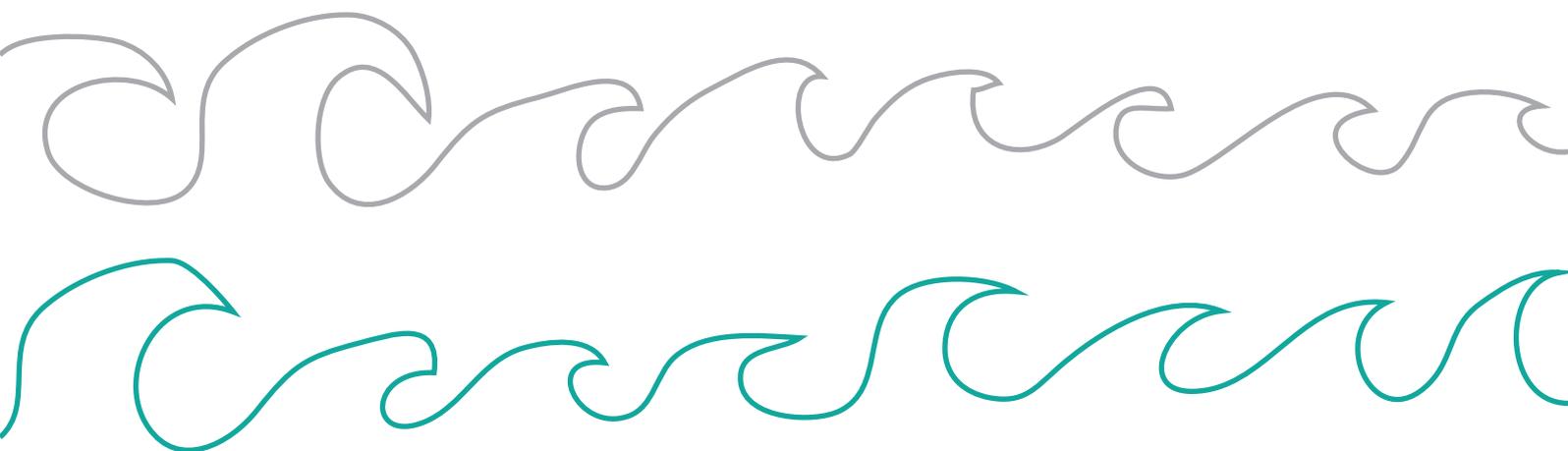


# Mécanique des fluides

M1 FONDA, MAG 2, ENS Physique, année 2023-2024

[wietze.herreman@universite-paris-saclay.fr](mailto:wietze.herreman@universite-paris-saclay.fr)



2024 Wietze Herreman

[HTTP ://PERSO.LIMSI.FR/WIETZE/](http://perso.limsi.fr/wietze/)

Je remercie Cyprien Morize, Caroline Nore et Marc Rabaud pour la relecture, Frédéric Moisy pour m'avoir donné l'opportunité d'enseigner ce cours, Marc Rabaud pour des discussions intéressantes et la base des énoncés de TD, Liesbeth Vannol pour son soutien général. Ce polycopier est inspiré de différentes sources

1. Polycopier mécanique des fluides de F. Moisy (enseignant avant 2018) ([lien au pdf](#)), 2017, F. Moisy
2. Hydrodynamique physique, E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, 2012, EDP Sciences.
3. Mécanique des fluides (Eléments d'un premier parcours), P.Chassaing, 2010, Cépadués.
4. Le calcul vectoriel en physique, J. Hladik, 1993, Ellipses.
5. NACA0015 Measurements in LM Wind Tunnel and Turbulence Generated Noise, F. Bertagnolio, 2008, DTU.

*Quatrième impression, Janvier 2024*



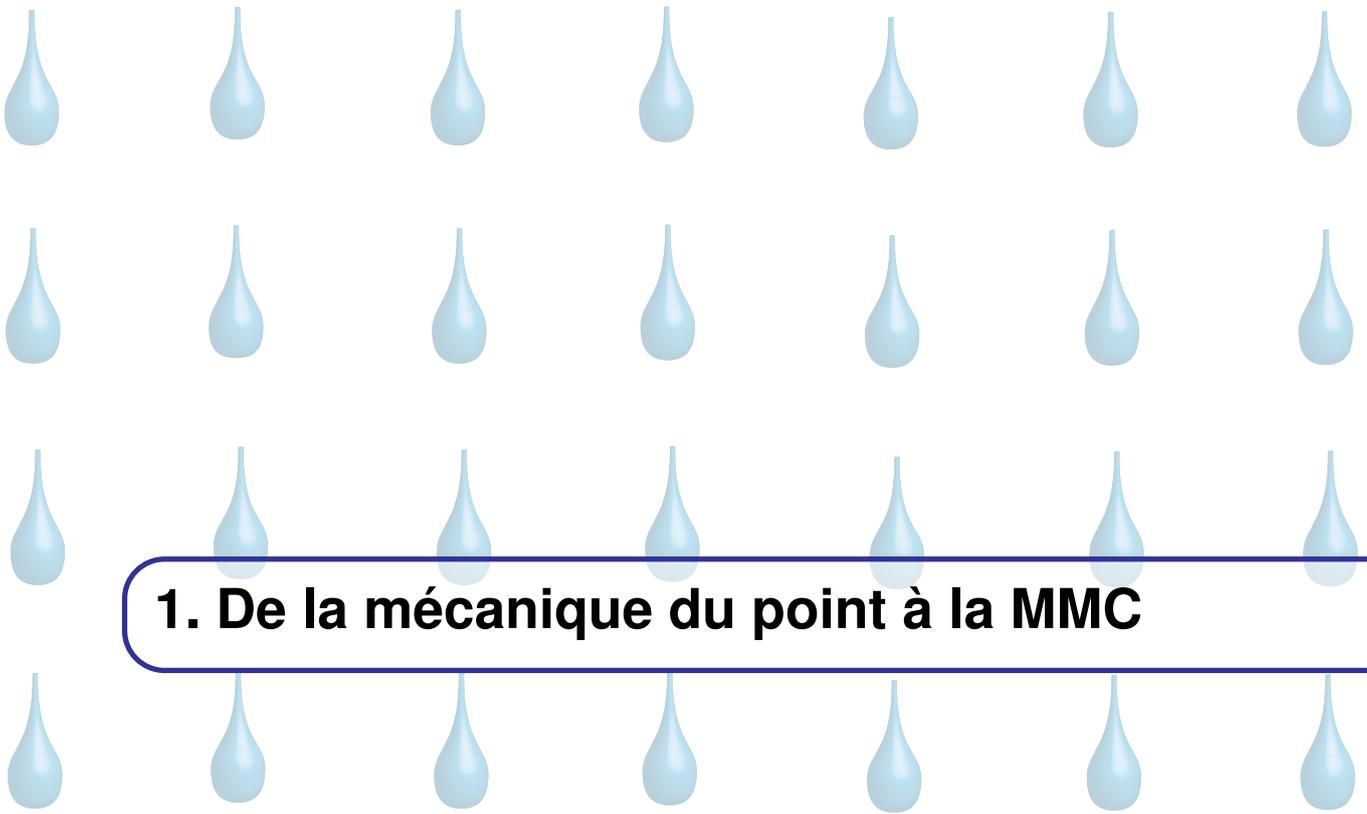
# Table des matières

<b>1</b>	<b>De la mécanique du point à la MMC</b>	<b>7</b>
<b>1.1</b>	<b>Mouvement individuel ou collectif</b>	<b>7</b>
1.1.1	Mouvement individuel	7
1.1.2	Mouvement collectif	8
1.1.3	Du discret au continu	9
<b>1.2</b>	<b>Cinématique des milieux continus</b>	<b>11</b>
1.2.1	Champ de vitesse Eulérien	11
1.2.2	Gradient de vitesse, divergence, vortacité, circulation, flux	11
1.2.3	Ligne de courant, fonction de courant	13
1.2.4	Champ de déplacement	15
1.2.5	Champ matériel et dérivée advective	17
1.2.6	Le Jacobien et la divergence	19
1.2.7	Théorème de transport de Reynolds	21
<b>1.3</b>	<b>Lois fondamentales de la MMC</b>	<b>23</b>
1.3.1	Conservation de la masse	23
1.3.2	Principe fondamental de la dynamique (PFD)	24
1.3.3	Equation d'énergie	28
1.3.4	La symétrie du tenseur des contraintes	31
1.3.5	Résumé	33
1.3.6	Invariance Galiléenne	34
<b>1.4</b>	<b>Bilans sur volume de contrôle</b>	<b>36</b>
<b>2</b>	<b>Ecoulements parfaits incompressibles</b>	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>Le fluide parfait incompressible</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Les équations du modèle</b>	<b>40</b>
2.2.1	Lois d'évolution	40
2.2.2	Conditions aux limites	40

