution séparable proportionnelle à  $\cos x$  existe et sera de la forme

$$f(x, y) = \cos x (A_+ e^y + A_- e^{-y}) \quad (4.119)$$

Avec  $A_+$  et  $A_-$  arbitraires. Ces constantes sont fixées en exprimant les conditions aux limites. La condition de régularité  $CL_2$  impose directement que  $A_- = 0$ . Ensuite,  $CL_1$  donne  $\cos x A_+ = \cos x$  soit  $A_+ = 1$ . La solution du problème est donc

$$f(x, y) = e^y \cos x \quad (4.120)$$

Cette solution est visualisée dans la figure 4.1. On voit une structure ondulatoire selon  $x$  avec une amplitude qui décroît exponentiellement selon  $y$ .

**Exercice** Afin de vous entraîner, trouver la solution de  $\Delta f = 0$  dans les situations suivantes de domaines  $D$  et conditions limites différentes

$$1. D : x \in ] - \infty, +\infty[ , y \in [0, H]$$

$$CL : f(x, 0) = \cos 3x \quad , \quad f(x, H) = 0 \quad (4.121)$$

$$2. D : x \in ] - \infty, +\infty[ , y \in [0, H]$$

$$CL : f(x, 0) = \cos 3x \quad , \quad f(x, H) = \sin 2x \quad (4.122)$$

### Solution exacte sur un rectangle, CL de Dirichlet quelconque

Sur un domaine rectangulaire  $D : x \in [0, L] , y \in [0, H]$ , on peut écrire une solution exacte du problème  $\Delta f = 0$  muni des conditions aux limites

$$CL : f(x, 0) = g_B(x) \quad , \quad f(x, H) = g_H(x) \quad , \quad f(0, y) = g_G(y) \quad , \quad f(L, y) = g_D(y) \quad (4.123)$$

Ici  $g_B, g_H, g_G, g_D$  sont des fonctions arbitraires continues (les indices font référence aux bords du Bas, du Haut, de la Gauche et de la Droite), mais attention, on doit supposer que la fonction  $f$  reste continue dans les coins c.a.d.

$$\begin{aligned} A &= g_B(0) = g_G(0) = f(0, 0), & B &= g_H(0) = g_G(0) = f(0, H), \\ C &= g_B(L) = g_D(0) = f(L, 0), & D &= g_H(L) = g_D(0) = f(L, H) \end{aligned} \quad (4.124)$$

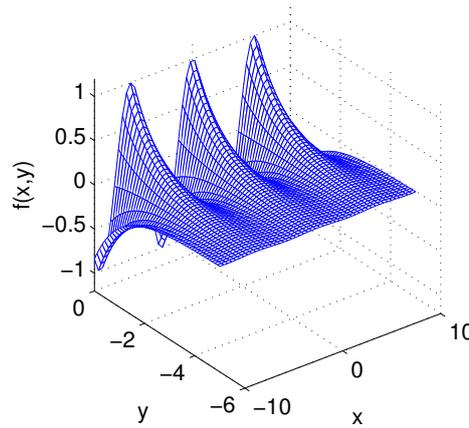


FIGURE 4.1 – Solution (4.120) du problème de Laplace en 2D et en coordonnées Cartésiennes . Sur le bord  $y = 0$ , on trouve les oscillations  $\sim \cos x$  imposées par les conditions aux limites. L'oscillation décroît exponentiellement pour  $y \rightarrow -\infty$

On utilisera ces valeurs de la fonction dans les coins,  $A, B, C, D$ , dans la suite. La solution peut être proposée sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & A \left( \frac{L-x}{L} \right) \left( \frac{H-y}{H} \right) + B \left( \frac{L-x}{L} \right) \frac{y}{H} + C \frac{x}{L} \left( \frac{H-y}{H} \right) + D \frac{x}{L} \frac{y}{H} \\
 & + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \alpha_n \frac{\sinh(k_n x)}{\sinh(k_n L)} + \beta_n \frac{\sinh(k_n (L-x))}{\sinh(k_n L)} \right) \sin(k_n y) \\
 & + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \gamma_n \frac{\sinh(K_n y)}{\sinh(K_n H)} + \delta_n \frac{\sinh(K_n (H-y))}{\sinh(K_n H)} \right) \sin(K_n x)
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Dans les sommes sur  $n$ , on définit

$$k_n = \frac{n\pi}{H}, \quad K_n = \frac{n\pi}{L} \tag{4.126}$$

car ces choix garantissent que

$$\sin(k_n y)|_{y=0,H} = 0, \quad \sin(K_n x)|_{x=0,L} = 0 \tag{4.127}$$

La logique derrière cette proposition de solution est la suivante. Dans la première ligne, on trouve une combinaison linéaire de 4 fonctions harmoniques simples, qui ont la propriété de s'annuler dans 3 coins sauf 1. Exemple, la fonction

$$\left( \frac{L-x}{L} \right) \left( \frac{H-y}{H} \right) \tag{4.128}$$

est 1 dans le coin  $(x, y) = (0, 0)$  et zéro dans les 3 autres coins. Similaire pour les autres fonctions dans la première ligne de (4.125). A la deuxième et troisième ligne, on trouve 4 sommes infinies qui font intervenir des fonctions harmoniques avec une autre propriété particulière. Par exemple, quelque-soit  $n \in \mathbb{N}_0$ , les fonctions

$$\frac{\sinh(k_n x)}{\sinh(k_n L)} \sin(k_n y) \tag{4.129}$$

ont toutes la propriété qu'elles sont nulles aux 3 parois  $y = 0$ ,  $y = H$  et  $x = 0$  et prennent la valeur 1 sur la paroi  $x = L$ . Similaire pour les autres groupes de fonctions,  $\frac{\sinh(k_n (L-x))}{\sinh(k_n L)} \sin(k_n y)$  s'annule en  $y = 0$ ,

$y = H$  et  $x = L$  et prend la valeur 1 sur la paroi  $x = 0$ , etc... Ceci facilite énormément la prise en compte des conditions aux limites. Il est ensuite utile de remarquer les relations d'orthogonalité

$$\frac{2}{H} \int_0^H \sin(k_n y) \sin(k_m y) \sqrt{dy} = \delta_{m,n}, \quad \frac{2}{L} \int_0^L \sin(K_n x) \sin(K_m x) \sqrt{dx} = \delta_{m,n} \quad (4.130)$$

car c'est ceux-ci qui permettront de trouver des formules pour les coefficients  $\alpha_n, \beta_n, \delta_n, \gamma_n$ . Donnons un exemple de calcul pour les coefficients  $\delta_n$ . En exprimant la CL sur le bord du bas,  $f(x, 0) = g_B(x)$  on obtient

$$g_B(x) = A \left( \frac{L-x}{L} \right) + C \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(K_n x) \quad (4.131)$$

C'est la forme particulière de la solution (4.125) qui explique pourquoi on a seulement des facteurs  $\delta_n$  dans cette équation. Reorganisant l'équation on obtient

$$\underbrace{g_B(x) - \left[ A \left( \frac{L-x}{L} \right) + C \frac{x}{L} \right]}_{0 \text{ en } x=0, L} = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(K_n x) \quad (4.132)$$

La fonction à gauche est une fonction qui s'annule exactement en  $x = 0, L$ , dans les coins du bas, exactement comme toutes les fonctions de la base de sinusoides,  $\sin(K_n x)$  avec  $K_n = n\pi/L$ . On peut donc la projeter sur cette base. En pratique, on multiplie cette expression par  $(2/L) \sin(K_m x)$  et on l'intègre ensuite sur l'intervalle  $x \in [0, L]$ . Une utilisation de la relation d'orthogonalité donne alors

$$\delta_m = \frac{2}{L} \int_0^L \left\{ g_B(x) - \left[ A \left( \frac{L-x}{L} \right) + C \frac{x}{L} \right] \sqrt{\phantom{x}} \right\} \sin(K_m x) dx \quad (4.133)$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ . Cette formule intégrale se calcule pour une fonction  $g_B(x)$  donnée.

**Exercice** Exprimant les conditions aux limites sur les 3 autres bouts de la paroi, pour trouver des formules similaires pour  $\alpha_m, \beta_m, \delta_m$  ■

**Exercice** Proposer une méthode similaire permettant de trouver des solutions un problème aux conditions aux limites de type Neuman (à une constante près). ■

#### 4.4.6 Solutions séparables en 2D : coordonnées polaires $(r, \theta)$

En coordonnées polaires, le problème de Laplace prend la forme suivante

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.134)$$

On injecte la solution séparable  $f(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \Theta(\theta)$  dans l'EDP :

$$\frac{(r\mathcal{R}')' \Theta}{r} + \frac{\mathcal{R}\Theta''}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{r(r\mathcal{R}')'}{\mathcal{R}}}_{f \text{ de } r} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{f \text{ de } \theta} = 0 \quad (4.135)$$

Dans la dernière manipulation, on a multiplié l'équation avec  $r^2/\mathcal{R}\Theta$ . On voit alors que le premier terme ne dépend que de  $r$  le deuxième seulement de  $\theta$  : on peut donc de nouveau les identifier à une constante de séparation, ce qui produit deux EDO's pour les fonctions  $\mathcal{R}$  et  $\Theta$  :

$$\frac{r(r\mathcal{R}')'}{\mathcal{R}} = m^2, \quad \frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^2\mathcal{R}''(r) + r\mathcal{R}'(r) - m^2\mathcal{R}(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + m^2\Theta(\theta) = 0 \end{cases}$$

On choisit  $m^2$  comme constante de séparation car ceci facilite l'écriture de la solution. La solution sera différente selon la valeur de  $m$  :

1. Si  $m \neq 0$ , on constate que  $R(r) = r^\alpha$  est possible si  $\alpha = \pm m$ . Pour  $\Theta(\theta)$  on voit immédiatement que ceci sera une fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned} R(r) &= A_+ r^m + A_- r^{-m} \\ \Theta(\theta) &= B_c \cos m\theta + B_s \sin m\theta = C_+ e^{im\theta} + C_- e^{-im\theta} \end{aligned} \quad (4.136)$$

2. Si  $m = 0$ , la solution est différente. On trouve

$$\begin{aligned} R(r) &= C_1 + C_2 \ln r \\ \Theta(\theta) &= D_1 + D_2 \theta \end{aligned} \quad (4.137)$$

En résumé, une solution séparable du problème de Laplace en coordonnées polaires est donc de la forme

$$f(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln r + C_3 \theta & , \quad m = 0 \\ (A_+ r^m + A_- r^{-m}) (C_+ e^{im\theta} + C_- e^{-im\theta}) & , \quad \forall m \in \mathbb{R}_0 \end{cases} \quad (4.138)$$

Evidemment il reste quelques formes alternatives en jouant sur l'écriture en  $\cos(m\theta)$ ,  $\sin(m\theta)$ .

