Université Paris-Saclay **Année 2023-24**
L3 Physique -DLPC **Mathématiques I**

TD équations différentielles

TD 1 : EDO's

Exercice 1 : linéaire ou non-linéaire

Déterminer le caractère linéaire ou non-linéaire des EDO's suivantes :

1. $x^2y' = (\cos x)y - 4$
2. $y^{-1}y'' = \tan x$
3. $y''' + y''y + yx = 0$
4. $x^2y'' + xy' + y = 0$

Exercice 2 : solutions

Trouver la solution des EDO's suivantes

1. $y' = -y + x \quad , \quad CI \ : \ y(0) = 1$
2. $y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 0 \quad , \quad CI \ : \ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 1 \ , \ y''(0) = 0.$
3. L'équation différentielle

   $$(3x^3 + 4xy)y' + 4x^2y + 2y^2 = 0$$

   devient exacte après multiplication par un facteur intégrant du type $M(x, y) = x^\alpha y^\beta$. Trouver les valeurs $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ adéquates en exprimant la condition d'exactitude, puis trouver la solution du problème. Imposer enfin la condition initiale $CI \ : \ y(1) = 1$.
4. $y' = y - y^5 \quad , \quad CI \ : \ y(0) = y_0 > 0.$
5. $y^4y' + x\cos x = 0$

Exercices supplémentaires

Trouver la solution des EDO's

1. $y''' - y = x + 1$
2. $x^2\,y\,y' + x\,y^2 + x = 0 \quad , \quad CI : \ y(1) = 1$
3. $y' = \frac{y}{x^2} + \sin t$
4. $y'' - y = e^{-4x} + x$
5. $y' = y - y^4 \quad , \quad CI : \ y(0) = 1$
6. $2x\,y\,y' + \cos x - x\sin x + y^2 = 0$

7. On suit la position d'une masse m avec le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i}$. Un ressort de longueur d'équilibre L et de raideur k exerce une force de rappel $\vec{F}_1 = -k(x-L)\,\vec{i}$ sur la masse. Une deuxième force oscillante s'applique sur la masse $\vec{F}_2 = A\cos(\omega_f t)\,\vec{i}$.

   (a) Ecrire la loi de Newton et réorganiser l'équation afin d'arriver sur une EDO de la forme

   $$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 L + a\cos(\omega_f t)$$

   Spécifier ω, a en fonction de m, k, A. On supposera dans toute la suite que $\omega \neq \omega_f$.

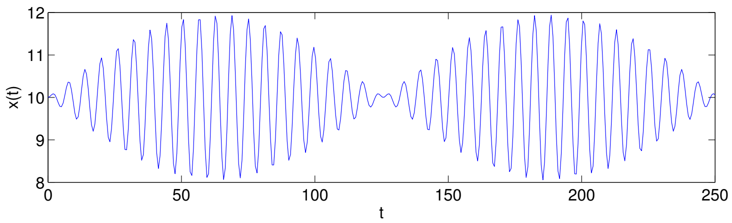
   (b) Trouver la solution générale de l'EDO précédent.

   (c) On suppose qu'à temps $t = 0$ la masse est en $x = L$ et au repos. Ecrire les conditions initiales pour $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ et imposer les à la solution.

   (d) Récrire la solution trouvée à l'aide des formules trigonométriques

   $$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad , \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

   Le but est de montrer l'existence d'une fréquence de battement $(\omega - \omega_f)/2$ qui sera faible lorsque ω est proche de ω_f. Le phénomène des battements est illustré ci-dessous.



   (e) Pouvez-vous trouver la solution à la résonance pour $\omega = \omega_f$?
   <u>Astuce :</u> une partie de la solution sera composé de fonctions $t\cos\omega t$ ou $t\sin\omega t$.

TD 2 : Fonctions propres

Exercice 1 : ondes sur une corde de guitare

On s'intéresse à la modélisation des vibrations d'une corde de guitare de longueur L. On modélise les déformations $h(x,t)$ de la corde par une équation d'onde :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

pour $x \in [0, L]$ et tout temps t. Ici $c = \sqrt{T/\mu}$ est la vitesse de l'onde, avec T (en N) la tension et μ la masse par unité de longueur (en kg/m). En toute rigueur, il s'agit ici d'une équation différentielle partielle, mais on limitera notre étude aux ondes stationnaires ayant la forme

$$h(x,t) = \psi(x)\cos(\omega t + \chi)$$

Ici $\omega = 2\pi/T$ est à déterminer avec T la période et χ une phase arbitraire. Comme tous les joueurs de guitare le savent, la vibration de la corde provoque un son composé de plusieurs fréquences, toutes des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Cela signifie qu'il existe plusieurs solutions de type onde stationnaire, ayant chacun leur fréquence propre. Le but de l'exercice est de les identifier.