<b>2.3</b>	<b>Théorèmes</b>	<b>41</b>
2.3.1	Loi de Bernoulli ( $v_1$ )	41
2.3.2	Théorème de la circulation de Kelvin	43
<b>2.4</b>	<b>Force de pression sur un obstacle rigide</b>	<b>44</b>
2.4.1	Méthode 1 : calcul direct	44
2.4.2	Méthode 2 : en passant par un bilan	44
2.4.3	Exemple : Force d'un jet axisymétrique qui impacte une plaque plane	45
2.4.4	Paradoxe de d'Alembert	47
<b>2.5</b>	<b>Écoulements potentiels</b>	<b>48</b>
2.5.1	Potentiel hydrodynamique	48
2.5.2	Exemples d'écoulements potentiels élémentaires	49
2.5.3	Loi de Bernoulli ( $v_2$ )	50
2.5.4	Non-unicité du potentiel	50
<b>2.6</b>	<b>Théorie des ailes</b>	<b>51</b>
2.6.1	Introduction	51
2.6.2	Théorème de Kutta-Joukowski	51
2.6.3	Condition de Kutta-Joukowski	53
2.6.4	Portance d'une aile de Joukowski	55
2.6.5	Conclusion	62
<b>3</b>	<b>Écoulements visqueux incompressibles</b>	<b>65</b>
<b>3.1</b>	<b>Le fluide visqueux incompressible</b>	<b>65</b>
3.1.1	Les imperfections de l'écoulement parfait	65
3.1.2	Exemple simple d'un écoulement visqueux : Couette	65
3.1.3	Tenseur des contraintes visqueuses	67
3.1.4	Force visqueuse sur un obstacle	68
3.1.5	Origine microscopique de la viscosité	69
<b>3.2</b>	<b>Le modèle de Navier-Stokes</b>	<b>69</b>
3.2.1	Lois de comportements	69
3.2.2	Lois d'évolution	70
3.2.3	Conditions aux limites	71
3.2.4	Les nombres de Reynolds et de Froude	72
<b>3.3</b>	<b>Écoulements visqueux exactes</b>	<b>73</b>
3.3.1	Écoulements parallèles (Cartésien)	73
3.3.2	Écoulement parallèle (cylindrique)	74
3.3.3	Écoulements tournants	76
<b>3.4</b>	<b>Écoulements dominés par la viscosité : régime de Stokes</b>	<b>79</b>
3.4.1	Equation de Stokes	79
3.4.2	Écoulement visqueux autour d'une sphère	79
3.4.3	Écoulement visqueux autour d'un cylindre : le paradoxe de Stokes	83
<b>3.5</b>	<b>Écoulements dominés par la viscosité : régime de lubrification</b>	<b>84</b>
3.5.1	Écoulements géométriquement contraints	85
3.5.2	Le modèle de lubrification	85
3.5.3	Force de sustentation d'une feuille	88
<b>3.6</b>	<b>Écoulement à grand <math>Re</math> : couches limites</b>	<b>90</b>
3.6.1	Phénoménologie	90
3.6.2	Couche limite de Stokes	91
3.6.3	Couche limite de Blasius	91
3.6.4	Décollement de la couche limite	94
<b>3.7</b>	<b>Écoulements à grand <math>Re</math> : instabilités et turbulence</b>	<b>95</b>
3.7.1	Les instabilités	95
3.7.2	La turbulence	97

<b>4</b>	<b>Interfaces et capillarité</b>	<b>99</b>
<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>99</b>
4.1.1	Hypothèses simplifiantes	99
4.1.2	Définition mathématique d'une surface	99
<b>4.2</b>	<b>La tension de surface</b>	<b>102</b>
4.2.1	Energie potentielle de surface	102
4.2.2	Force capillaire	102
<b>4.3</b>	<b>Conditions aux limites sur une surface libre</b>	<b>104</b>
4.3.1	Surface libre ?	104
4.3.2	Condition aux limites cinématique	104
4.3.3	Condition aux limites dynamique	105
<b>4.4</b>	<b>Conditions aux limites sur une interface</b>	<b>106</b>
4.4.1	Condition aux limites cinématique	106
4.4.2	Condition aux limites dynamique	107
4.4.3	Condition aux limites de continuité de la vitesse	107
<b>4.5</b>	<b>Lignes triples statiques</b>	<b>108</b>
4.5.1	Lignes triples entre trois phases liquides	108
4.5.2	Angle de contact : loi de Young dupré	109
<b>4.6</b>	<b>Quelques applications</b>	<b>109</b>
4.6.1	Le ménisque statique	109
4.6.2	Goutte plate sur une surface non-mouillante	110
4.6.3	Filet de fluide parfait tombant	112
4.6.4	Ondes stationnaires sur filet tombant	114
<b>5</b>	<b>Ecoulements compressibles</b>	<b>119</b>
<b>5.1</b>	<b>Les fluides compressibles</b>	<b>119</b>
5.1.1	Fluide parfait compressible	119
5.1.2	Fluide visqueux compressible	122
<b>5.2</b>	<b>Lois d'évolution pour un fluide parfait qui est un gaz parfait</b>	<b>123</b>
5.2.1	Version primitive	123
5.2.2	Version polytropique	123
5.2.3	Navier-Stokes compressible	125
<b>5.3</b>	<b>Application : les ondes acoustiques</b>	<b>126</b>
<b>A</b>	<b>Calcul vectoriel &amp; tensoriel : rappels ?</b>	<b>129</b>
<b>A.1</b>	<b>Algèbre des vecteurs et des tenseurs</b>	<b>129</b>
A.1.1	Convention de sommation	129
A.1.2	Symboles de Kronecker & de Levi-Civita	130
A.1.3	Algèbre des vecteurs	130
A.1.4	Algèbre des tenseurs	132
<b>A.2</b>	<b>Analyse des vecteurs &amp; des tenseurs</b>	<b>136</b>
A.2.1	Champs scalaires, vectoriels et tensoriels	136
A.2.2	Systèmes de coordonnées	136
A.2.3	Opérateurs différentiels	138
A.2.4	Théorèmes d'intégration	141
<b>B</b>	<b>Formulaire</b>	<b>143</b>





# 1. De la mécanique du point à la MMC

*La mécanique des fluides est une sous-discipline de la mécanique des milieux continus (MMC) qui trouve son origine dans la mécanique de Newton, même si les liens ne sont pas toujours évidents à voir au premier abord. Dans ce chapitre, on tente d'expliquer le passage à la limite continue. On va introduire pour cela les outils cinématiques indispensables et ensuite on va formuler les lois fondamentales de la MMC.*

## 1.1 Mouvement individuel ou collectif

### 1.1.1 Mouvement individuel

Supposons un instant qu'un matériau est un système de  $N$  particules discrètes (classiques) de masse  $m$ , numérotées par l'indice  $i = 1, \dots, N$ , comme schématisé en figure 1.1-(a). Décrire le mouvement de ces particules nécessite de connaître la position  $\vec{r}_i(t)$  et la vitesse  $\vec{v}_i(t)$  de chacune de ces  $N$  particules à chaque instant. Chaque particule  $i$  est soumise à une force extérieure  $\vec{F}_i$  et des forces d'interaction  $\vec{T}_{j \rightarrow i}$  avec ses particules  $j$  voisines. Ce problème à  $N$  corps classiques est décrit par les lois de la mécanique Newtonienne