#### Condition de périodicité : m entier

Dans la plupart des cas et dans toute la suite de cette section, on supposera un domaine de calcul qui couvre l'intervalle  $\theta \in [0, 2\pi]$ . On souhaite alors une périodicité en  $f$  et cela signifie que  $\Theta(\theta)$  doit être de la forme

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \quad (4.139)$$

Dans le cas  $m = 0$ , cela implique

$$D_1 + D_2 \theta = D_1 + D_2(\theta + 2\pi) \Leftrightarrow D_2 = 0 \quad (4.140)$$

soit  $\Theta(\theta) = D_1$  indépendante de  $\theta$ . Si  $m \neq 0$ , la périodicité de  $f$  implique

$$C_\pm e^{\pm im\theta} = C_\pm e^{\pm im(\theta+2\pi)} \Leftrightarrow e^{\pm im\theta} = 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{Z} \quad (4.141)$$

Le nombre  $m$  introduit lors de la séparation de l'EDP, n'est pas donc pas quelconque si on suppose la périodicité. Il s'agit d'un nombre entier qu'on appelle **nombre d'onde azimuthal**, car il décompte le nombre de fois que la structure se répète pour  $\theta$  allant de 0 à  $2\pi$ .

**R** Parfois on ne souhaite que la périodicité de  $\vec{\nabla} f$  mais pas forcément celle de  $f$ . Dans ce cas,  $m \in \mathbb{Z}$  aussi mais on doit admettre  $\Theta(\theta) = D_1 + D_2 \theta$  dans le cas  $m = 0$ .

**R** Parfois on utilise des coordonnées cylindriques dans des domaines qui ont la forme d'un morceau de gateau :  $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ . Dans ces domaines, les nombres  $m$  peuvent prendre d'autres valeurs discrètes.

#### Les CL radiales fixent la solution

Si  $\theta \in [0, 2\pi[$  il reste trois types de domaines possible.

1. Intérieur d'un cercle :  $r \in [0, R]$
2. Extérieur d'un cercle :  $r \in [R, +\infty[$
3. Domaine annulaire :  $r \in [R_1, R_2]$

Si on veut donner la solution d'un problème de Laplace, il faudra donner des conditions aux limites ou de régularité aux extrémités de ces intervalles. Donnons un exemple concret, pour le premier cas où le domaine est un disque  $r \in [0, R]$ . L'axe  $r = 0$  fait partie du domaine, on peut y souhaiter que la solution y reste régulière.

$$CL_1 : |f(0, \theta)| \text{ est bornée} \quad (4.142)$$

Cette information écarte un certain nombre de possibilités : les dépendances  $f \sim \ln r$ ,  $f \sim r^{-|m|}$  sont directement exclues. Sur le bord  $r = R$ , on suppose une condition aux limites de type Dirichlet pas trop compliquée, style

$$CL_2 : \frac{\partial f}{\partial r}(R, \theta) = \sin 4\theta \quad (4.143)$$

Cela indique que  $f \sim \sin 4\theta$  semble un bon choix et automatiquement on en déduit que  $m = 4$  semble adéquat ici. Combinant l'info de ces deux conditions aux limites, on arrive à proposer une solution du problème de Laplace de la forme

$$f(r, \theta) = Ar^4 \sin 4\theta \quad (4.144)$$

Afin de satisfaire  $CL_2$ , il faut donc que  $4AR^3 = 1$  et une solution est donc

$$f(r, \theta) = \frac{r^4 \sin 4\theta}{4R^3} \quad (4.145)$$

LA solution générale du problème n'est par contre pas unique. Comme nous l'avons vu en début du chapitre, la solution est indéterminée à une constante près à cause des conditions aux limites de type Neuman. La solution générale est donc

$$f(r, \theta) = \frac{r^4 \sin 4\theta}{4R^3} + C \quad (4.146)$$

avec  $C$  arbitraire.

**R** Afin de généraliser un peu l'approche, donnons la solution pour

$$CL_2 : \frac{\partial f}{\partial r}(R, \theta) = \sin m\theta \quad (4.147)$$

avec  $m$  entier et strictement positif, sur le même domaine. La solution sera

$$f(r, \theta) = C + \frac{r^m \sin m\theta}{mR^{m-1}} \quad (4.148)$$

On montre ce champ pour  $R = 1$ ,  $C = 0$  et pour plusieurs valeurs de  $m$  dans la figure 4.2.

**Exercice** Trouver la solution de  $\Delta f = 0$  dans le cas d'un domaine à l'extérieur d'un cercle  $r \in [R, +\infty[$ . On suppose des conditions aux limites

$$CL : f(R, \theta) = \cos 3\theta \quad , \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, \theta) = 0 \quad (4.149)$$

**Exercice** Trouver la solution de  $\Delta f = 0$  dans le cas d'un domaine annulaire  $r \in [R_1, R_2]$

$$CL : f(R_1, \theta) = \cos 3\theta \quad , \quad f(R_2, \theta) = \sin 4\theta \quad (4.150)$$

*Astuce* : Chercher la solution sous la forme  $f = f_1 + f_2$  avec

$$CL : \begin{aligned} f_1(R_1, \theta) &= \cos 3\theta \quad , \quad f_1(R_2, \theta) = 0 \\ f_2(R_2, \theta) &= 0 \quad , \quad f_2(R_2, \theta) = \sin 4\theta \end{aligned}$$

**Solution exacte sur l'intérieur d'un cercle, CL de Dirichlet quelconque**

On trouve la solution unique de  $\Delta f = 0$  sur l'intérieur d'un cercle, pour  $f$  satisfaisant une condition limite de type Dirichlet quelconque :

$$CL_1 : |f(0, \theta)| \text{ est bornée, } \quad CL_2 : f(R, \theta) = g(\theta) \quad (4.151)$$

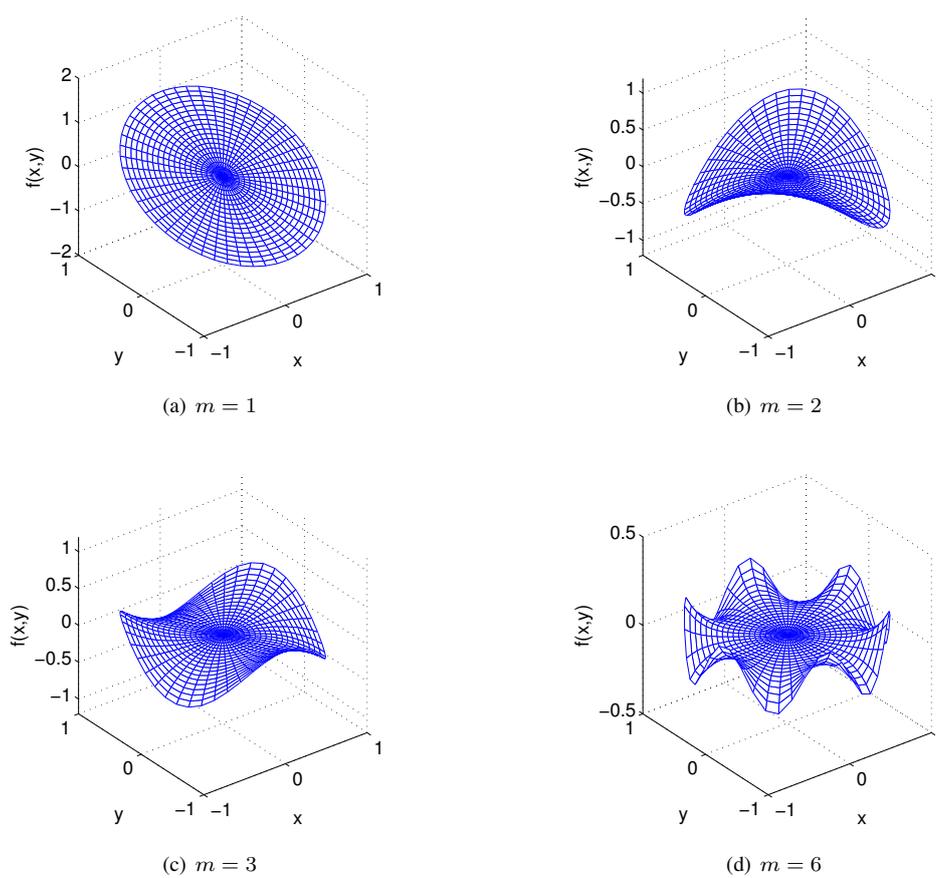


FIGURE 4.2 – Solution (4.148) du problème de Laplace en 2D et en coordonnées polaires et pour diverses valeurs du nombre  $m$  azimuthal. On voit que  $m$  décompte le nombre de longueurs d’onde dans la direction azimuthale.

La fonction  $g(\theta)$  doit être périodique  $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ . Excluant toutes les solutions singulières à l'axe, on aboutit sur la proposition de solution

$$f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{im\theta} \quad (4.152)$$

La solution axisymétrique  $m = 0$  est incluse dans cette somme infinie sur  $m$ . Exprimant la condition aux limites  $CL_2$  et à l'aide de la relation d'orthogonalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{in\theta} d\theta = \delta_{m,n} \quad (4.153)$$

valable pour tout  $m, n \in \mathbb{Z}$ , on trouve

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-im\theta} d\theta \quad (4.154)$$

Ceci n'est rien d'autre que la transformée de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique.