1. Injecter la proposition de solution d'onde stationnaire dans l'équation d'onde afin de trouver l'EDO à satisfaire par ψ. Noter $k^2 = \omega^2/c^2$.
2. Une corde de guitare est tendue sur deux extrémités immobiles. En déduire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.
3. Montrer qu'il existe une famille de solutions, les fonctions propres

   $$\psi_n(x) = N_n \ldots$$

   qui se laissent dénombrer par n un entier strictement positif. Le facteur N_n est un facteur de normalisation qu'on fixera plus bas.
4. A chaque fonction propre $\psi_n(x)$ est associée une onde stationnaire

   $$\psi_n(x)\cos(\omega_n t + \chi) \tag{1}$$

   Que valent les fréquence de vibration propres $f_n = \omega_n/(2\pi)$, les longueur d'ondes propres $\lambda_n = 2\pi/k_n$ de chacune de ces ondes stationnaires. Vérifier que le produit $f_n\lambda_n$ est constant pour tout n, pourquoi ?
5. Schématiser les 3 premières ondes stationnaires avec les fréquences les plus basses.
6. Suite aux propriétés générales d'un problème de type Sturm Liouville, les fonctions propres sont orthogonales vis à vis d'un produit hermitien bien spécifique, ici

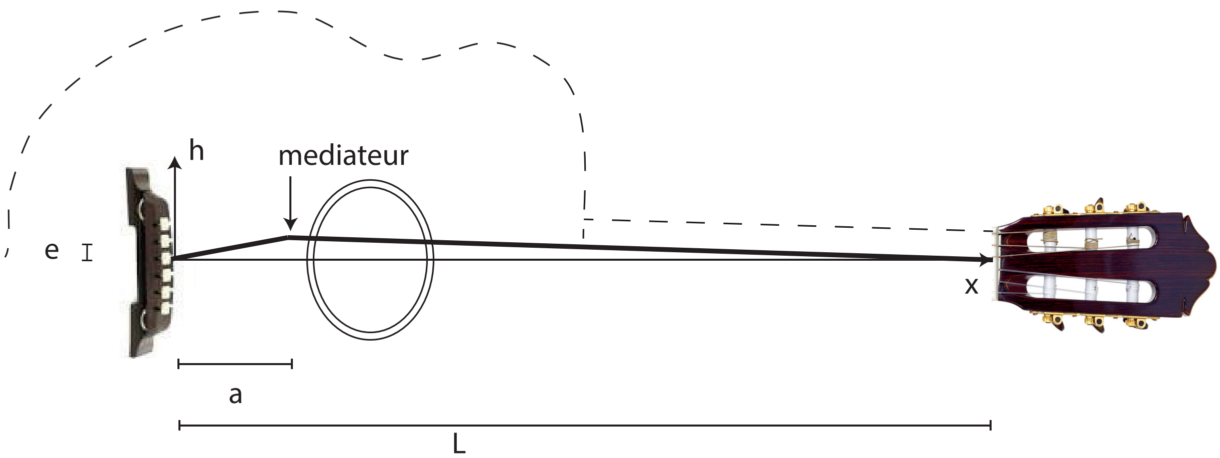
   $$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}$$

   Vérifier l'orthogonalité des fonctions propres pour $n \neq m$ et utiliser cette relation pour calculer le facteur de normalisation N_n.

La famille des fonctions propres trouvée forme une base complète pour décrire une déformation arbitraire de la corde. Cela signifie que l'expansion

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \chi_n)\,\psi_n(x)$$

sur la base des fonctions propres est une solution exacte de l'équation d'onde. Ici ω_n et ψ_n sont connus pour chaque n, pour chaque onde stationnaire, mais chaque onde peut encore avoir une amplitude A_n et phase χ_n arbitraire. Ici, on montre comment un jeu de conditions initiales fixe A_n et χ_n. A l'instant initial $t = 0$, on imagine lâcher la corde de guitare brusquement de la position marquée dans la figure de ci-dessous.



Ceci simule l'effet d'un médiateur ou d'un doigt qui déforme la corde et la relâche.