★ **Problème à  $N$  corps classiques.** Les positions et vitesses des particules  $\forall i = 1, \dots, N$  sont contraintes par

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (1.1a)$$

et la seconde loi de Newton (principe fondamental de la dynamique (PFD))

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i} \quad (1.1b)$$

La troisième loi de Newton (principe d'action-réaction) veut que  $\vec{T}_{j \rightarrow i} + \vec{T}_{i \rightarrow j} = \vec{0}$ . En définissant toutes les forces et les conditions initiales du système

$$\vec{r}_i(t_0) = \vec{R}_i \quad , \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{V}_i \quad (1.1c)$$

on retrouve le problème à  $N$  corps classiques. ■

Ce problème peut se résoudre analytiquement dans certains cas de forces d'interaction mais toujours

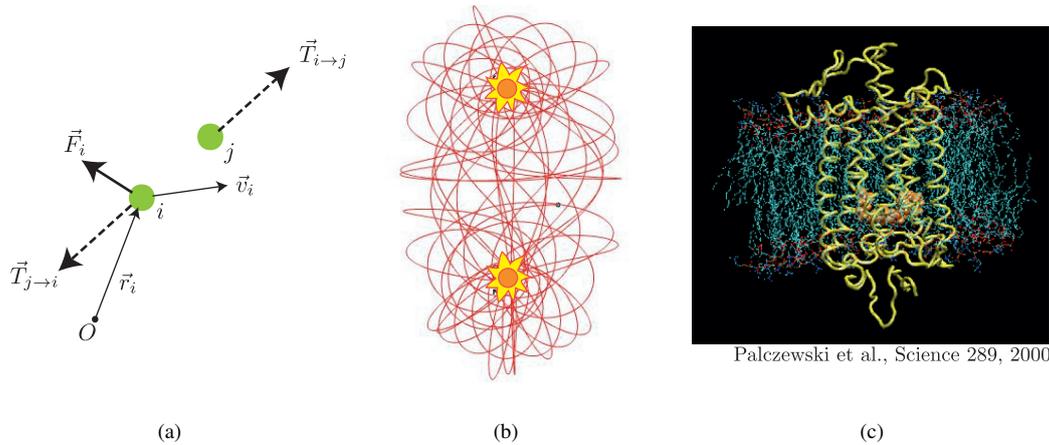


FIGURE 1.1 – Le problème à  $N$  corps classiques. (a) La position  $\vec{r}_i$  et la vitesse  $\vec{v}_i$  des particules varient sous l'influence de forces extérieures  $\vec{F}_i$  et d'interactions mutuelles  $\vec{T}_{j \rightarrow i}$ . (b) exemple  $N = 3$  : une planète qui orbite autour d'une paire d'étoiles. (c) exemple  $N = 10^4 - 10^5$  : simulation de dynamique moléculaire (la molécule rhodopsine).

avec  $N$  très petit ( $N = 2$  pour la mécanique céleste). Cependant une solution numérique peut être obtenue pour  $N$  plus grand. La figure 1.1-(b) montre un exemple d'une trajectoire chaotique obtenue par simulation numérique, d'une planète autour de deux soleils proches ( $N = 3$ ). La figure 1.1-(c), montre un cliché issu d'une simulation de dynamique moléculaire avec  $N = 10^4 - 10^5$  particules, fréquemment utilisée pour simuler le comportement de la matière à l'échelle nano-métrique. Au delà de  $N = 10^6$  à  $10^8$  particules, il devient totalement impossible de résoudre le problème à  $N$  corps, même avec les ordinateurs les plus puissants au monde.

### 1.1.2 Mouvement collectif

A l'échelle macroscopique, un matériau contient trop de particules pour pouvoir espérer décrire leurs mouvements individuels (dans un verre d'eau de 250 ml il y a environ  $N \approx 8 \times 10^{24}$  molécules), mais on imagine facilement qu'un mouvement collectif puisse exister, comme illustré sur la figure (1.2). Sur cette figure, la matière est décrite à trois échelles spatiales différentes, ordonnées telle que

$$L \gg \delta \gg l_c \quad (1.2)$$

A l'échelle macroscopique  $L$  (à gauche sur la figure), la matière semble se déplacer comme un continuum. A chaque endroit de l'espace  $\vec{r}$  et à chaque instant  $t$ , il semble possible de mesurer une vitesse  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  locale qui ne présente aucune trace des vitesses individuelles des particules. A l'échelle microscopique  $l_c$  du *libre parcours moyen* (à droite sur la figure), on observe des collisions individuelles entre particules, sans aucune trace du mouvement moyen. Entre ces deux échelles, il existe une échelle, dite *échelle mésoscopique*  $\delta$ , suffisamment grande pour pouvoir déceler un mouvement collectif mais suffisamment petite pour pouvoir donner l'impression d'un mouvement continu à l'échelle  $L$ .

Pour modéliser le mouvement d'un matériau à l'aide de champs continus, il doit y avoir une séparation d'échelle spatiale importante entre ces mondes macro- et microscopique. Ceci se mesure à l'aide du nombre de Knudsen

#### ★ Nombre de Knudsen.

$$Kn = \frac{l_c}{L} \quad (1.3)$$

Généralement, on accepte que pour  $Kn \ll 10^{-3}$ , le mouvement moyen est un mouvement décelable et significatif. Dans toute la suite, on supposera cette condition satisfaite et on parle de l'hypothèse du milieu

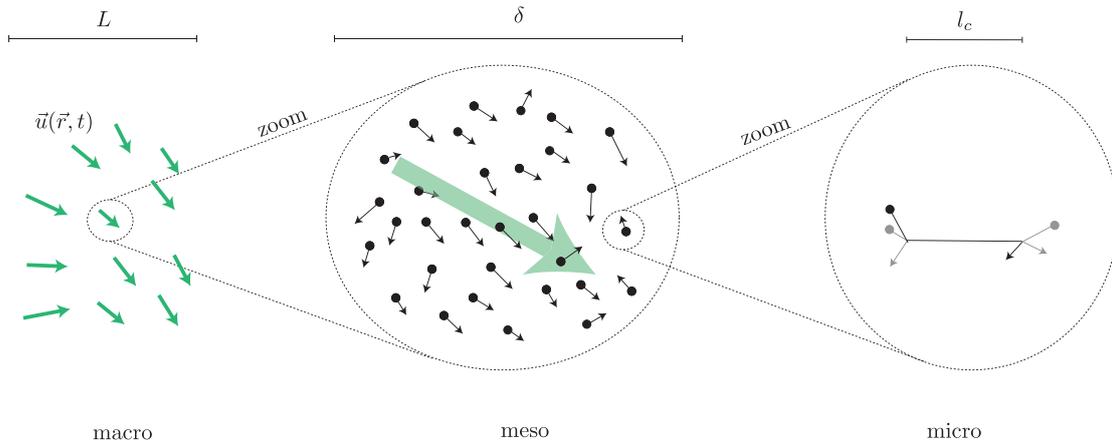


FIGURE 1.2 – Hypothèse du milieu continu. Entre  $l_c$  le libre parcours moyen et  $L$  la longueur macroscopique, il existe une longueur  $\delta$  mésoscopique sur laquelle moyenner prend sens.

*continu*. En considérant cette condition à la lettre ( $L = \delta$ ), on estime que

$$\delta = 10^3 l_c \quad (1.4)$$

serait le plus petit détail décelable dans le mouvement moyen de la matière. C'est cette échelle qu'on assimile à l'échelle infinitésimale dans la modélisation continue. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs typiques pour  $d$ , la distance interparticulaire,  $l_c$  et  $\delta$ , dans de l'eau et de l'air dans des conditions atmosphériques normales et à température ambiante.