**Exercice** Trouver la solution de  $\Delta f = 0$  dans le cas d'un domaine annulaire  $r \in [R_1, R_2]$ , avec des conditions aux limites de type Dirichlet quelconques

$$CL : f(R_1, \theta) = g_1(\theta) \quad , \quad f(R_2, \theta) = g_2(\theta) \quad (4.155)$$

Les fonctions  $g_1, g_2$  et  $f$  sont  $2\pi$ -périodiques. Astuce : composer la solution générale à l'aide des deux fonctions

$$\frac{\left(\frac{r}{R_1}\right)^m - \left(\frac{R_1}{r}\right)^m}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^m - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m} \quad , \quad \frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^m - \left(\frac{R_2}{r}\right)^m}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^m} \quad (4.156)$$

à la place des puissances  $r^{\pm m}$  et les fonctions

$$\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \quad , \quad \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)} \quad (4.157)$$

à la place des fonctions 1 et  $\ln r$ . Toutes ces fonctions ont la propriété de disparaître à une paroi  $r = R_1$  ou  $R_2$  et prennent la valeur 1 à l'autre  $r = R_2$  ou  $R_1$ . Cela facilite grandement l'étape qui consiste à exprimer les conditions aux limites. ■

#### 4.4.7 Solutions séparables en 3D : coordonnées sphériques $(r, \theta, \phi)$

Le dernier cas qu'on traite est celui du problème de Laplace en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . On cherche à résoudre

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.158)$$

et on propose  $f(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$  comme solution séparable. Injectée dans l'EDP on arrive à séparer une partie en  $r$ , d'une partie en  $\theta, \phi$  :

$$\frac{(r^2 R')' \Theta \Phi}{r^2} + \frac{R (\sin \theta \Theta')' \Phi}{r^2 \sin \theta} + \frac{R \Theta \Phi''}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{(r^2 R')'}{R}}_{\text{f de } r} + \underbrace{\frac{(\sin \theta \Theta')'}{\sin \theta \Theta} + \frac{\Phi''}{\sin^2 \theta \Phi}}_{\text{f de } \theta, \phi} = 0 \quad (4.159)$$

On peut donc introduire une première constante de séparation

$$\frac{(r^2 R')'}{R} = n(n+1) \quad , \quad \frac{(\sin \theta \Theta')'}{\sin \theta \Theta} + \frac{\Phi''}{\sin^2 \theta \Phi} = -n(n+1) \quad (4.160)$$

La forme spécifique de cette constante  $n(n+1)$  simplifie l'écriture de la solution. Reste à séparer les dépendances en  $\theta$  et  $\phi$ . Nous avons

$$\frac{(\sin \theta \Theta')'}{\sin \theta \Theta} + \frac{\Phi''}{\sin^2 \theta \Phi} = -n(n+1) \Rightarrow \underbrace{\left( \frac{(\sin \theta (\sin \theta \Theta'))'}{\Theta} + n(n+1) \sin^2 \theta \right)}_{f \text{ de } \theta} + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{f \text{ de } \phi} = 0 \quad (4.161)$$

On choisit ici

$$\left( \frac{(\sin \theta (\sin \theta \Theta'))'}{\Theta} + n(n+1) \sin^2 \theta \right) = m^2, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2 \quad (4.162)$$

ce qui revient pour les fonctions  $\Phi(\phi)$  au même choix qu'en coordonnées polaires (cylindriques). La séparation faite, on doit maintenant trouver les solutions de ces 3 équations différentielles

### 1. Structure selon $r$

Suite à notre choix de la constante de séparation  $n(n+1)$ , l'EDO pour la dépendance radiale est assez simple à résoudre. Proposant  $R(r) = r^\alpha$ , on trouve directement que  $\alpha = n, -n-1$  sont les deux seules possibilités. On trouve

$$R(r) = A_+ r^n + A_- r^{-n-1} \quad (4.163)$$

### 2. Structure selon $\phi$

La structure azimutale est comme dans le cas polaire

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\phi) = \begin{cases} C_+ e^{im\phi} + C_- e^{-im\phi} & , m \neq 0 \\ C_1 & , m = 0 \end{cases} \quad (4.164)$$

avec  $m \in \mathbb{Z}$  en raison de la périodicité.

### 3. Structure selon $\theta$

La dépendance en  $\theta$  est la plus complexe. On doit avoir

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (4.165)$$

On manipule cette EDO par un changement de variable  $s = \cos \theta$ , avec  $s \in [-1, 1]$  pour  $\theta \in [0, \pi]$ . On a alors  $ds = -\sin \theta d\theta$  et  $\sqrt{1-s^2} = \sin \theta$ . Cela ramène l'EDO à

$$\frac{d}{ds} \left[ (1-s^2) \frac{d\Theta}{ds} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-s^2} \right] \Theta = 0 \quad (4.166)$$

qui est l'équation différentielle généralisée de Legendre. Les solutions régulières sur le domaine  $s \in [-1, 1]$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ) sont les fonctions de Legendre associées  $\Theta(s) = P_n^m(s)$ . Pour une valeur de  $n$  donnée, on montre que  $m \in -n, \dots, n$  sont les seules possibilités admises. En revenant sur la variable  $\theta$  par la substitution  $s = \cos \theta$ , on trouve

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta) \quad (4.167)$$

Il est instructif de regarder quelques unes de ces fonctions de plus près. Ignorant les pré-facteurs qui dépendent de la normalisation choisie, on constate que

$$\begin{aligned} P_0^0(\cos \theta) &\sim 1, & P_1^0(\cos \theta) &\sim \cos \theta, & P_1^{\pm 1}(\cos \theta) &\sim \sin \theta, \\ P_2^0(\cos \theta) &\sim 3 \cos^2 \theta - 1, & P_2^{\pm 1}(\cos \theta) &\sim \sin \theta \cos \theta, & P_2^{\pm 2} &\sim \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.168)$$

Une fonction  $P_n^m(\cos \theta)$  est toujours composée de  $n$  multiplications de  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$ .

En conclusion, une solution séparable du problème de Laplace en coordonnées sphériques sera de la forme

$$f(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) = (A_+ r^n + A_- r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.169)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in -n, \dots, n$ .

### Harmonique sphérique

Les regroupements

$$Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.170)$$

sont connus sous le nom des *harmoniques sphériques*. On les voit émerger dans de nombreux problèmes à symétrie sphériques. Il s'agit d'une famille de fonctions orthogonales vis à vis du produit hermitien

$$\langle nm|n'm' \rangle_w = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{Y_n^m}(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi) \underbrace{\sin \theta}_{w} d\theta d\phi = N_{nm} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (4.171)$$

c.a.d. par rapport à la fonction de poids  $w = \sin \theta$ . Le facteur  $N_{nm}$  dépend de la normalisation choisie pour les fonctions de Legendre. Les harmoniques sphériques sont des fonctions propres des opérateurs

$$\widehat{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad \text{et} \quad \widehat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.172)$$

qu'on relie au moment orbital en mécanique quantique. On a en effet

$$\widehat{L}^2 Y_n^m = n(n+1) Y_n^m, \quad \widehat{L}_z Y_n^m = m Y_n^m \quad (4.173)$$

Dans la figure 4.4 on trace la surface paramétrisée  $r = 1 + \epsilon \operatorname{Re}(Y_n^m(\theta, \phi))$ , pour de différentes valeurs de  $n$  et  $m$ . On peut imaginer ici qu'il s'agissait de différentes déformations d'une goutte d'eau.

### Superposition de solutions

La solution générale du problème de Laplace en coordonnées sphériques est celle qui superpose toutes les solutions séparables trouvées. On peut l'écrire comme

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (\alpha_{nm} r^n + \beta_{nm} r^{-n-1}) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (4.174)$$

Les coefficients  $\alpha_{nm}, \beta_{nm}$  sont arbitraires tant qu'on ne spécifie pas les conditions aux limites.

### Exemple comment les CL fixent la solution

On cherche la solution du problème de Laplace dans un domaine qui est l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  :  $D : r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$ . L'origine  $r = 0$  fait partie du domaine et on souhaite que la solution y est régulière

$$CL_1 : f(0, \theta, \phi) \text{ bornée} \quad (4.175)$$

Si on regarde la solution générale (4.174), cette condition écarte donc immédiatement toutes les puissances négatives en  $r^{-n-1}$  : la régularité imposera donc  $\beta_{nm} = 0$  pour tout  $n, m$ . Sur la surface de cette sphère, on impose une condition limite de type Dirichlet, par exemple

$$\begin{aligned} CL_2 : f(R, \theta, \phi) &= 3 \sin \theta \cos \theta \sin \phi + 3 \cos \theta \cos \phi + 10 + 6 \cos^2 \theta \\ &= 3 \underbrace{\sin \theta \cos \theta \sin \phi}_{\sim Y_2^{\pm 1}} + 3 \underbrace{\cos \theta \cos \phi}_{\sim Y_1^{\pm 1}} + 2 \underbrace{(3 \cos^2 \theta - 1)}_{\sim Y_2^0} + \underbrace{12}_{\sim Y_0^0} \end{aligned} \quad (4.176)$$

Dans ces conditions aux limites on trouve 4 termes différentes, qu'on regroupe en 4 groupes d'harmoniques sphériques ( $\sim Y_n^{\pm m}$ ) différentes. Ces dépendances en  $\theta, \phi$ , il faudra également les trouver dans la solution et ici, ceci nous informe qu'on peut chercher la solution sous la forme

$$f(r, \theta, \phi) = Ar^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi + Br \cos \theta \cos \phi + Cr^2(3 \cos^2 \theta - 1) + D \quad (4.177)$$

Les puissances  $r^2, r, r^0$ , sont directement liées aux nombres  $n = 2, 1, 2, 0$  qu'on a pu identifier dans les harmoniques sphériques  $Y_n^{\pm m}$  de la condition aux limites  $CL_2$ . En imposant la condition aux limites, on trouve  $A = 3/R^2, B = 3/R, C = 2/R^2, D = 12$ . La solution unique du problème est donc connue.