1. Montrer que le choix $\chi_n = 0$ pour tout n convient afin de réaliser la condition initiale que la corde est lâchée à vitesse initiale verticale nulle.
2. La forme intiale correspond un succession de deux segments droits. Trouver les équations de ces deux droites afin de pouvoir remplir

$$h(x,0) = \begin{cases} \dots \quad , & 0 < x < a \\ \dots \quad , & a < x < L \end{cases}$$

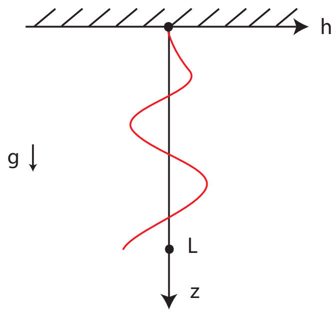
   en accord avec les notations du schéma.
3. Pour faire satisfaire cette deuxième condition initiale, on doit calculer les amplitudes A_n tels que

$$h(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\, \psi_n(x)$$

   L'orthogonalité des fonctions propres permet de calculer les coefficients (de Fourier généralisé) A_n par le calcul d'une intégrale. Trouver la formule adéquate, puis (bonus) calculer explicitement A_n

Exercice 2 : ondes sur une corde pesante

Toujours dans le contexte des ondes, on considère un problème un peu plus difficile où les ondes se propagent sur une corde pesante de longueur L. Cela est schématisée dans la figure de ci-dessous.



Contrairement à la guitare, la force de tension dans la corde pesante dépend de la position. Tout en bas, la corde n'est pas tendue car libre. En haut, la force de tension est maximale car à ce point la corde porte tout son propre poids. Ainsi, la vitesse d'onde varie le long de la corde, de zéro en bas à $\sqrt{gL}$ en haut avec g la gravité. A partir de considérations purement mécaniques, on montre que les faibles déviations transversales de la corde $h(z,t)$ sont solution de l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[g(L-z)\frac{\partial h}{\partial z}\right]$$

Comme dans l'exercice précédent, on cherche la famille des ondes stationnaires de la forme

$$h(z,t) = \psi(z)\cos(\omega t + \chi)$$

qui cette fois-ci se laissent écrire à l'aide de fonctions de Bessel.

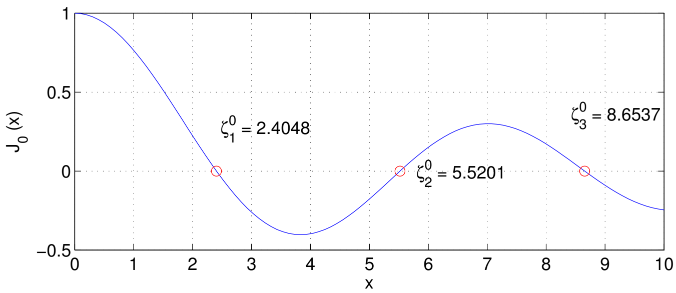
1. Ecrire l'EDO que $\psi(z)$ doit satisfaire.
2. Montrer que le changement de variable $s = \alpha\sqrt{L-z}$ permet de ramener l'équation différentielle à une ED de type Bessel :

   $$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} + \psi = 0$$

   Identifier α en fonction de ω, g. Identifier aussi la valeur du paramètre m dans l'équation de Bessel donnée dans le poly.
3. Proposer la solution générale de cette équation à l'aide des fonctions de Bessel de premier et deuxième type. Exprimer cette solution dans la variable z.
4. La solution doit être régulière sur le domaine $z \in [0, L]$. Que peut-on déduire ?
5. Imposer les conditions aux limites pour $\psi(z)$ dans le point d'attache en $z = 0$. Montrer que cela nécessite que

   $$J_0\left(\frac{2\omega\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\right) = 0$$

   Comme le montre la figure ci-dessous

   La fonction de Bessel $J_0(x)$ a sa n-ième racine dans le point $x = \zeta_n^0$. Donner la fréquence d'oscillation $f_n = \omega_n/(2\pi)$ de la n-ième onde stationnaire.
6. Ecrire au propre la famille des fonctions propres trouvée. A l'aide de la figure précédente on peut imaginer la structure spatiale des ondes stationnaires. Schématiser les ondes stationnaires pour $n = 1, 2$. Si la déviation de la corde (rouge) sur la page précédente serait une onde stationnaire, que vaudrait n dans ce cas ?
7. Le problème des ondes stationnaires étant un problème de type Sturm-Liouville, on a la garantie que les fonctions propres seront orthogonales. Donner la relation d'orthogonalité qui sera valable ici.
8. Donner la forme générale de la déviation de la corde pesante $h(z,t)$ comme une expansion sur les ondes stationnaires.

Exercices supplémentaires

1. On cherche à résoudre le problème à valeurs propres suivant

   $$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

   avec $x \in [1, e]$, muni de deux conditions aux limites homogènes

   $$CL \;:\; y(1) = 0 \quad , \quad y'(e) = 0$$

   avec e la constante e.

(a) Multiplier l'EDO par une fonction x^α avec α à identifier, afin de pouvoir la mettre sous la forme d'une équation de type Sturm-Liouville. Identifier les fonctions $p(x), q(x), w(x)$.
Astuce : Il faut choisir α afin que première et deuxième dérivée puisse se rassembler sous la forme $-(py')'$ pour une certaine fonction $p = p(x)$.