	$d$	$l_c$	$\delta$
eau	0.3 nm	0.3 nm	0.3 $\mu$ m
air	3 nm	70 nm	70 $\mu$ m

Le niveau de détail atteignable par l'approche continue est de l'ordre du dixième de micromètre dans l'eau et du dixième de millimètre dans un gaz. En dessous de cette taille, les lois de la mécanique des fluides que l'on va introduire par la suite ne s'appliquent plus et il est préférable de faire de la dynamique moléculaire ou d'utiliser une approche cinétique (branche de la physique statistique).

**R** Dans les milieux dilués tels qu'un gaz à très faible pression, le libre parcours peut atteindre des tailles macroscopiques tel que  $Kn > 10^{-3}$ . Dans ces milieux raréfiés, un modèle de mécanique des milieux continus ne convient pas et il est préférable d'utiliser un modèle microscopique (type dynamique moléculaire) ou une approche cinétique (branche de la physique statistique).

### 1.1.3 Du discret au continu

Que peut-on déduire des lois de Newton microscopiques en appliquant cette hypothèse du milieu continu ? Afin de formaliser la notion d'amas mésoscopique on introduit l'ensemble  $\mathcal{E}$  (*hypothétique*) des indices des  $\delta N$  particules dans un amas situé autour de  $\vec{r}$ .

#### 1. Déplacement moyen et vitesse moyenne

En sommant (1.1a) sur les particules du sous-ensemble  $\mathcal{E}$  de l'amas et en divisant par  $\delta N$  on obtient directement

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\delta N} \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \right)}_{\text{barycentre}} = \underbrace{\frac{1}{\delta N} \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{v}_i}_{\text{vitesse moyenne}} \quad (1.5)$$

Cette équation nous informe que le barycentre de l'amas se déplace donc à la vitesse moyenne des particules qui le compose. La limite continue de cette relation fait le lien entre *le champ de vitesse Eulérien et le champ de déplacement* comme on le verra par la suite à la section §1.2.

## 2. Conservation de la masse

Si on suppose qu'aucune particule n'entre, ni ne sort de l'amas  $\mathcal{E}$ , alors il est évident que sa masse totale se conserve au cours du temps, de sorte que

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} m \right)}_{\text{masse totale}} = 0 \quad (1.6)$$

La *loi de conservation de masse* qui relie d'une manière moins triviale *la densité au champ de vitesse*, sera formulée à la section §1.3.1.

## 3. Principe fondamental de la dynamique

En sommant les lois de Newton microscopiques (1.1b) sur toutes les particules dans l'amas, on obtient directement

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} m \vec{v}_i \right)}_{\text{cumul qt de mvt}} = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i}_{\text{cumul forces ext}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i}}_{\text{cumul forces int}} \quad (1.7)$$

Le cumul de la quantité de mouvement de l'amas, varie donc sous l'influence de la somme des forces extérieures et des forces d'interaction. La limite continue sera formulée dans la section §1.3.2 et donnera la version continue du principe fondamental de la dynamique.

## 4. Théorème de l'énergie cinétique

En multipliant les équations microscopiques de Newton scalairement par  $\vec{v}_i$ , puis en sommant sur les particules  $i \in \mathcal{E}$  du sous-ensemble, on obtient

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} \frac{m \|\vec{v}_i\|^2}{2} \right)}_{\text{cumul énergie cinétique}} = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i}_{\text{cumul puissance forces}} \quad (1.8)$$

A la section §1.3.3, on montre que la limite continue de cette équation produit *la loi d'évolution pour l'énergie totale* de laquelle on peut déduire une *loi d'évolution pour l'énergie interne* (la chaleur).

## 5. Théorème du moment cinétique

On applique  $\vec{r}_i \times$  sur les équations microscopiques de Newton et on somme ces équations sur  $i \in \mathcal{E}$  de l'amas. En utilisant la propriété  $(d\vec{r}_i/dt) \times \vec{v}_i = \vec{0}$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \times m \vec{v}_i \right)}_{\text{cumul mom orbital}} = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\text{cumul couple ext}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i}}_{\text{cumul couple int}} \quad (1.9)$$

La limite continue de cette loi sera formulée en §1.3.4. En combinaison avec le principe fondamental de la dynamique, on apprendra que *le tenseur des contraintes est symétrique*.

La suite reste de ce chapitre est dédiée à formuler la limite continue de ces cinq lois.

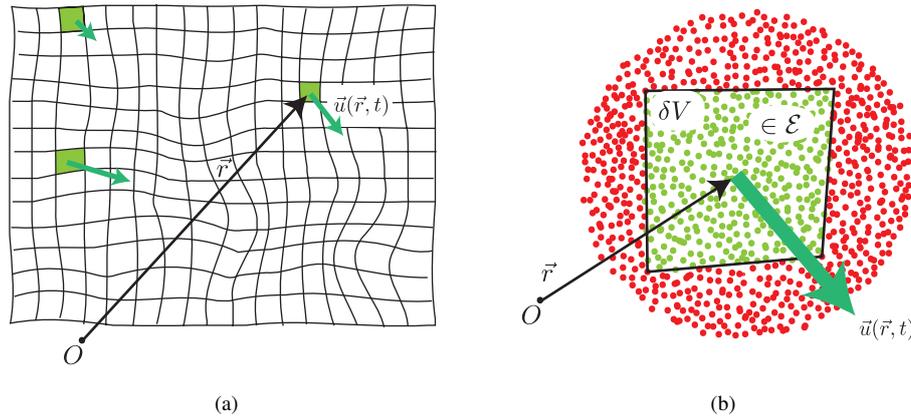


FIGURE 1.3 – (a) On découpe l'espace en volumes  $\delta V$  élémentaires, qui correspondent à des amas de particules. (b) Dans un amas  $\mathcal{E}$  localisé autour de  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ , on définit le champ de vitesse Eulérien  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  comme la moyenne arithmétique des vitesses des particules dans l'amas.

## 1.2 Cinématique des milieux continus

Pour décrire mathématiquement le mouvement d'un milieu continu, il est indispensable d'introduire des outils mathématiques adéquates ce qui fait l'objet de cette section cinématique.

### 1.2.1 Champ de vitesse Eulérien

Dans un premier temps, on privilège le **point de vue Eulérien** : dans lequel le système est décrit par un observateur qui se trouve à l'origine  $O$  d'un référentiel Galiléen. Ainsi le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  sera utilisé pour référer à la position du point  $M$  relatif à l'observateur.

On suppose un volume d'un milieu continu composé de particules individuelles. Comme le montre la figure 1.3, on peut subdiviser l'espace en de nombreux amas mésoscopiques qui ne se recouvrent pas. Le champ de vitesse Eulérien apparait alors comme la vitesse moyenne arithmétique des particules de l'amas.

#### ★ Champ de vitesse (Eulérien).

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{\delta N} \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{v}_i \quad (1.10)$$

Ici on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble d'indices précédemment introduit. Le champ de vitesse correspond à la vitesse du barycentre des particules de l'amas.