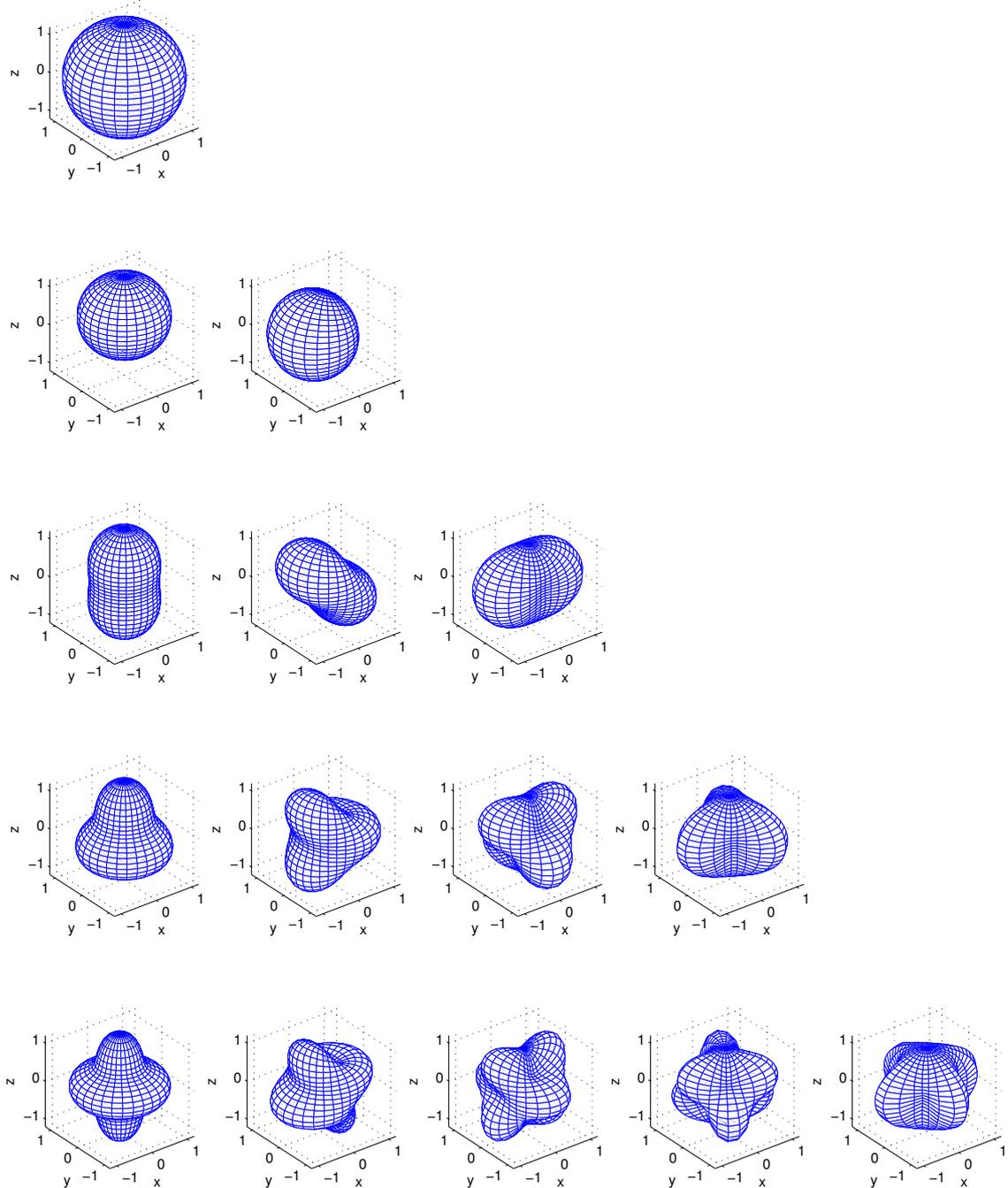


FIGURE 4.3 – Visualisation de la surface  $r = 1 + \epsilon P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi)$ , pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  du haut vers le bas, pour  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  de la gauche vers la droite. L'amplitude  $\epsilon$  est adaptée pour que le rayon maximal reste toujours  $r_{max} = 1.4$ .

### Solution exacte sur l'intérieur d'une sphère, CL de Dirichlet quelconque

Toujours sur le même domaine de l'intérieur d'une sphère, il est possible de trouver la solution exacte d'un problème de Laplace pour un jeu de conditions aux limites arbitraires de type Dirichlet :

$$CL : f(0, \theta, \phi) \text{ bornée, } f(R, \theta, \phi) = g(\theta, \phi) \quad (4.178)$$

Ici  $g(\theta, \phi)$  une fonction arbitraire mais continue et périodique en  $\phi$ . Comme  $r = 0$  fait partie du domaine, on doit écarter toutes les fonctions singulières à l'origine. On propose donc la solution comme

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n^m(\theta, \phi) \quad (4.179)$$

On exprime la condition limite sur la surface de la sphère et puis on utilise la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques. On trouve alors

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{N_{nm}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{Y_n^m(\theta, \phi)} g(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.180)$$

et la solution est donc "formellement" connue.

## 4.5 Expansions sur fonctions propres

### 4.5.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons rencontré le problème au valeur propres de Sturm-Liouville et à cette occasion, nous avons appris à calculer des fonctions propres. Cette notion de fonction propre d'un opérateur persiste en plusieurs dimensions. Si on connaît les fonctions propres d'un opérateur alors on peut résoudre un certain nombre de problèmes dans lesquelles intervient cet opérateur en cherchant (une partie de la solution) comme une expansion, sur les fonctions propres.

Ici on illustre cette méthode en s'intéressant aux fonctions propres de l'opérateur Laplacien  $\Delta$ . On montre que celles-ci peuvent être utiles pour résoudre un problème de Poisson, un problème de diffusion et un problème d'onde.

### 4.5.2 Fonctions propres du Laplacien

★ **Fonctions propres du Laplacien.** En cherchant les fonctions propres de l'opérateur Laplacien, on souhaite identifier pour quelles valeurs de  $\lambda$ , la valeur propre, il existe des solutions non-nulles  $f$ , les fonctions propres, du problème

$$-\Delta f = \lambda f \quad (4.181)$$

muni de conditions aux limites homogènes

$$CL : \alpha f|_{\delta D} + \beta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = 0 \quad (4.182)$$

avec  $\alpha, \beta$  deux fonctions arbitraires continue et  $\vec{n}$  la normale sortante du domaine. ■

Selon la dimension  $d$  du domaine  $D$  considéré, ce problème admet une famille de solutions

$$\{\lambda_{mnp\dots} \psi_{mnp\dots}, \forall m, n, p = 1, 2, \dots, d\} \quad (4.183)$$

dénombrable par  $d$  indices  $m, n, p, \dots$  entières (1 en 1D, 2 en 2D, 3 en 3D). Cette famille de solutions est orthogonale vis à vis du produit hermitien de fonctions

$$\langle \psi_{m'n'p'\dots} | \psi_{mnp\dots} \rangle = \int_D \overline{\psi_{m'n'p'\dots}} \psi_{mnp\dots} dD = N_{mnp\dots} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{pp'} \dots \quad (4.184)$$

Ici  $N_{mnp\dots}$  est un facteur de normalisation. Toute fonction membre de l'espace  $\mathcal{E}$ , défini par

$$f \in \mathcal{E} : f \in L^2(D), \quad \alpha f|_{\delta D} + \beta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = 0 \quad (4.185)$$

peut être décomposée sur cette base de fonctions propres par

$$f = \sum_{m,n,p,\dots} c_{mnp\dots} \psi_{mnp\dots} \quad , \quad c_{mnp\dots} = \frac{\langle \psi_{mnp\dots} | f \rangle}{\langle \psi_{mnp\dots} | \psi_{mnp\dots} \rangle} = \frac{1}{N_{mnp\dots}} \int_D \bar{\psi}_{mnp\dots} \sqrt{f} dD \quad (4.186)$$

Ces propriétés découlent entièrement du fait que l'opérateur  $\Delta$  est auto-adjoint. Dans la suite on notera brièvement  $\kappa = mnp\dots$  l'ensemble d'indices entiers, c.a.d.

$$f = \sum_{\kappa} c_{\kappa} \psi_{\kappa} \quad , \quad c_{\kappa} = \frac{\langle \psi_{\kappa} | f \rangle}{\langle \psi_{\kappa} | \psi_{\kappa} \rangle} = \frac{1}{N_{\kappa}} \int_D \bar{\psi}_{\kappa} \sqrt{f} dD \quad (4.187)$$

signifie la même chose que l'équation précédente.

**Exercice** Montrer que l'opérateur Laplacien  $\Delta$  est auto-adjoint vis à vis du produit hermitien introduit. Considérer le cas 3D pour rendre l'exercice plus concret. Le théorème de la divergence sera utilisé ici comme équivalent de l'opération d'intégration par partie en 1D. ■

### 4.5.3 Fonction propres séparables en 2D : coordonnées Cartésiennes $(x, y)$

On donne un exemple pour le cas où  $f(x, y)$  dépend des coordonnées Cartésiennes  $(x, y)$  qui couvrent un domaine rectangulaire  $D : [0, L_x] \times [0, L_y]$ . On cherche donc les valeurs  $\lambda$  pour lesquelles le problème

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lambda f \quad (4.188)$$

muni de conditions aux limites

$$CL : f(0, y) = f(L_x, y) = f(x, 0) = f(x, L_y) = 0 \quad (4.189)$$

a des solutions non-triviales.