(b) Un changement de variable qui $x = x(s)$ permet de ré-écrire le problème sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} + \lambda y = 0$$

identifier ce changement de variable

(c) Trouver les fonctions propres $\psi_n(x)$ et les valeurs propres λ_n. Prévoir N_n un facteur de normalisation.

(d) Démontrer que les fonctions propres sont effectivement orthogonales :

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_w = \delta_{nm}$$

Utiliser cette relation pour fixer la norme N_n.

2. On étudie le problème aux valeurs propres

$$-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x^2 y = \lambda y$$

avec $x \in]-\infty, +\infty[$. Nous voulons que

$$CL \ : \ \lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0$$

Ce problème aux valeurs propres apparait en mécanique quantique lors de l'étude de l'oscillateur harmonique et vous permet de découvrir les polynômes de Hermite.

(a) Si on note $\psi_n(x)$ les fonctions propres de ce problème, écrire la relation d'orthogonalité qu'elles devront satisfaire.

(b) Montrer que $\psi_0(x) = \exp(-x^2/2)$ est une fonction propre de l'équation. Trouver la valeur propre λ_0 associée.

(c) On cherche les autres fonctions propres sous la forme

$$\psi_n(x) = H_n(x)\, \psi_0(x)$$

Ecrire l'équation différentielle pour $H_n(x)$.

(d) Trouver les quatre premières fonctions propres $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, comme des polynômes de dégrée 0,1,2 et 3. Identifier les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ associées et la tendance λ_n observée.

(e) Supposant que toutes les $H_n(x)$ suivent cette tendance, montrer que nous pouvons alors déduire que

$$H_{n-1} = C H_n'$$

avec C une constante arbitraire. Montrer également que

$$H_{n+1} = 2x H_n - H_n'$$

Vérifier que la valeur propre λ_{n+1} est compatible avec la tendance observée plus haut.

(f) Montrer à partir de la relation précédente que

$$H_{n+1} = -e^{x^2} \frac{\mathrm{d}(H_n e^{-x^2})}{\mathrm{d}x}$$

et plus explicitement que

$$H_n = (-1)^n \, e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}$$

la formule de Rodriguez pour les polynômes de Hermite.

TD 3 : Systèmes d'EDO's

Exercice 1 : système linéaire inhomogène

Nous considérons le système linéaire suivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad CI \ : \ \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le but de l'exercice est de trouver la solution du problème qui satisfait la condition initiale. Procédez selon les étapes suivantes

1. Trouver la solution homogène $[x_h(t), y_h(t)]^T$
2. Trouver une solution particulière sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

3. Imposer la condition initiale pour fixer les constantes arbitraires qui apparaissent dans la solution homogène.

Exercice 2 : système non-linéaire & cycle limite

Considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x + y - x(x^2+y^2) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -x + y - y(x^2+y^2) \end{aligned}$$

munis d'une condition initiale : $x(0) = R_0$, $y(0) = 0$. où $R_0 \ll 1$. Il s'agit d'un problème non-linéaire qui à priori semble difficile à résoudre. Pour cette raison, nous souhaitons d'abord trouver une solution approchée, au voisinage de l'origine $x = y = 0$, pour $x \ll 1, y \ll 1$. Dans cette limite, on peut ignorer les termes non-linéaires et on parle du problème linéarisé

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} &= \tilde{x} + \tilde{y} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} &= -\tilde{x} + \tilde{y} \end{aligned}$$

avec la même condition initiale $\tilde{x}(0) = R_0$, $\tilde{y}(0) = 0$

1. Trouver la solution $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ du problème linéarisé et l'écrire sous forme réelle.
   Dessiner la courbe $\vec{r}(t) = \tilde{x}(t)\vec{e}_x + \tilde{y}(t)\vec{e}_y$ dans le plan.
2. Pour résoudre le problème non-linéaire, on propose le changement de variables suivant

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad , \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

   Substituer ces relations dans le système non-linéaire et isoler un système d'EDO's pour $r(t)$ et $\theta(t)$ qui sera de la forme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = f(r) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C \tag{2}$$

   Identifier la fonction $f(r)$ et la constante C. Spécifier les conditions initiales sur $r(0)$ et $\theta(0)$. Trouver la solution du problème. Dessiner la courbe $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ dans le plan pour $t \in [0, 2\pi]$. Expliquer pourquoi on parle d'un **cycle limite** dans la limite $t \to +\infty$.

Exercices supplémentaires

1. Trouver la solution générale de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta-1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

avec $\delta > 0$ un paramètre.