### 1.2.2 Gradient de vitesse, divergence, vorticité, circulation, flux

Disposant du champ de vitesse, on peut calculer un certain nombre d'objets qui sont fréquemment utilisés en mécanique des fluides. Commençons par le tenseur du gradient du champ de vitesse  $\overrightarrow{\nabla u}$ , qui par définition est le tenseur d'ordre deux pour lequel

$$d\vec{u} = \overrightarrow{\nabla u} \cdot d\vec{r} \quad (1.11)$$

Ce tenseur contient dans ces 9 composantes, toute l'information sur la variation locale des composantes le long des trois directions d'espace. Comme  $d\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \vec{e}_i$  et  $d\vec{r} = dx_j \vec{e}_j$  par définition, on doit avoir

★ **Tenseur du gradient de vitesse.**

$$\overleftrightarrow{\nabla} \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (1.12a)$$

qui a

$$\underline{\underline{\nabla u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.12b)$$

comme représentation matricielle. ■

En coordonnées curvilignes, l'expression est plus complexe, cf. appendice A. Ici on se limite aux coordonnées Cartésiennes. La trace de ce tenseur du gradient  $\overleftrightarrow{\nabla} \vec{u}$ , donne la divergence de l'écoulement

★ **Divergence.**

$$\overleftrightarrow{\nabla} \cdot \vec{u} = \text{tr}(\overleftrightarrow{\nabla} \vec{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

La partie symétrique du gradient de vitesse définit le tenseur des taux de déformation

★ **Tenseur des taux de déformation.**

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\overleftrightarrow{\nabla} \vec{u} + \overleftrightarrow{\nabla} \vec{u}^T) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (1.14a)$$

ce qui signifie

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.14b)$$

pour la représentation matricielle. ■

Ce tenseur interviendra dans les écoulements visqueux. La partie anti-symétrique du tenseur des gradients est liée à la vorticité

★ **Vorticité.**

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \overleftrightarrow{\nabla} \times \vec{u} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \vec{e}_i \\ &= \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (1.15)$$

La vorticité donne l'axe de rotation locale d'un amas de fluide et sa norme est égale à deux fois la vitesse de

rotation autour de cet axe.

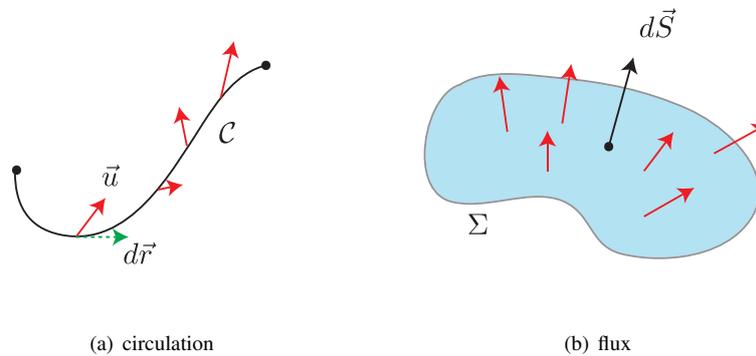


FIGURE 1.4 – Circulation le long d'une courbe  $C$  et flux d'un champ de vitesse à travers une surface  $\Sigma$

On calcule également des intégrales avec le champ de vitesse. On définit la circulation  $\Gamma$  du champ de vitesse  $\vec{u}$  le long de  $C$  par l'intégrale

★ **Circulation.**

$$\Gamma = \int_C \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (1.16)$$

Cette circulation donne une mesure de l'alignement de la vitesse avec la courbe et elle s'exprime en  $L^2/T$ . Le plus souvent, la courbe sera fermée sur elle-même lors des calculs de la circulation. Le flux  $Q$  du champ de vitesse  $\vec{u}$  à travers  $\Sigma$  est défini par l'intégrale

★ **Flux ou débit volumique.**

$$Q = \iint_{\Sigma} \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (1.17)$$

Ce flux mesure le débit volumique ( $L^3/T$ ) traversant la surface dans le sens de  $d\vec{S}$ .

### 1.2.3 Ligne de courant, fonction de courant

Une ligne de courant est une courbe (intégrale) tangente à la vitesse instantanée à tout point de l'espace. Mathématiquement, on peut définir une ligne de courant en calculant une fonction  $\vec{r}(s)$  avec  $s$  l'abscisse curviligne de la ligne, comme solution de

★ **Ligne de courant.**

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \quad (1.18)$$

En intégrant cette équation vers l'avant ( $s : 0 \rightarrow +\dots$ ) et vers l'arrière ( $s : 0 \rightarrow -\dots$ ) on obtient l'équation de la ligne de courant. La figure 1.5 montre quelques lignes de courant ensemble avec le champ de vitesse d'un écoulement autour d'un cylindre (cf. TD3).

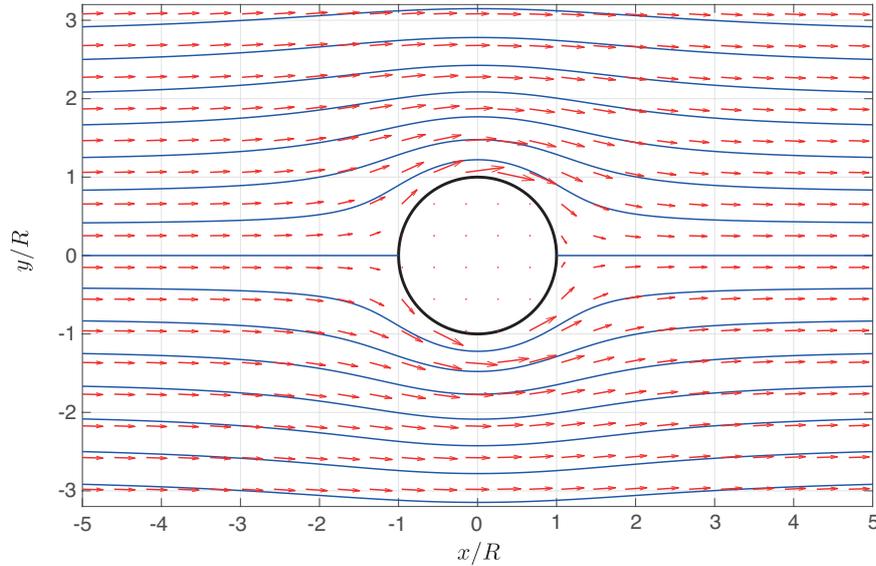


FIGURE 1.5 – Écoulement incompressible autour d'un cylindre de rayon  $R$ , visualisé par le champ de vitesse et les lignes de courant.

Lorsque l'écoulement est incompressible, a une divergence nulle  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  et bi-dimensionnel (indépendant de  $z$  et  $u_z = 0$ ), on utilise parfois une fonction de courant  $\psi$ .

★ **Fonction de courant.** Une fonction de courant d'un écoulement 2D incompressible est telle que

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_z) \quad (1.19)$$

La divergence nulle est automatiquement satisfaite, car  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_z) = 0$ . En coordonnées Cartésiennes, on a plus explicitement

$$\vec{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_y \quad (1.20)$$

Les lignes de courant coïncident avec les endroits où  $\psi$  est constant. Pour montrer ce propos, on multiplie la définition de la ligne de courant (1.18) par  $\vec{\nabla} \psi$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} \psi &= \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi \\ &= u_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

La définition du gradient ( $d\psi = \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{r}$ ) permet de récrire cette expression comme

$$\frac{d\psi}{ds} = 0 \quad (1.22)$$

et cela démontre que  $\psi$  reste constant pour tout  $s$ , c'est à dire partout sur une ligne de courant.

### 1.2.4 Champ de déplacement

Le champ de déplacement  $\vec{r}(\vec{R}, t)$  donne la position  $\vec{r}$  à laquelle le barycentre d'un amas partant de  $\vec{R}$  à l'instant  $t_0$  est arrivé au temps  $t$ .

★ **Champ de déplacement.**

Sous forme intégrale :

$$\vec{r}(\vec{R}, t) = \vec{R} + \int_{t_0}^t \vec{u}(\vec{r}(\vec{R}, t')) dt' \quad (1.23a)$$

Sous forme différentielle :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \vec{r}(\vec{R}, t_0) = \vec{R} \quad (1.23b)$$

La figure (1.6) illustre la notion du champ de déplacement avec un quadrillage initial régulier qui se déforme et se déplace au cours du temps (voir figure de droite). Le champ de déplacement contient toute l'information permettant de relier la configuration initiale avec la configuration ultérieure.