#### Solutions séparables

Les fonctions propres sont ici des solutions séparables de la forme  $f(x, y) = X(x)Y(y)$ . La séparation du problème donne :

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{f \text{ de } x} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{f \text{ de } y} + \lambda = 0 \quad (4.190)$$

Selon la même logique qu'avant, les 3 termes doivent être constantes. Afin de préserver une simplicité dans la solution, on choisit d'introduire deux constantes de séparation  $k^2, l^2$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-k^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-l^2} + \lambda = 0 \quad (4.191)$$

En sort une relation algébrique qui définit en quelque sorte la valeur propre en fonction des constantes de séparation

$$\lambda = k^2 + l^2 \quad (4.192)$$

Cela signifie que  $k$  et  $l$  peuvent être choisis librement, mais pas  $\lambda$ . Les EDO's pour  $X(x)$  et  $Y(y)$  sont simples :

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X = 0 \\ Y''(y) + l^2 Y = 0 \end{cases} \quad (4.193)$$

et leur solutions sont

$$X(x) = \begin{cases} A_s \sin kx + A_c \cos kx & , \quad k \neq 0 \\ A_1 + A_2 x & , \quad k = 0 \end{cases} \quad (4.194)$$

$$Y(y) = \begin{cases} B_s \sin ly + B_c \cos ly & , \quad l \neq 0 \\ B_1 + B_2 y & , \quad l = 0 \end{cases} \quad (4.195)$$

En conclusion, à la valeur propre  $\lambda = k^2 + l^2$ , on peut donc associer les fonctions propres

$$\psi(x, y; k, l) = \begin{cases} (A_1 + A_2 x)(B_1 + B_2 y) & , \quad k = 0, l = 0 \\ (A_s \sin kx + A_c \cos kx)(B_s \sin ly + B_c \cos ly) & , \quad k, l \neq 0 \\ (A_1 + A_2 x)(B_s \sin ly + B_c \cos ly) & , \quad k = 0, l \neq 0 \\ (A_s \sin kx + A_c \cos kx)(B_1 + B_2 y) & , \quad k \neq 0, l = 0 \end{cases} \quad (4.196)$$

On introduit cette notation  $\psi(x, y; k, l)$  pour bien spécifier que chaque  $k$  et  $l$  produisent une autre fonction propre. Sans spécification des CL, les constantes  $k, l$  peuvent prendre des valeurs dans le continuum complexe,  $k, l \in \mathbb{C}$ . En conséquence, la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  aussi.

#### Les CL fixent les valeurs propres et les nombres d'ondes

On doit encore imposer les conditions aux limites (4.206). Ces 4 CL sur les bords du domaine peuvent être satisfaites si

$$\begin{cases} X(0) = X(L_x) = 0 \\ Y(0) = Y(L_y) = 0 \end{cases} \quad (4.197)$$

Cela nécessite

$$A_c = A_1 = A_2 = 0 \quad , \quad B_c = B_1 = B_2 = 0 \quad (4.198)$$

et

$$A_s \sin kL_x = 0 \quad , \quad B_s \sin lL_y = 0 \quad (4.199)$$

Clairement  $A_s = B_s = 0$  ne mène pas à d'autres solutions que la solution triviale. Il faut donc  $\sin kL_x = 0$  et  $\sin lL_y = 0$  ce qui nécessite

$$k = k_m = \frac{m\pi}{L_x} \quad , \quad l = l_n = \frac{n\pi}{L_y} \quad , \quad m, n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.200)$$

L'effet des conditions aux limites, est donc de sélectionner un jeu discret de valeurs  $k, l$  dénombrable par des entiers, ici  $m$  et  $n$ . Re combinant les formes  $X(x) \sim \sin k_m x$  et  $Y(y) \sim \sin l_n y$  admissibles, on trouve donc notre famille de fonctions propres du problème :

$$f = \psi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} \quad , \quad \lambda_{mn} = \left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \quad , \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.201)$$

Ici en dimension 2, deux nombres entiers  $m$  et  $n$  permettent en effet de dénombrer la famille des fonctions propres. Remarque d'ailleurs que les valeurs propres sont toutes positives. Dans la figure 4.4, on montre quelques fonctions propres  $\psi_{mn}(x, y)$  pour plusieurs valeurs de  $m, n$ . On reconnaît que  $m$  et  $n$  décomptent le nombre de demi-longueurs d'ondes dans les directions  $x$  et  $y$ .

#### Décomposition sur la base des fonctions propres

Toute fonction  $f$  carré-intégrable sur le domaine  $D$  et satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet homogène peut être décomposée sur cette base

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} \psi_{mn}(x, y) \quad (4.202)$$

avec

$$c_{mn} = \frac{\langle \psi_{mn} | f \rangle}{\langle \psi_{mn} | \psi_{mn} \rangle} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} dx dy \quad (4.203)$$

Grâce à cette propriété, les fonctions propres se révèlent pratique pour résoudre d'autres problèmes. Le facteur de normalisation  $N_{mn}$  vaut  $L_x L_y / 4$ .

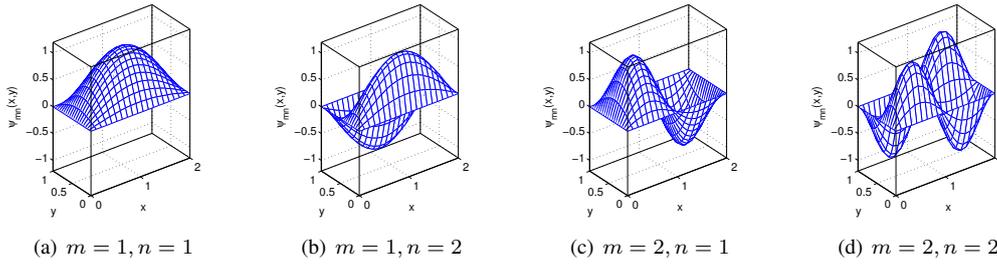


FIGURE 4.4 – Visualisation des fonctions propres  $\psi_{mn}(x, y)$  de (4.201) pour  $m = 1, 2$  et  $n = 1, 2$ .

**Autres fonctions propres**

Par le même jeu mathématique, il est possible de trouver des fonctions propres pour d’autres conditions aux limites et pour d’autres systèmes de coordonnées.

**Exercice** Trouver les fonctions propres de  $-\Delta f = \lambda f$  pour  $f(x, y)$  en Coordonnées Cartésiennes et pour  $f$  satisfaisant

$$CL : \partial_x f(0, y) = \partial_x f(L_x, y) = \partial_y f(x, 0) = \partial_y f(x, L_y) = 0 \tag{4.204}$$

c.a.d., des conditions de Neuman homogènes. ■

**Exercice** Trouver les fonctions propres de  $-\Delta f = \lambda f$  pour  $f(x, y, z)$  en Coordonnées Cartésiennes et sur une domaine  $D : (x, y, z) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$  avec  $f$  satisfaisant

$$CL : f(0, y, z) = f(L_x, y, z) = f(x, 0, z) = f(x, L_y, z) = f(x, y, 0) = f(x, y, L_z) = 0 \tag{4.205}$$

*Astuce* : Chercher une solution séparable comme en 2D, introduire trois constantes de séparation,  $k^2, l^2$  et  $q^2$ . ■

**Exercice** Trouver les fonctions propres de  $-\Delta f = \lambda f$  pour  $f(r, \theta)$  en Coordonnées Polaires et sur une domaine  $D : (r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi[$  avec  $f$  satisfaisant

$$CL : |f(0, \theta)| = \text{bornée} \quad , \quad f(R, \theta) = 0 \tag{4.206}$$

Chercher la fonction propre sous la forme  $f(r, \theta) = \mathcal{R}(r)\Theta(\theta)$ . La dépendance en  $\theta$  sera la même que dans le problème de Laplace. Pour  $\mathcal{R}(r)$  montrer qu’on trouve l’ED de Bessel

$$\frac{1}{r} (r\mathcal{R}')' - \frac{m^2}{r^2} \mathcal{R} + k^2 \mathcal{R} = 0 \tag{4.207}$$

avec  $m^2, k^2$  deux constantes de séparation. Montrer que l’application des conditions aux limites résulte en

$$\psi_{jm}(r, \theta) = J_m \left( \frac{\zeta_j^m r}{R} \right) e^{im\theta} \quad , \quad \lambda = \left( \frac{\zeta_j^m}{R} \right)^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z} \tag{4.208}$$

comme famille de fonctions propres. Ici  $\zeta_j^m$  sont les racines de la fonction de Bessel  $J_m(\zeta_j^m) = 0$ , schématisées en figure 4.5. Quelques fonctions propres sont visualisées en figure 4.6 ■

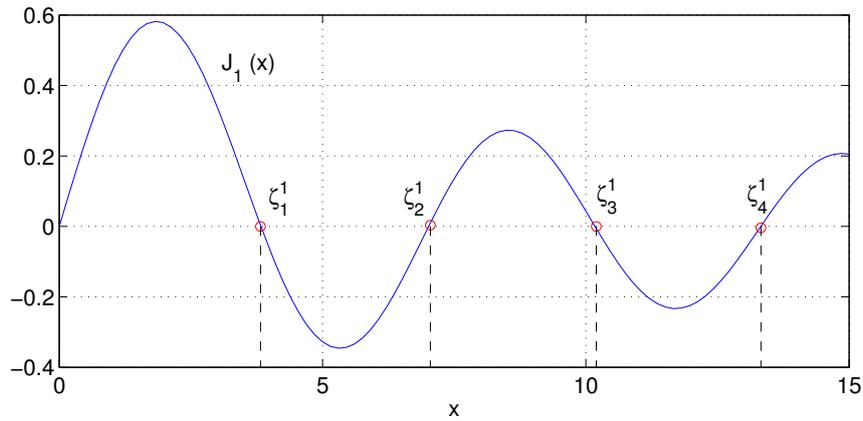


FIGURE 4.5 – Fonction de Bessel  $J_1(x)$  en fonction de  $x$ . On montre ici les zéros  $\zeta_j^1$ , pour  $j = 1, 2, 3, 4$  qui interviennent dans les fonctions propres (4.208)