2. Trouver la solution unique du problème

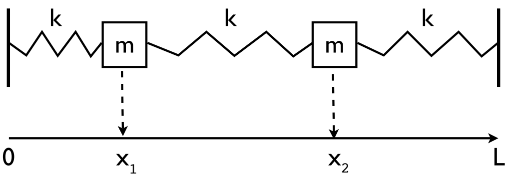
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad CI \ : \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Nous souhaitons résoudre le système linéaire d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \delta \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Choisir δ pour que la solution comporte un terme qui croit exponentiellement comme e^t. Déterminer ensuite la solution du problème. Spécifier pour quel genre de conditions initiales, la solution ne croitra pas plus vite que e^t aux temps longs.

4. Nous souhaitons étudier le système masse-ressort du diagramme de ci-dessous :



Deux masses identiques m sont tenues par trois ressorts à la constante de raideur k entre deux deux parois placées en $x = 0$ et $x = L$. Les positions des deux masses sont suivies par les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ qui peuvent varier au cours du temps t. Un peu de mécanique élémentaire (PFD) nous permet de trouver les deux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(L - x_2) \end{aligned}$$

Nous choisissons $m = 1$, $k = 1$ et $L = 1$ pour fixer un cas d'étude.

(a) Ecrire ce système d'EDO's d'ordre 2, comme un système d'EDO's d'ordre 1 de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

Le vecteur d'état $\mathbf{Y}$ sera choisi la forme

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

avec $v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2$ les vitesses des deux masses. Identifier la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur colonne $\mathbf{B}$

(b) Physiquement, on s'attend à trouver quel genre de solutions ? Pouvez-vous déjà donner une idée sur la variation temporelle de la solution à laquelle on s'attend.

(c) Obtenir la solution homogène du problème à l'aide de la méthode des valeurs/vecteurs propres.
Astuce : cette solution peut se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} C_k \begin{bmatrix} 1 \\ (2+\lambda_k^2) \\ \lambda_k \\ \lambda_k(2+\lambda_k^2) \end{bmatrix} e^{\lambda_k t}$$

(d) Trouver une solution particulière. Expliquer sa signification physique dans ce problème.

(e) Proposer une forme équivalente de la solution dans laquelle n'apparaissent que des constantes arbitraires réelles et des fonctions trigonométriques. Interprétez physiquement les deux types de solutions.

TD 4 : EDP's d'ordre 1

Exercice 1 : Méthode des caractéristiques

Utiliser la méthode des caractéristiques pour trouver les solutions des EDP's suivantes

1. *Equation d'advection*
   On appelle

   $$\partial_t f + u\,\partial_x f = 0$$

   avec $u > 0$ l'équation d'advection. Trouver sa solution générale, puis représenter graphique $f(x,t)$ en fonction de x pour quelques valeurs de t, choisissant une forme initiale Gaussienne. Représenter les lignes caractéristiques dans un plan x (horizontal) -t (vertical).
2. *Etirement compression*
   On appelle

   $$\vec{u} = \gamma x \vec{e}_x - \gamma y \vec{e}_y$$

   un écoulement d'étirement compression. Ici $\gamma > 0$ est un taux d'étirement. La fonction $f(x,y,t)$ satisfait une équation de transport

   $$\partial_t f + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$$

   Trouver la solution générale. Que devient la fonction $f(x,y,0) = x^2 + y^2$ à des instants ultérieures.
3. *Equation de conservation*
   L'équation

   $$\partial_t f + \partial_x(f \cos x) = 0$$

   est un exemple d'une équation de conservation. L'intègrale de f sur un domaine $\mathcal{D}(t)$ dont tous les points se déplacent à vitesse $\dot{x} = \cos x$ reste conservée. Trouver la solution de ce problème.

Exercice 2 : Solution séparable et caractéristiques

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle partielle (EDP)

$$(ax - bxy)\frac{\partial f}{\partial x} - (ay - bxy)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Cette équation différentielle partielle est séparable et admet également une solution séparable

1. Trouver la solution générale du problème par la méthode des caractéristiques.
2. Proposer une solution séparable $\Psi(x,y) = X(x)Y(y)$ à l'EDP (3). Diviser par le bon facteur pour arriver sur le format

   $$\underbrace{\ldots}_{f\ de\ x} = \underbrace{\ldots}_{f\ de\ y}$$

   introduire une constante de séparation $\lambda \in \mathbb{R}$ afin d'obtenir deux équations différentielles linéaires du premier ordre, une pour $X(x)$ et une autre pour $Y(y)$. Qu'est-ce que vous constatez ? Trouver la former générale de la solution séparable. Vérifier que celle-ci est bien de la forme prédite par la méthode des caractéristiques.