Le champ de déplacement est une grandeur qu'on aime calculer en mécanique des solides car cela permet de caractériser comment se déforme la pièce. En mécanique des fluides, les particules peuvent se déplacer très loin de leur position initiale. Les déformations sont potentiellement très grandes et très complexes (pensez à la forme complexe d'un nuage de fumée pour vous en persuader par exemple) et de nombreuses applications il n'est pas important de savoir vers où va la matière en détail. Ainsi ce champ sera rarement calculé en mécanique des fluides.

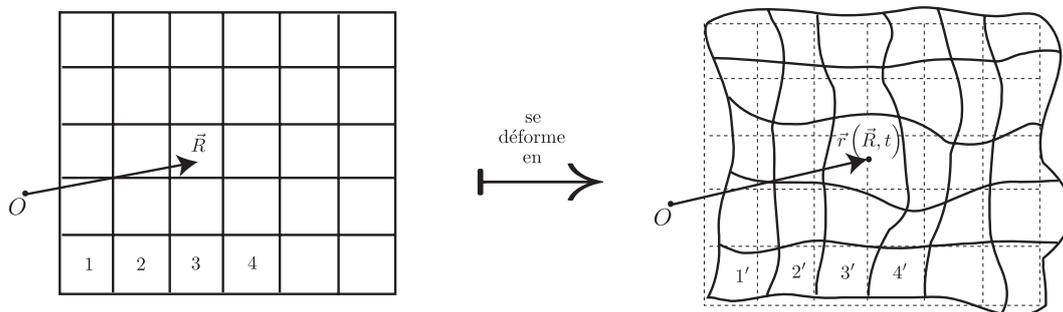
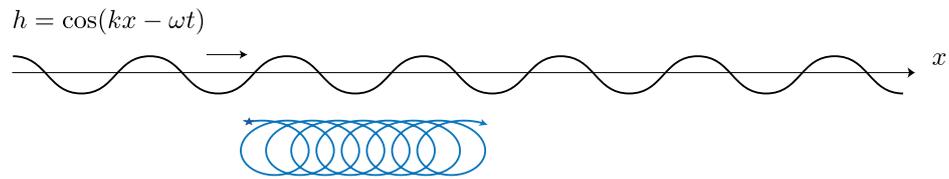


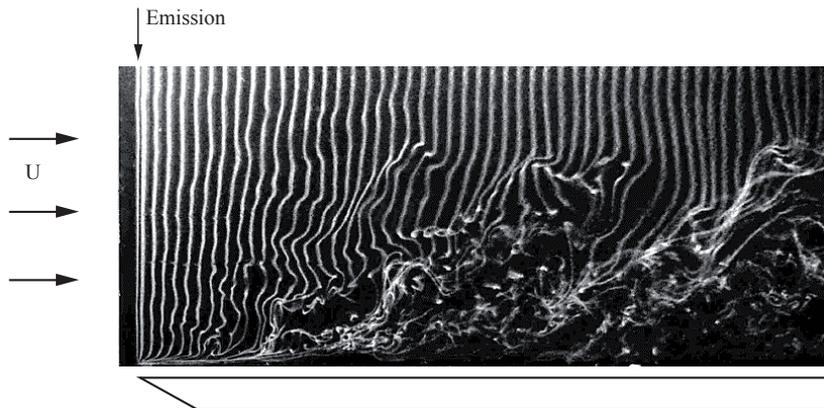
FIGURE 1.6 – Le champ de déplacement  $\vec{r}(\vec{R}, t)$  donne la position  $\vec{r}$  du barycentre au temps  $t$ , d'un amas initialement parti de  $\vec{R}$  à l'instant  $t_0$ .

★ **Variable de Lagrange.** La variable  $\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z$  ou ses composantes  $X, Y, Z$  réfèrent à la position de la matière dans une configuration initiale de référence. On les appelle variables de Lagrange. ■

Ici on se limite à  $X, Y, Z$  des variables Cartésiennes, mais il est très bien possible d'utiliser d'autres variables curvilignes comme on verra en TD2. Les variables de Lagrange sont souvent utilisés en mécanique des solides, mais rarement en mécanique des fluides.



(a) Trajectoire de particule sous une onde de gravité propogative



(b) Lignes matérielles dans un écoulement de couche limite



(c) Une interface entre l'air et l'eau est une surface matérielle



(d) Volume matériel dans un écoulement parabolique

FIGURE 1.7 – Points, lignes, surfaces et volumes matériels se déplacent en suivant le champ de déplacement.

Le champ de déplacement permet de définir une collection d'objets matériels. Si on suit la position d'un seul point au cours du temps, on parle d'un point matériel et ce point suit une *trajectoire*.

★ **Point matériel et trajectoire.** La courbe paramétrisée

$$\mathcal{C} : \vec{r} = \vec{r}(\vec{R}_0, t) \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (1.24)$$

définit la trajectoire Lagrangienne du point matériel parti de  $\vec{R}_0$ . ■

La trajectoire se confond avec la ligne de courant seulement si l'écoulement est stationnaire (ne dépend pas de  $t$ ). Des lignes, surfaces et volumes matériels sont des ensembles 1D, 2D et 3D de points matériels. Mathématiquement, il suffit de délimiter un ensemble de points initiaux et de se servir du champ de déplacement pour calculer les positions ultérieures.

★ **Ligne matérielle  $\mathcal{C}_m(t)$ .**

$$\vec{r} \in \mathcal{C}_m(t) \quad \text{si} \quad \vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t) \quad \text{avec} \quad \forall \vec{R} \in \mathcal{C}_m(t_0) \quad (1.25)$$

★ **Surface matérielle  $\Sigma_m(t)$ .**

$$\vec{r} \in \Sigma_m(t) \quad \text{si} \quad \vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t) \quad \text{avec} \quad \forall \vec{R} \in \Sigma_m(t_0) \quad (1.26)$$

★ **Volume matériel  $\mathcal{V}_m(t)$ .**

$$\vec{r} \in \mathcal{V}_m(t) \quad \text{si} \quad \vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t) \quad \text{avec} \quad \forall \vec{R} \in \mathcal{V}_m(t_0) \quad (1.27)$$

La figure 1.7 illustre ces objets matériels. En (a), on voit la trajectoire d'une particule fluide sous une onde de gravité. Celle-ci suit un mouvement de gyration et se déplace lentement dans la direction de l'onde. En (b), on voit une collection de lignes de bulles très fines initiées dans un écoulement au dessus d'une plaque au repos. Ces lignes se déplacent presque comme des lignes matérielles. Une surface libre, comme on le voit en (c) est un bon exemple d'une surface matérielle. En (d) on schématise un volume matériel initial  $\mathcal{V}_m(t_0)$  de section rectangulaire qui s'étire dans un écoulement parabolique pour devenir  $\mathcal{V}_m(t_1)$  à un instant  $t_1$  plus tard.

### 1.2.5 Champ matériel et dérivée advective

Dans une description Eulérienne, la dépendance spatiale d'un champ est exprimée à l'aide de la variable  $\vec{r}$  qui est totalement déconnectée du mouvement de la matière. Dans une description Lagrangienne au contraire, on utilise la variable d'espace Lagrangienne  $\vec{R}$ , intimement liée au mouvement de la matière car reflétant sa position initiale. On définit la forme Lagrangienne d'un champ comme ceci.

★ **Forme Lagrangienne d'un champ  $f$  quelconque.**

$$f^L(\vec{R}, t) = f(\vec{r}(\vec{R}, t), t) \quad (1.28)$$

et similaire pour des champs vectoriels ou tensoriels. Afin de spécifier qu'il s'agit d'une représentation Lagrangienne, qui dépend d'une variable Lagrangienne  $\vec{R}$ , il est préférable d'ajouter un index  $L$ .

Un champ peut être matériel ce qui signifie que la valeur du champ  $f$  est "attachée" au milieu et le suit dans son mouvement. En utilisant la forme Lagrangienne, il est facile d'exprimer qu'un champ est matériel.