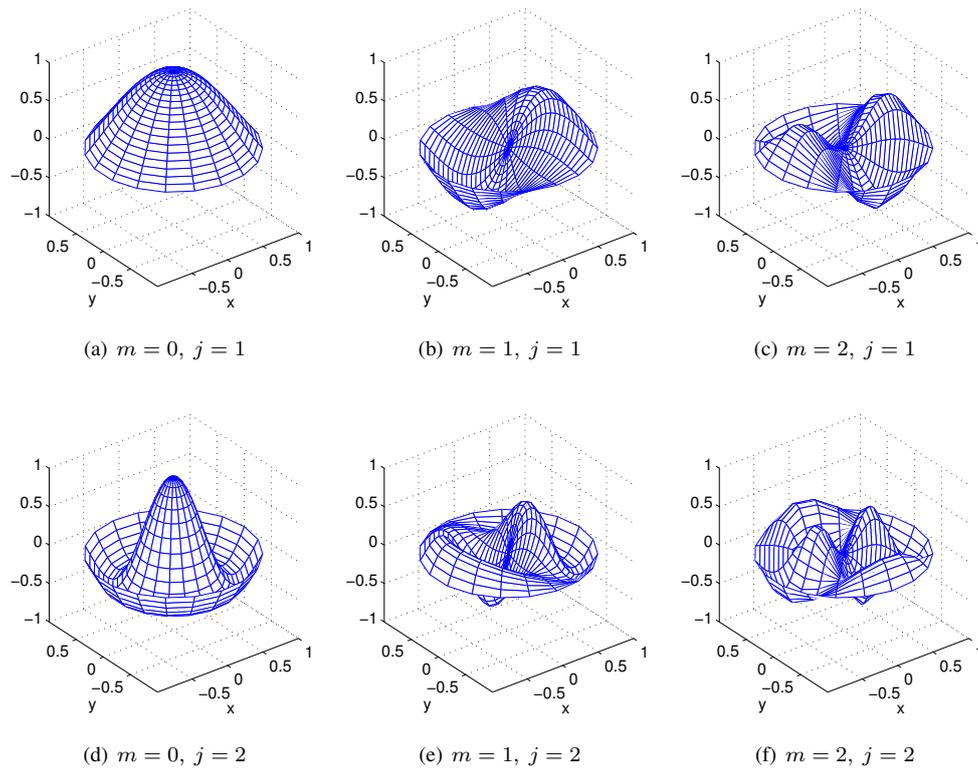


FIGURE 4.6 – Structure spatiale des fonctions  $J_m(\zeta_j^m r/R) \cos(m\theta)$  qui interviennent dans les fonctions propres (4.208). On choisit  $R = 1$  et plusieurs valeurs de  $m$  et  $j$ . Le nombre  $m$  décompte le nombre de longueurs d'onde dans la direction azimutale. Le nombre  $j$  décompte le nombre de fois que la fonction radiale passe par zéro pour  $r \in [0, R]$ .

## 4.5.4 Problème de Poisson

★ **Problème de Poisson.** Une fonction  $f$  solution du problème

$$\Delta f = g \quad (4.209a)$$

dans un domaine  $D$  et avec  $g$  une fonction connue, satisfait un problème de Poisson. Sur le bord du domaine  $\delta D$ , on suppose des conditions limites

$$CL : \alpha f|_{\delta D} + \beta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = h|_{\delta D} \quad (4.209b)$$

avec  $\alpha, \beta, h$  trois fonctions arbitraires continues et  $\vec{n}$  la normale sortante du domaine. ou des conditions de régularité. ■

La solution générale peut être trouvée comme la somme

$$f = f_1 + f_2 \quad (4.210)$$

avec  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= 0, \text{ où } f_1 \text{ satisfait les CL demandées (4.209b)} \\ \Delta f_2 &= g, \text{ où } f_2 \text{ satisfait des CL homogènes (4.182)} \end{aligned} \quad (4.211)$$

On voit bien que la somme des deux équations donne le problème original. La recherche de la solutions  $f_1$  a été traitée dans la section dédiée au problème de Laplace et il sera toujours possible de trouver un  $f_1$  qui satisfait les CL demandées (4.209b). Si  $f_1$  satisfait les conditions aux limites, cela signifie que  $f_2$  est dans l'espace des fonctions  $\mathcal{E}$  des fonctions propres  $\psi_\kappa$  qui satisfont des CL homogènes (4.182). On doit donc, dans un deuxième temps, chercher ces fonctions propres. Une fois qu'on les a trouvé, on propose  $f_2$  comme une expansion sur ces fonctions propres :

$$f_2 = \sum_{\kappa} c_{\kappa} \psi_{\kappa} \quad (4.212)$$

Si on injecte cette proposition de solution dans l'équation  $\Delta f_2 = g$ , on trouve

$$\sum_{\kappa} c_{\kappa} (-\lambda_{\kappa}) \psi_{\kappa} = g \quad (4.213)$$

On projette enfin cette expression sur la base  $\psi_{\kappa}$  avec la relation d'orthogonalité pour trouver les coefficients d'expansion.

$$c_{\kappa} = -\frac{1}{\lambda_{\kappa}} \frac{\langle \psi_{\kappa} | g \rangle}{\langle \psi_{\kappa} | \psi_{\kappa} \rangle} = -\frac{1}{\lambda_{\kappa} N_{\kappa}} \int_D \bar{\psi}_{\kappa} g \, dD \quad (4.214)$$

Après cette étape, la solution  $f = f_1 + f_2$  du problème de Poisson sera donc connue,

**Exercice** Trouver la solution du problème de Poisson

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x e^{x+y} \quad (4.215)$$

muni de conditions aux limites

$$CL : f(0, y) = 0, f(L_x, y) = L_x(1 + y), f(x, 0) = x, f(x, L_y) = x(1 + L_y) \quad (4.216)$$

sur le bord d'un domaine rectangulaire  $D : (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$ . Appliquer la méthode précédente. Commencer par trouver  $f_1$  harmonique et polynomiale en  $x$  et  $y$  (il s'agit d'un cas simple). Puis, chercher  $f_2$  comme une expansion sur les fonctions propres trouvées dans la section précédente. ■

### 4.5.5 Problème de diffusion

★ **Problème de diffusion.** Une fonction  $f$  scalaire satisfait une équation de diffusion si

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta f + q \quad (4.217)$$

avec  $D > 0$  est le coefficient de diffusion et  $q$  une fonction quelconque. Sur le bord du domaine  $\delta D$ , on suppose des conditions limites

$$CL : \alpha f|_{\delta D} + \beta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = h|_{\delta D} \quad (4.218)$$

avec  $\alpha, \beta, h$  trois fonctions arbitraires continues et  $\vec{n}$  la normale sortante du domaine, ou des conditions de régularité. Il est également nécessaire de spécifier une condition initiale

$$CI : f|_{t=t_0} = f_0 \quad (4.219)$$

qui fixe la valeur du champ à  $f_0$  à un instant  $t_0$  donné, partout dans le domaine  $D$ . ■

La solution générale peut être trouvée comme la somme

$$f = f_1 + f_2 \quad (4.220)$$

avec  $f_1$  et  $f_2$  solutions de

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= 0, & \text{où } f_1 \text{ satisfait les CL demandées (4.218)} \\ (\partial_t - D\Delta)f_2 &= q - \partial_t f_1, & \text{où } f_2 \text{ satisfait des CL homogènes (4.182)} \end{aligned} \quad (4.221)$$

On commence par résoudre le problème de Laplace qui donne  $f_1$ . Ensuite, on propose  $f_2$  comme une expansion sur les fonctions propres du Laplacien

$$f_2 = \sum_{\kappa} c_{\kappa}(t) \psi_{\kappa} \quad (4.222)$$

Si on injecte cela dans l'EDP pour  $f_2$ , on obtient

$$\sum_{\kappa} (\dot{c}_{\kappa} + D\lambda_{\kappa} c_{\kappa}) \psi_{\kappa} = q - \partial_t f_1 \quad (4.223)$$

Par une projection sur les fonctions propres, on obtient un système d'EDO's linéaires pour les coefficients d'expansion

$$\dot{c}_{\kappa} + D\lambda_{\kappa} c_{\kappa} = N_{\kappa}^{-1} \langle \psi_{\kappa} | q - \partial_t f_1 \rangle \quad (4.224)$$

On peut intégrer cette équation dans le temps, si on connaît une condition initiale pour chaque  $c_{\kappa}$ . Cela se trouve en exprimant la condition initiale (4.219) qui deviendra

$$f_1|_{t_0} + \sum_{\kappa} c_{\kappa}(t_0) \psi_{\kappa} = f_0 \quad (4.225)$$

Après projection sur la famille des fonctions propres, on obtient

$$CI : c_{\kappa}(t_0) = N_{\kappa}^{-1} \langle \psi_{\kappa} | f_0 - f_1|_{t_0} \rangle \quad (4.226)$$

La solution est donc connue "formellement".

**Exercice** En absence de sources  $q = 0$  et pour des conditions limites homogènes, le champ  $f$  décroît par les modes propres de diffusion. Donnez le taux de décroissance temporelle du mode propre de diffusion qui a une structure spatiale proportionnelle à  $\psi_{\kappa}$ . ■

**Exercice** On se place dans un contexte d'un domaine spatiale  $D : x \in [0, L]$  à une dimension. On imagine qu'il s'agit d'une paroi solide qui conduit la chaleur. L'équation de diffusion que la température  $T(x, t)$  doit satisfaire dans cette paroi est

$$\partial_t T = \kappa \partial_{xx}^2 T \quad (4.227)$$

avec  $\kappa$  la diffusivité thermique du matériau. Sur les bords du mur, on suppose des conditions aux limites

$$CL : -\kappa \partial_x T(0, t) = \Phi, \quad T(L, t) = 0 \quad (4.228)$$

Ici  $\Phi$  est un flux de chaleur supposé constant qui entre en  $x = 0$ . En  $x = L$ , on suppose un bain isotherme à température nulle. On dispose également d'une condition initiale

$$CI : T(x, 0) = 0 \quad (4.229)$$

Chercher d'abord la solution  $T_1$  solution du problème de Laplace et la faire respecter les conditions aux limites. Trouver ensuite les fonction propres du Laplacien  $\psi_m(x)$  solutions de

$$-\partial_{xx}^2 \psi = \lambda \psi, \quad CL : \partial_x \psi(0) = 0, \quad \psi(L) = 0 \quad (4.230)$$

Proposer la relation d'orthogonalité des fonctions  $\psi_m$ , puis appliquer la méthode précédente d'expansion sur les fonctions propres pour trouver une solution pour  $T_2$ . Autrement dit, proposer

$$T_2(x, t) = \sum_m c_m(t) \psi_m(x) \quad (4.231)$$

et trouver le système d'EDO pour les coefficients d'expansion  $c_m(t)$ . Trouver la solution générale de ces EDO's. Imposer enfin la condition initiale du problème

$$T_1(x, 0) + T_2(x, 0) = 0 \quad (4.232)$$

afin d'y isoler des conditions initiales pour  $c_m(0)$ . Proposer enfin la solution du problème  $T(x, t)$ . ■