Exercices supplémentaires

1. Trouver la solution de $T'(x)\partial_t f + \partial_x f = 0$ avec $T(x)$ arbitraire.
2. Utiliser la méthodes des caractéristiques pour trouver la solution des EDPs suivants
   (a) $x\partial_x f + y\partial_y f = 0$
   (b) $\partial_t f + x\partial_x f + y\partial_y f = 0$
   (c) $\partial_t f - y\partial_x f + x\partial_y f = 0$
   (d) Dans le cas (b), que devient la fonction à $t = 0$, $f(x, y, 0) = x^2 + y^2$ à un temps ultérieur.
   (e) Dans le cas (c), que devient la fonction à $t = 0$, $f(x, y, 0) = xy$ à un temps ultérieur.

3. Dans l'exercice 1.2 on vous a demandé de trouver la solution de $\partial_t f + \partial_x(f \cos x) = 0$. Montrer que la solution explicite s'obtient plus facilement en cherchant $f(x, t) = q(x, t)/\cos x$.
4. (Exercice défi) On considère le système dynamique

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(t, \vec{x})$$

qui contrôle l'évolution d'un vecteur d'état $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Ici $\vec{u}$ est un champ vectoriel dans un espace à n dimensions. On introduit $p(t, \vec{x})$ le distribution de probabilité d'observer l'état du système dans un voisinage $d^n\vec{x}$ de $\vec{x}$) à l'instant t. Cette distribution satisfait l'équation de Liouville généralisée :

$$\partial_t p + \vec{\nabla} \cdot (p\vec{u}) = 0$$

Dans l'exercice sur le cycle limite du TD 2, on a rencontré le système

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} &= u_r = r - r^3 \\ \dfrac{rd\theta}{dt} &= u_\theta = -r \end{cases} \tag{4}$$

et on a donc un champ de vitesse $\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_r$ en coordonnées polaires. L'opérateur divergence en coordonnées polaires est

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}$$

   (a) Trouver l'équation de Liouville associée au système (4).
   (b) Proposer

$$p(r, \theta, t) = \frac{q(r, \theta, t)}{r^2 - r^4}$$

   comme solution et montrer que la fonction $q(r, \theta, t)$ satisfait l'EDP

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (r - r^3)\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

   (c) Utiliser la méthode des caractéristiques pour trouver la forme générale de q afin de montrer que la distribution de probabilité générale sera de la forme

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{r^2 - r^4}\; g(\underbrace{t + \theta}_{\Psi(t,\theta)}, \underbrace{\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}e^{-t}}_{\Phi(t,r)}) \tag{5}$$

   avec g une fonction arbitraire de deux arguments. On utilisera les fonctions $\Psi(t, \theta)$ et $\Phi(t, r)$ dans la suite.
   (d) A l'instant initial, on suppose une probabilité uniforme sur le disque de rayon a

$$p(r, \theta, 0) = \frac{1}{\pi a^2}H(a - r)$$

   avec H la fonction de Heaviside et $a < 1$. Imposer cette condition initiale pour identifier la fonction $g(\Psi, \Phi)$. Donner la forme ultérieure de la distribution de probabilité

TD 5 : EDP's d'ordre 2

Exercice 1 : Solutions séparables du problème de Laplace

On cherche $f(x, y)$, solution du problème de Laplace en coordonnées Cartésiennes (x, y)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1. Retrouver la forme générale des solutions séparables.
   Une solution ondulatoire en x sera comment en y et vice-versa.
2. Le domaine est une bande horizontale, $D \ : \ x \in]-\infty, +\infty[\ , \ y \in [0, 1]$

   $$CL \ : \ f(x, 0) = \cos^2 x \quad , \quad \partial_y f(x, 1) = 0 \quad , \quad \lim_{x\pm\to\pm\infty} f(x, y) \text{ ne diverge pas}$$

   Donner la solution du problème comme une superpositions de quelques solutions séparables.

De la même manière, on cherche $f(r, \theta)$, solution du problème de Laplace en coordonnées polaires (r, θ)

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

dans les cas suivants de domaines D et conditions aux limites.

3. Retrouver la forme générale des solutions séparables. La périodicité en θ contraint la constante de séparation, comment.
4. Le domaine est l'extérieur du cercle de rayon R, $D \ : \ r \in [R, +\infty[\ , \ \theta \in [0, 2\pi]$. Sur les bords du cercle et à l'infini, on souhaite

   $$CL \ : \ f(R, \theta) = \sin\theta\cos\theta + 1 \quad , \quad \lim_{r\to+\infty} f(r, \theta) = \text{bornée}$$

   Proposez la solution comme une superposition de solutions séparables.