★ **Champ matériel (forme Lagrangienne).**

$$f^L(\vec{R}, t) = f^L(\vec{R}, t_0) \quad , \quad \forall t > t_0 \quad (1.29a)$$

ou

$$\left( \frac{\partial f^L(\vec{R}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{R}} = 0 \quad (1.29b)$$

où l'indice  $\vec{R}$  indique qu'on dérive par rapport au temps en gardant  $\vec{R}$  constant. ■

L'équation différentielle ci-dessus qui exprime la conservation peut être réécrite sous une forme Eulérienne. Avec la définition de  $f^L$  et la dérivée des fonctions composées (en chaîne), on obtient

$$\left( \frac{\partial f(\vec{r}(\vec{R}, t), t)}{\partial t} \right)_{\vec{R}} = \left( \frac{\partial f(\vec{r}(\vec{R}, t), t)}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + \left( \frac{\partial \vec{r}(\vec{R}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{R}} \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (1.30)$$

où  $\vec{\nabla} f$  est le gradient du champ  $f$  par rapport à la variable  $\vec{r}$ , défini par  $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$ . Ici on utilise une notation très explicite mais lourde, empruntée à la thermodynamique : la variable en indice de la parenthèse est celle qu'on garde constante lors de la dérivation partielle. En prenant en compte la définition du champ de déplacement  $\vec{r}(\vec{R}, t)$  on a donc

$$\left( \frac{\partial f(\vec{r}(\vec{R}, t), t)}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + \vec{u}(\vec{r}(\vec{R}, t), t) \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (1.31)$$

Cette relation est valable pour tout  $\vec{R}$  et donc pour tout  $\vec{r}$ . Ceci nous amène à un critère Eulérien pour reconnaître un champ matériel.

★ **Champ matériel (forme Eulérienne).** Le champ  $f(\vec{r}, t)$  est un champ matériel si

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) f = 0 \quad (1.32)$$

L'opérateur de dérivation que l'on rencontre ici joue un rôle fondamental en MMC et on le retrouvera plus tard dans les lois de conservation. On adopte une convention de notation pour la suite.

★ **Dérivée temporelle normale.** Pour la dérivée temporelle à  $\vec{r}$  fixe, on utilisera la notation standard avec des  $\partial$ -ronds

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{r}} \quad (1.33)$$

On parle aussi de la dérivée Eulérienne. ■

★ **Dérivée temporelle advective.** Pour la dérivée temporelle à  $\vec{R}$  fixe, la dérivée advective, on utilisera une notation différente avec des  $d$ -droits

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{R}} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.34)$$

On parle aussi de la dérivée Lagrangienne, particulière ou matérielle. ■

Donnons un exemple pour mieux illustrer la dérivée advective. On imagine un randonneur qui part le matin tôt pour se balader en montagne et qui s'intéresse à la variation de la température varie au cours du temps, le long de son trajet. La dérivée Eulérienne  $\partial_t T$  mesure comment la température locale varie à un endroit fixe et permettra au randonneur de mesurer la variation instantanée de la température causée par la météo. Le

deuxième terme de la dérivée advective,  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T$  mesure comment la température varie suite au déplacement du randonneur et se fera ressentir si le randonneur prend par exemple de la hauteur.

### 1.2.6 Le Jacobien et la divergence

Le champ de déplacement peut être compris comme une relation qui définit un changement de coordonnées générales. Si on connaît  $\vec{r}(\vec{R}, t)$  dans le système des coordonnées Cartésiennes, on disposera par exemple des équations

$$\vec{r}(X, Y, Z, t) = x(X, Y, Z, t)\vec{e}_x + y(X, Y, Z, t)\vec{e}_y + z(X, Y, Z, t)\vec{e}_z \quad (1.35)$$

La différentielle totale de  $\vec{r}$  sous une variation infinitésimale  $dX, dY, dZ$  est

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} dX + \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} dY + \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} dZ \quad (1.36)$$

Ces trois vecteurs qui apparaissent dans la somme forment les côtés d'un parallélépipède infinitésimal et matériel, schématisé sur la figure 1.8. Le volume de ce parallélépipède se calcule à l'aide d'un produit mixte et donne l'élément de volume

$$dV = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} dX \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} dY \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} dZ = J dX dY dZ \quad (1.37)$$

exprimé dans les coordonnées  $X, Y, Z$ . Ceci permet de définir le Jacobien de la transformation de coordonnées.

#### ★ Jacobien.

$$J = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} = \begin{vmatrix} \partial_X x & \partial_Y x & \partial_Z x \\ \partial_X y & \partial_Y y & \partial_Z y \\ \partial_X z & \partial_Y z & \partial_Z z \end{vmatrix} \quad (1.38)$$

Ici la notation  $\partial_X x = \partial x / \partial X$ . Le même élément de volume s'exprime dans les coordonnées Eulériennes  $x, y, z$  et on a donc

$$dV = dx dy dz = J dX dY dZ \quad (1.39)$$

Le Jacobien permet de relier le volume actuel d'un amas mésoscopique parti de  $\vec{R}$  à son volume initial. Il mesure donc comment la matière est comprimée ou dilatée, localement et pendant le transport à travers le milieu. L'évolution temporelle du Jacobien est directement liée à la divergence de l'écoulement :

#### ★ Evolution temporelle du Jacobien.

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (1.40)$$

Cette relation intervient dans la démonstration du théorème de transport de Reynolds, présenté à la section §1.2.7. Pour retrouver cette équation différentielle (1.40), on commence par dériver la définition de  $J$  par rapport au temps (à  $\vec{R}$  fixe)

$$\frac{dJ}{dt} = \left( \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial X \partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial Y \partial t} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \right) \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial Z \partial t} \quad (1.41)$$

En utilisant les propriétés de permutation (cyclique) du produit mixte et la définition du champ de déplacement on simplifie à

$$\frac{dJ}{dt} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \quad (1.42)$$

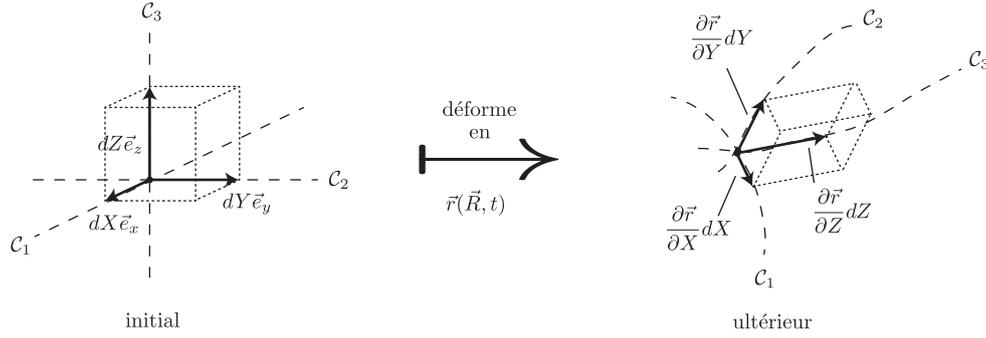


FIGURE 1.8 – Un point matériel se trouve à l'intersection de 3 lignes matérielles  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ , qui se déplacent au cours du temps (lignes interrompues) avec le milieu. Le volume infinitésimal se calcule à tout instant comme le volume du parallélépipède construit sur 3 vecteurs infinitésimaux tangents à ces lignes matérielles.