#### 4.5.6 Problème d'onde

★ **Problème d'onde.** La fonction  $f$  satisfait une équation d'onde si

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f + s \quad (4.233)$$

Ici  $c$  est la vitesse des ondes (non-dispersives) et  $s$  une source. Ce problème est souvent accompagné de conditions de Dirichlet, Neumann ou mixte en paroi, c.a.d. de la forme

$$CL : \alpha f|_{\delta D} + \beta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f|_{\delta D} = h|_{\delta D} \quad (4.234)$$

Ces conditions traduisent alors un comportement particulier de réflexion d'une onde arrivant en paroi ou comment la paroi agit en tant que source. D'ordre 2 en temps, nous avons également besoin de deux conditions initiales :

$$CI : f|_{t=t_0} = f_0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_0} = g_0 \quad (4.235)$$

si on souhaite spécifier comment le système évolue au temps ultérieur.  $f_0$  et  $g_0$  sont alors deux fonctions indépendantes du temps et connues dans tout le domaine  $D$ . ■

La solution générale peut être trouvée comme la somme

$$f = f_1 + f_2 \quad (4.236)$$

avec  $f_1$  et  $f_2$  solutions de

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= 0, \text{ où } f_1 \text{ satisfait les CL demandées} \\ (c^{-2}\partial_{tt}^2 - \Delta)f_2 &= s - \partial_{tt}^2 f_1, \text{ où } f_2 \text{ satisfait des CL homogènes} \end{aligned} \quad (4.237)$$

On commence par résoudre le problème de Laplace qui donne  $f_1$ . Ensuite, on propose  $f_2$  comme une expansion sur les fonctions propres du Laplacien

$$f_2 = \sum_{\kappa} c_{\kappa}(t)\psi_{\kappa} \quad (4.238)$$

Si on injecte cela dans l'EDP pour  $f_2$ , on obtient

$$\sum_{\kappa} (c^{-2}\dot{c}_{\kappa} + \lambda_{\kappa}^2 c_{\kappa})\psi_{\kappa} = s - \partial_{tt}^2 f_1 \quad (4.239)$$

Après projection sur les fonctions propres, ça donne un système d'EDO's linéaires découplé

$$\ddot{c}_{\kappa} + \lambda_{\kappa}^2 c_{\kappa} = N_{\kappa}^{-1} \langle \psi_{\kappa} | s - \partial_{tt}^2 f_1 \rangle \quad (4.240)$$

que l'on peut résoudre, si on ajoute deux conditions initiales.

**Exercice** Montrer comment l'expression des conditions initiales (4.235) donne, après projection sur les fonctions propres, des conditions initiales pour  $c_{\kappa}(t_0)$  et  $\dot{c}_{\kappa}(t_0)$ . ■

**Exercice** En absence de sources  $s = 0$  et pour des conditions limites homogènes, le champ  $f$  sera composé d'ondes stationnaires. Donner la fréquence d'oscillation de l'onde stationnaire qui a une structure spatiale proportionnelle à  $\psi_{\kappa}$ . ■

## 4.6 Fonctions de Green

### 4.6.1 Principe de la méthode

Selon le principe de Huygens qu'on rencontre en optique ondulatoire, le champ d'onde émanant d'une source étendue est celui qu'on trouve en remplaçant la source par un ensemble de sources ponctuelles. Les fonctions de Green correspondent un peu à la formalisation et à la généralisation de cette idée à d'autres EDP (ou EDO's) linéaires qui ont des termes sources.

Mathématiquement, on décompose le terme source sur des sources élémentaires (des  $\delta$ -Dirac) et chacune de ces sources élémentaires contribue pour une infime partie à la solution à travers une fonction de Green. En pratique, la solution du problème s'exprime à l'aide d'une intégrale qui superpose toutes les contributions provenant des sources élémentaires.

Il est possible de définir des fonctions de Green dans des domaines de taille finie et infinies et pour de diverses EDP's linéaires. La présence de conditions aux limites aux bords d'un domaine fini rend les fonctions de Green plus complexes et pas si pratiques pour exprimer la solution. Ci dessous on donne quelques exemples de fonctions de Green pour le problème de Poisson et comment celles-ci permettent de trouver la solution.

### 4.6.2 Fonctions de Green du problème de Poisson

Le problème de Poisson  $\Delta f = g$  a été défini en (4.209) dans le cas d'un domaine fini. Si le domaine est de taille infinie, on souhaite souvent que  $|f|$  reste bornée pour  $||\vec{r}'|| \rightarrow +\infty$  et on doit alors s'assurer du fait que  $g$  décroît suffisamment rapidement pour  $\vec{r}' \rightarrow \infty$ . On spécifiera ce que signifie suffisamment rapidement dans les exemples.

Pour mettre en place la méthode, on commence par décomposer le terme source sous la forme

$$g(\vec{r}) = \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') g(\vec{r}') d\tilde{V} \quad (4.241)$$

Cette expression est exacte et reflète une décomposition de la source en une infinité de sources ponctuelles (les  $\delta$ -Dirac). Si on cherche la solution sous la forme d'une intégrale

$$f(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') g(\vec{r}') d\tilde{V} \quad (4.242)$$

L'EDP  $\Delta f = g$  semble pouvoir être satisfaite si

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.243)$$

On appelle  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  la fonction de Green et elle dépend de deux arguments spatiaux. Cette fonction donne la partie de solution en  $\vec{r}$  provoquée par une source élémentaire placée en  $\vec{r}'$ . Suite à la symétrie du  $\delta$ -Dirac, on doit toujours avoir  $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$ . Cette solution doit également satisfaire des conditions aux limites sur le bord  $\vec{r} \in \delta D$  du domaine ou doit décroître suffisamment rapidement à l'infinie (précisé en bas) si le domaine est de taille infinie.

Si on est capable de calculer cette fonction de Green  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , on pourra immédiatement donner la solution sous la forme (4.242) et parfois il sera possible de calculer l'intégrale exactement.

### Exemple en 1D

Dans le cas 1D on cherche la solution de  $\partial_{xx}^2 f = g$ . Dans cet exemple, on considère le cas d'un domaine fini  $x \in [0, L]$  avec des CL de Dirichlet homogènes sur les bords :

$$CL : f(0) = 0, \quad f(L) = 0 \quad (4.244)$$

Clairement la méthode la plus simple serait d'intégrer deux fois l'équation  $\partial_{xx}^2 f = g$  selon  $x$ , mais voyons ce que donne la méthode qui passe par la fonction de Green. On cherche la solution de

$$\frac{d^2 G(x, \tilde{x})}{dx^2} = \delta(x - \tilde{x}) \quad (4.245)$$

avec les conditions aux limites

$$CL : G(0, \tilde{x}) = 0, \quad G(L, \tilde{x}) = 0 \quad (4.246)$$

Partout ailleurs qu'en  $x = \tilde{x}$ , la fonction de Green satisfait  $d^2 G(x, \tilde{x})/dx^2 = 0$  et cela laisse la possibilité d'avoir

$$G = \begin{cases} A_- x + B_- & , \quad x < \tilde{x} \\ A_+(L - x) + B_+ & , \quad x > \tilde{x} \end{cases} \quad (4.247)$$

On admet une forme différente selon  $x$  plus grand ou plus petit que  $\tilde{x}$ . Les conditions aux limites en  $x = 0, L$  donnent immédiatement  $B_- = B_+ = 0$ . On exige la continuité de  $G(x, \tilde{x})$  en  $x = \tilde{x}$  :

$$A_- \tilde{x} = A_+(L - \tilde{x}) \quad \Leftrightarrow \quad A_- = \frac{A}{\tilde{x}}, \quad A_+ = \frac{A}{(L - \tilde{x})} \quad (4.248)$$

Ceci permet d'exprimer  $A_{\pm}$  en fonction d'une seule constante  $A$  qu'il nous reste à fixer. Pour la fixer, on intègre l'équation différentielle initiale (4.245) sur un intervalle  $[\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$  autour de  $\tilde{x}$ . Suite à la définition du  $\delta$ -Dirac, ça donne :

$$\int_{\tilde{x}-\epsilon}^{\tilde{x}+\epsilon} \frac{d^2 G(x, \tilde{x})}{dx^2} dx = \underbrace{\int_{\tilde{x}-\epsilon}^{\tilde{x}+\epsilon} \delta(x - \tilde{x}) dx}_{=1}$$

soit

$$\left[ \frac{dG(x, \tilde{x})}{dx} \right]_{\tilde{x}-\epsilon}^{\tilde{x}+\epsilon} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_+ + A_- = 1 \quad (4.249)$$

En résulte

$$A = \frac{\tilde{x}(L - \tilde{x})}{L} \quad (4.250)$$

La fonction de Green est ici trouvée comme

$$G(x, \tilde{x}) = \begin{cases} \frac{(L - \tilde{x})x}{L} & , \quad x < \tilde{x} \\ \frac{(L - x)\tilde{x}}{L} & , \quad x > \tilde{x} \end{cases} \quad (4.251)$$

On constate bien la symétrie  $G(x, \tilde{x}) = G(\tilde{x}, x)$ . Si la méthode est correcte, la solution du problème de Poisson est donc

$$f(x) = \int_0^L G(x, \tilde{x}) g(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^x \frac{(L-x)\tilde{x}}{L} g(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_x^L \frac{(L-\tilde{x})x}{L} g(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (4.252)$$

Faisons un test de la méthode. Avec  $g(x) = 1$ , la solution exacte du problème  $\partial_{xx}^2 f = 1$  avec  $f(0) = 0$  et  $f(L) = 0$  doit être  $f(x) = x(x-L)/2$ . On calcule les deux intégrales qui apparaissent dans la formule de ci-dessus :

$$\int_0^x \frac{(L-x)\tilde{x}}{L} d\tilde{x} = (L-x) \frac{x^2}{2L} \quad (4.253)$$

$$\int_x^L \frac{(L-\tilde{x})x}{L} d\tilde{x} = \frac{x}{L} \left[ -\frac{(L-\tilde{x})^2}{2} \right]_x^L = \frac{x(L-x)^2}{2L} \quad (4.254)$$

Leur somme donne

$$f(x) = (L-x) \frac{x^2}{2L} + \frac{x(L-x)^2}{2L} = \frac{x(L-x)}{2} \left( \frac{x}{L} + \frac{(L-x)}{L} \right) = \frac{x(L-x)}{2} \quad (4.255)$$

c.a.d. la bonne solution, en effet. Cet exemple démontre que la méthode fonctionne.