Exercice 2 : Ondes stationnaires dans un aquarium

Cet exercice est le pendant 2D de l'exercice sur la corde de guitare. Un aquarium rectangulaire de dimensions latérales L_x, L_y est rempli d'une couche de fluide de hauteur H au repos. On s'intéresse à caractériser les ondes de gravité dans cet aquarium. On note $h(x, y, t)$ l'élévation de la surface d'eau par rapport à la hauteur de repos H. Si on suppose $H \ll L_x, L_y$ et $h \ll H$, alors on montre à partir des équations de la mécanique des fluides que $h(x, y, t)$ satisfait :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

pour tout $\vec{r} \in D$: $(x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$. Ici $c = \sqrt{gH}$ est la vitesse de propagation des ondes de gravité avec g l'accélération gravitationnelle. On suppose cette équation satisfaite sur le rectangle D. Les bords de l'aquarium sont imperméables : ceci requiert que

$$CL \ : \ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} h\Big|_{\vec{r}\in\delta D} = 0$$

avec $\vec{n}$ la normale à la paroi. On cherche à identifier la famille des ondes stationnaires et leur fréquences d'oscillation. On appelle onde stationnaire toute solution de la forme

$$h(x, y, t) = \psi(x, y)\cos(\omega t + \chi)$$

avec $\psi(x, y)$ la structure spatiale de l'onde, $\omega = 2\pi f$ et f la fréquence. χ est une phase arbitraire. On notera $\omega^2/c^2 = k^2$.

1. Montrer que ψ est une fonction propre de l'opérateur Laplacien.

2. Proposer $\psi(x,y)$ comme une solution séparable et séparer l'EDP pour ψ. Introduire des constantes de séparation k_x, k_y, telles que $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ et trouver la solution générale des EDO's pour tout k_x, k_y.
3. Imposer les conditions aux limites, afin d'identifier les nombres d'ondes k_x, k_y et alors fréquences ω admises en fonction de deux nombres m, n entiers. Définir la famille des fonctions propres $\{\psi_{mn}(x,y)\}$
4. Faire 3 schémas qui montrent les 3 ondes avec les plus grandes structures spatiales.
5. Donner la relation d'orthogonalité des fonctions propres.
6. Proposer une déformation générale $h(x,y,t)$ comme une expansion sur les fonctions propres trouvées.
7. On suppose l'aquarium sépare à l'instant initiale en deux parties par une plaque étanche d'épaisseur négligeable placé en $x = L_x/2$. A gauche de la planche, le niveau d'eau est $H+\delta$, à droite $H-\delta$. Que devient la surface $h(x,y,t)$ si on retire brusquement (infiniment rapidement) la plaque ? Expliquer comment on peut calculer les amplitudes et phases des ondes stationnaires dans l'expansion.

Exercices supplémentaires

1. Trouver la solution $f(x,y)$ du problème de Laplace dans le domaine, $D\ :\ x \in [0,\pi]\ ,\ y \in [0,\pi]$ avec

$$CL\ :\ f(x,0) = \sin 3x \quad , \quad f(x,\pi) = \sin x \quad , \quad f(0,y) = 0 \quad , \quad f(\pi,y) = 0$$

sur les bords. Proposer la solution comme une superposition de 2 solutions séparables, $f = f_1 + f_2$ qui satisfont séparément

$$\begin{array}{llll} f_1(x,0) = \sin 3x & , \quad f_1(x,\pi) = 0 & , \quad f_1(0,y) = 0 & , \quad f_1(\pi,y) = 0 \\ f_2(x,0) = 0 & , \quad f_2(x,\pi) = \sin x & , \quad f_2(0,y) = 0 & , \quad f_2(\pi,y) = 0 \end{array}$$

sur les bords.

2. Trouver la solution $f(r,\theta)$ du problème de Laplace en coordonnées polaires et dans un domaine de forme annulaire, $D\ :\ r \in [R_1, R_2]\ ,\ \theta \in [0, 2\pi]$. Sur les deux bords circulaires, on souhaite

$$CL\ :\ f(R_1,\theta) = \cos 3\theta \quad , \quad f(R_2,\theta) = \sin 4\theta$$

Chercher la solution comme une solution de 2 solutions séparables, $f = f_1 + f_2$ avec

$$\begin{array}{lll} CL\ : & f_1(R_1,\theta) = \cos 3\theta & , \quad f_1(R_2,\theta) = 0 \\ & f_2(R_2,\theta) = 0 & , \quad f_2(R_2,\theta) = \sin 4\theta \end{array}$$

3. Le "handdrum" est un instrument de percussion qui ressemble à un membrane tendu sur un coté d'un anneau rigide de rayon R. Des ondes peuvent se propager sur ce membrane et on peut les modéliser comme des déformations $h(r,\theta,t)$ transverses qui satisferont l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}$$

ici exprimées en coordonnées cylindriques. On note $c = \sqrt{\gamma/\delta}$ la vitesse d'onde, où γ est la tension de surface (en N/m) de la membrane et δ la masse par unité de surface (en kg/m^2). Comme dans l'exercice de l'aquarium on cherche des ondes stationnaires de la forme

$$h(r,\theta,t) = \psi(r,\theta)\cos(\omega t + \chi)$$

avec $\psi(r,\theta)$ la structure spatiale de l'onde, $\omega = 2\pi f$ et f la fréquence. χ est une phase arbitraire.