### En 2D, géométrie infinie

En 2D, géométrie infinie, on peut se passer des problèmes spécifiques liés aux conditions aux limites. On souhaite résoudre

$$\Delta f = g \quad (4.256)$$

avec  $|f|$  bornée pour  $\|\vec{r}\| \rightarrow +\infty$ . La fonction de Green est la solution de

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^2(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.257)$$

et la fonction  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  doit décroître suffisamment rapidement pour  $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \rightarrow +\infty$ . Si le domaine est infiniment grand, cela simplifie la donne car une source élémentaire  $\delta^2(\vec{r} - \vec{r}')$  placée à un endroit affectera son voisinage de manière similaire qu'une source élémentaire placée à un autre endroit. Autrement dit, suite à cette symétrie de translation, on peut chercher

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.258)$$

La fonction  $G$  ne dépendra que de l'écart  $\vec{r} - \vec{r}'$  entre la position  $\vec{r}'$  de la source élémentaire et l'endroit  $\vec{r}$  où on souhaite connaître sa contribution au le champ  $f$ . Cela signifie également qu'on peut se limiter à résoudre

$$\Delta G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta^2(\vec{r} - \vec{r}') \Leftrightarrow \Delta G(\vec{r}) = \delta^2(\vec{r}) \quad (4.259)$$

Il suffit de connaître  $G(\vec{r})$  correspondant à la contribution d'une source élémentaire et  $\vec{r}' = \vec{0}$ , pour connaître la fonction de Green partout. Une deuxième simplification émane du faite que la fonction  $\delta^2(\vec{r})$  est symétrique par rotation. Cela implique que

$$G(\vec{r}) = G(\|\vec{r}\|) = G(r) \quad (4.260)$$

La recherche de la fonction de Green se fait donc naturellement en coordonnées polaires et seule une dépendance en  $r$  est attendue. En résumé, cela signifie qu'il nous reste à résoudre

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dG}{dr} \right) = \delta^2(\vec{r}) \quad (4.261)$$

ce qui ne pose plus trop de problème. Partout ailleurs qu'à l'origine  $r = 0$ , on a  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dG}{dr} \right) = 0$  ce qui donne la solution

$$G(r) = A + B \ln r \quad (4.262)$$

Clairement cette fonction ne décroît pas pour  $r \rightarrow +\infty$  donc il pourrait y avoir un problème, mais pas nécessairement, comme on le verra. On intègre (4.261) sur le disque de rayon  $r = \epsilon$  et cela donne

$$\int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dG}{dr} \right) r dr d\theta = \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \delta^2(\vec{r}) r dr d\theta \quad (4.263)$$

soit

$$2\pi \left[ r \frac{dG}{dr} \right]_0^\epsilon = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{1}{2\pi} \quad (4.264)$$

La solution est donc

$$G(r) = A + \frac{\ln r}{2\pi} \quad (4.265)$$

et la constante  $A$  reste indéterminée. Surprenant, mais cela découle uniquement du fait que les conditions aux limites sur  $f$  sont restées vagues elles aussi. Si on accepte cette fonction de Green, on vient donc de trouver la solution du problème de Poisson en 2D. On aura

$$f(\vec{r}) = \int_S G(\|\vec{r} - \vec{r}'\|) g(\vec{r}') d\tilde{S} = \underbrace{A \int_S g(\vec{r}') d\tilde{S}}_B + \frac{1}{2\pi} \int_S \ln(\|\vec{r} - \vec{r}'\|) g(\vec{r}') d\tilde{S} \quad (4.266)$$

La liberté qu'on a sur la constante  $A$ , reflète une liberté sur le champ  $f$ . Si on ne donne pas de conditions aux limites à l'infini, alors en effet,  $f$  est déterminée à une constante additive prêt. Souvent on voudra que  $f \rightarrow 0$  suffisamment loin de la zone où la source  $g$  est non-nulle. Cela signifie donc que  $A = 0$  convient dans la fonction de Green et on n'en parlera donc plus. La forme plus standard de la solution est donc

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_S \ln(\|\vec{r} - \vec{r}'\|) g(\vec{r}') d\tilde{S} \quad (4.267)$$

Le domaine d'intégration  $S : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  étant infiniment grand, la convergence de l'intégrale est à vérifier. Comme appris dans la première partie du cours, la convergence d'une intégrale impropre dépend du comportement de l'intégrand au loin pour  $\|\vec{r}'\| \rightarrow +\infty$  et comme  $d\tilde{S} = \tilde{r} d\tilde{r} d\theta$  le meilleur équivalent de cet intégrand sera  $\ln(\tilde{r}) g \tilde{r}$  pour  $\tilde{r} \rightarrow \infty$ . Selon le critères de convergence de Riemann et Bertrand, il faut que

$$\ln(\tilde{r}) g \tilde{r} \simeq \frac{1}{\tilde{r}^\alpha |\ln \tilde{r}|^\beta \dots} \quad (4.268)$$

avec  $\alpha > 1$  (ou  $\alpha = 1, \beta > 1$ , ou  $\dots$ , p.52 du poly d'algèbre) si on se limite au cas le plus restrictif. Avec

$$|g(r, \theta)| < r^{-2} \quad (4.269)$$

pour  $r \rightarrow +\infty$ , on assure la convergence de l'intégrale. En principe, il est également nécessaire de formuler des critères de convergence pour traiter les pôles (finies) éventuelles de l'intégrande, mais cela semble dépendre trop du détail de  $g$  pour être discuté en longueur ici.

### En 3D, géométrie infinie

En trois dimensions en un domaine infinie, le calcul de la fonction de Green est assez similaire qu'en 2D. Suite à la symétrie de rotation de  $\delta^3(\vec{r})$  on peut chercher  $G = G(r)$  solution de

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) = \delta^3(\vec{r}) \quad (4.270)$$

Attention,  $r$  est cette fois-ci le rayon sphérique. On résolve d'abord cette équation, loin de l'origine (avec membre de droite donc égal à zéro). La partie constante dans la solution sera ignorée (même phénomène qu'en 2D). Ensuite, il faut intégrer l'équation différentielle de ci-dessus, sur une sphère de rayon  $\epsilon$  afin de fixer la constante et cela nous donne la fonction de Green.

**Exercice** Montrer que la fonction de Green du problème de Poisson vaut

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (4.271)$$

en 3D. Ecrire la solution du problème de Poisson  $f$ . Spécifier le comportement au loin de  $g$  afin de pouvoir espérer une intégrale convergente. ■

## 5. Au delà

Les méthodes présentées en cours sont des méthodes standards. On peut les compléter de manière significative mais en 10h de cours, il est difficile de faire plus. Vous imaginez d'ailleurs bien qu'il existe encore d'autres méthodes pour trouver des solutions d'équations différentielles. Ci dessous une liste non exhaustive de ce qu'on n'a pas pu traiter ici.

### 1. Transformations intégrales

La transformée de Fourier et la transformée de Laplace sont deux exemples de transformations intégrales. Elles seront traitées au deuxième semestre. Ces transformations intégrales permettent parfois de trouver plus facilement des solutions particulières de systèmes d'EDO's linéaires et inhomogènes.

### 2. Analyse complexe & fonctions holomorphes

Dans l'analyse complexe des fonctions  $f(z)$  d'un argument complexe  $z = x + iy$  avec  $z \in \mathbb{C}$  on rencontre les fonctions holomorphes. Il s'agit (très brièvement) de fonctions dont on peut calculer une dérivée complexe dans le plan complexe. Ces fonctions holomorphes ont la particularité d'avoir  $\phi(x, y) = \operatorname{Re}(f)$  et  $\psi(x, y) = \operatorname{Im}(f)$  telles que  $\Delta\psi = \Delta\phi = 0$ . L'analyse complexe peut donc servir à trouver des solutions de problèmes de Laplace en 2D.

### 3. Méthodes perturbatives

Dans de nombreux problèmes, on rencontre des équations différentielles avec des termes trop complexes pour pouvoir admettre une solution simple. Toutefois, ces termes complexes peuvent être plus petites et ceci est exploité dans une méthode perturbative. L'idée est de commencer par résoudre le problème non perturbé, sans le terme complexe. On admet ensuite des petites modifications de la solution, ordonnées par importance décroissante. Ces corrections se calculent un par un, en cascade et ainsi on est capable de donner une solution approchée du problème, avec le terme complexe. Cette méthode est souvent utilisée en mécanique quantique mais intervient également en mécanique classique.

### 4. Solutions locales & expansions asymptotiques raccordées

Parfois une equation différentielle est dominée par certains termes à un endroit de l'espace et par d'autres à un autre endroit de l'espace. L'idée est de chercher des formes dominantes de la solution valables dans ces régions différentes, puis de les lier par la méthode de raccordement asymptotique.

### 5. *Solutions auto-semblables*

Certaines équations admettent des solutions auto-semblables. Il s'agit de solutions qui gardent une même forme sous un changement d'échelle spatiale ou temporelle. Ce type de solution est souvent observé en physique non-linéaire, mais existe aussi dans des équations linéaires. Un exemple bien connu est le suivant : une tâche initiale de forme Gaussienne garde sa forme Gaussienne lorsqu'elle s'étale par diffusion. Lors de la recherche de solutions auto-semblables on arrive à réduire la dimensionnalité du problème. Par exemple, une EDP pourra se transformer en une EDO en limitant la recherche de solutions à des solutions auto-semblables.

### 6. *Approximations numériques*

La théorie de l'approximation numérique est extrêmement vaste. Par les méthodes des différences finies, des volumes finies, des éléments finis, des méthodes spectrales ou des méthodes particulières, voir statistiques, il est possible de discrétiser une équation différentielle partielle en un énorme système d'équations différentielles ordinaires. Résoudre des systèmes d'équations différentielles de dimension  $n > 10^6$  ne pose plus aucun problème pour les ordinateurs de nos jours et cela explique l'essor de la simulation numérique dans les études physiques et dans l'ingénierie.

Ces différentes méthodes mathématiques plus avancées seront introduites dans des cours spécialisés qui vous attendent.