(a) Montrer que les fonctions ψ sont des fonctions propres du Laplacien. Ecrire l'EDP que ψ doit satisfaire. Noter $k^2 = \omega^2 c^2$.

(b) Proposer ψ comme une solution séparable. Utiliser la périodicité de l'onde pour choisir la constante de séparation. Montrer que la structure radiale est solution d'une ED de Bessel. Donner enfin la forme générale de la solution séparable.

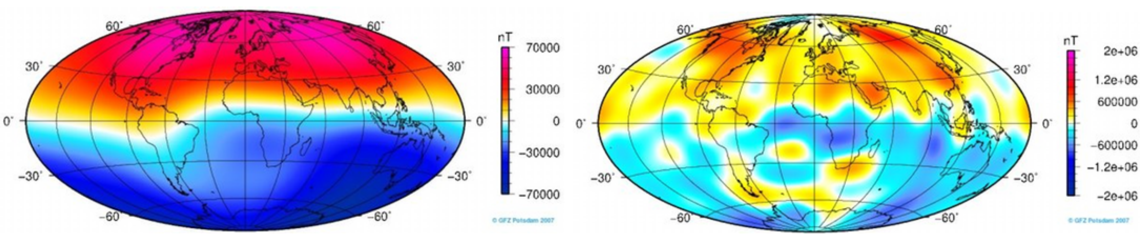
(c) Exprimer la condition aux limites en $r = R$ et la condition de régularité en $r = 0$.

(d) Montrer que les ondes stationnaires sont de la forme

$$\psi_{jm}(r,\theta) = J_m\left(\zeta_j^m \frac{r}{R}\right) e^{im\theta}$$

avec J_m une fonction de Bessel et ζ_j^m la j-ième racine de la fonction de Bessel J_m. Que vaut la fréquence de l'onde ψ_{jm}.

4. Grâce à des mesures obtenus dans des stations de mesures parsemées sur terre, on connait le champ magnétique terrestre partout sur sa surface. Dans cet exercice, on compare ce champ magnétique de surface avec celui qui règne à l'interface noyau-manteau, visualisé ci-dessous



A gauche on voit l'intensité du champ magnétique radial B_r à la surface de la terre en $r = R_{terre} = 6370\ km$. A droite celle qu'on a à l'interface noyau-manteau, pour $r = R_{noyau} = 3480 km$ (source : GFZ Potsdam). Dans cet exercice, on cherche à comprendre pourquoi le champ en surface semble beaucoup moins finement structuré que celui sur l'interface noyau manteau, comme le montre les figures.

(a) A l'extérieur du noyau terrestre, pour $r \in [R_{noyau}, +\infty[$ le champ magnétique terrestre $\vec{B}$ est irrotationnel : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$. Expliquer pourquoi on a le droit de proposer $\vec{B} = \vec{\nabla}\Psi$ avec Ψ un potentiel magnétique.

(b) Le champ magnétique $\vec{B}$ est toujours solénoidal : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Montrer que cela implique que potentiel magnétique Ψ satisfait alors le problème de Laplace.

(c) Trouver la solution générale $\Psi(r,\theta,\phi)$ d'un problème de Laplace en coordonnées sphériques dans votre polycopier.

(d) Imposer dans cette solution la régularité à l'infinie où on veut que $\vec{B}$ disparaisse.

(e) Les mesures du champ magnétique sur la surface de la terre fixent la valeur du potentiel magnétique à la surface de la terre :

$$\Psi(R_{terre},\theta,\phi) = R_{terre} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{n} g_n^m\, P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

et ces coefficients g_n^m sont connus. Donner le potentiel magnétique pour tout $r \in [R_{noyau}, +\infty[$.

(f) Exprimer la composante radiale du champ magnétique à deux endroits

$$\begin{aligned} B_r(R_{terre},\theta,\phi) &= \ldots \\ B_r(R_{noyau},\theta,\phi) &= \ldots \end{aligned}$$

(g) A partir de ces formules, expliquer pourquoi le champ magnétique à l'interface noyau-manteau est beaucoup plus finement structuré que le champ magnétique en surface.