On utilise maintenant les propriétés

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} = J \vec{\nabla} X \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} = J \vec{\nabla} Y \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} = J \vec{\nabla} Z \quad (1.43)$$

qui sont valables pour tout système de coordonnées générales. Montrons comme exemple la première relation. Le gradient  $\vec{\nabla} X$  est défini comme

$$\vec{\nabla} X = \frac{\partial X}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial X}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial X}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.44)$$

Ce  $\vec{\nabla} X$  est orthogonal à  $\partial \vec{r} / \partial Y$  et ceci se montre à l'aide du produit scalaire

$$\vec{\nabla} X \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{\partial X}{\partial Y} = 0 \quad (1.45)$$

de même pour l'orthogonalité de  $\vec{\nabla} X$  et  $\partial \vec{r} / \partial Z$ . Si  $\vec{\nabla} X$  est orthogonal à  $\partial \vec{r} / \partial Y$  et  $\partial \vec{r} / \partial Z$  alors on peut le chercher sous la forme

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} = \alpha \vec{\nabla} X \quad (1.46)$$

en prenant en considération les propriétés du produit vectoriel. Ici  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité que l'on peut déterminer en multipliant la relation précédente avec  $\partial \vec{r} / \partial X$ . Ceci donne

$$\underbrace{\alpha \vec{\nabla} X \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial X}}_I = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial X} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial Y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} \right)}_J \quad (1.47)$$

soit  $\alpha = J$ . Similaire pour les autres relations de (1.43). En utilisant ces propriétés (1.43) dans l'équation différentielle (1.42) pour  $dJ/dt$  on simplifie celle-ci à

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= J \left( \vec{\nabla} X \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} + \vec{\nabla} Y \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} + \vec{\nabla} Z \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \right) \\ &= J \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial X} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial X} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial Y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial Y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial Z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial Z} \right) = J \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = J (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

ce qui donne la relation (1.40).

Après cette démonstration, on étudie un peu plus la signification de l'équation différentielle pour le Jacobien. Comme  $J$  mesure le volume infinitésimal, la relation

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (1.49)$$

suggère que, selon le signe de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ , il y a une tendance à dilater ou à comprimer ce volume local. Ceci est illustré en figure 1.9.

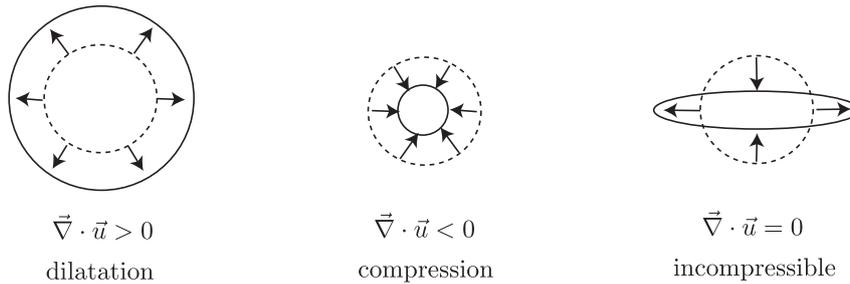


FIGURE 1.9 – La divergence de l'écoulement contrôle la variation d'un volume élémentaire de fluide. L'amas va se dilater ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$ ), se comprimer ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} < 0$ ) ou potentiellement changer de forme mais tout en gardant son volume constant ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ).

Le cas particulier où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  est un cas important et on parle alors d'un écoulement *incompressible*. Dans ce cas particulier, l'écoulement peut changer la forme des volumes infinitésimaux matériels mais pas le volume total contenu dans l'amas. On retient que *la divergence de l'écoulement mesure localement le taux de dilatation de la matière*.

### 1.2.7 Théorème de transport de Reynolds

Le théorème de transport de Reynolds permet de réécrire la dérivée temporelle d'une intégrale de volume dans le cas où ce volume dépend du temps (comme un volume matériel par exemple). Ce théorème va nous servir pour établir la forme locale des lois fondamentales de la MMC.

★ **Théorème de transport pour une grandeur scalaire.** Soit  $g(\vec{r}, t)$  un champ scalaire qu'on intègre sur un volume  $\mathcal{V}(t)$  mobile dont les points bougent à la vitesse  $\vec{v}$ . On note

$$G = \iiint_{\mathcal{V}(t)} g \, dV \quad (1.50)$$

Le théorème de transport de Reynolds permet d'exprimer

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{\mathcal{V}(t)} g \, dV \right) = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} \, dV + \oint_{\Sigma(t)} g \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.51a)$$

$$= \iiint_{\mathcal{V}(t)} \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v}) \right) \, dV \quad (1.51b)$$

Ici  $\Sigma(t)$  est la surface de frontière entourant  $\mathcal{V}(t)$ . Le différentiel de surface  $d\vec{S}$  est toujours orienté vers l'extérieur de  $\mathcal{V}(t)$  par convention.

Pour démontrer le théorème de transport, on commence par définir le volume mobile  $\mathcal{V}(t)$ . Ce volume mobile se paramétrise comme

$$\begin{aligned} \vec{r}(a, b, c, t) &= x(a, b, c, t) \vec{e}_x + y(a, b, c, t) \vec{e}_y + z(a, b, c, t) \vec{e}_z \\ \text{tel que } \left( \frac{\partial \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t} \right)_{a,b,c} &= \vec{v}(\vec{r}(a, b, c, t), t) \quad , \quad \forall (a, b, c) \in I_a \times I_b \times I_c \end{aligned} \quad (1.52)$$

avec ici  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  un champ de "vitesse" qui ne doit pas être la vitesse du fluide. Une notation particulière pour la dérivée temporelle est ici utilisée pour bien marquer que l'on dérive par rapport au temps en gardant  $a, b, c$  fixes. Les intervalles  $I_a, I_b, I_c$  sont des intervalles dans lesquels on doit changer les paramètres  $a, b, c$  pour couvrir tout le volume. Le Jacobien, qui est associé à cette fonction est

$$J = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} \quad (1.53)$$

On peut utiliser les propriétés

$$dV = J da db dc \quad , \quad \left( \frac{\partial J}{\partial t} \right)_{a,b,c} = \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) J \quad (1.54)$$

rencontrées plus haut dans le cas du volume matériel. La paramétrisation du volume mobile en fonction des coordonnées  $a, b, c$  permet de réécrire l'intégrale sur le volume mobile comme une intégrale à bornes fixes. C.a.d.

$$G = \iiint_{\mathcal{V}(t)} g dV = \int_{I_a} \int_{I_b} \int_{I_c} g(\vec{r}(a, b, c, t), t) J da db dc \quad (1.55)$$

Ceci est très utile si on cherche à dériver  $G$  par rapport au temps. Grâce à ce changement de variables, on peut directement passer la dérivée temporelle dans l'intégrale

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \int_{I_a} \int_{I_b} \int_{I_c} \frac{\partial}{\partial t} \left( g(\vec{r}(a, b, c, t), t) J(a, b, c, t) \right)_{a,b,c} da db dc \\ &= \int_{I_a} \int_{I_b} \int_{I_c} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{a,b,c} \cdot \vec{\nabla} g \right] J + g \left( \frac{\partial J}{\partial t} \right)_{a,b,c} \right\} \Big|_{\vec{r}(a,b,c,t)} da db dc \\ &= \int_{I_a} \int_{I_b} \int_{I_c} \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) J \Big|_{\vec{r}(a,b,c,t)} da db dc \\ &= \int_{I_a} \int_{I_b} \int_{I_c} \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v}) \right) J \Big|_{\vec{r}(a,b,c,t)} da db dc \end{aligned} \quad (1.56)$$

Dans les simplifications, on a utilisé la dérivée d'une fonction composée (en chaîne), la définition du volume mobile ( $\partial_t \vec{r} = \vec{v}$ ) et la propriété qui relie l'évolution temporelle du Jacobien à la divergence de  $\vec{v}$ . La notation avec la barre verticale suggère que l'expression est à évaluer en remplaçant  $\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t)$  dans l'argument des champs. Ces simplifications faites, on peut revenir sur une notation plus formelle de l'intégrale

$$\frac{dG}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (g \vec{v}) \right) dV \quad (1.57)$$

Une application du théorème de divergence (Green-Ostrogradsky) donne finalement

$$\frac{dG}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dV + \iint_{\Sigma(t)} g \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.58)$$

Le théorème de transport se généralise facilement au cas des grandeurs vectorielles intégrées sur des volumes mobiles.

★ **Théorème de transport pour une grandeur vectorielle.** Soit  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  un champ vectoriel qu'on intègre sur un volume  $\mathcal{V}(t)$

$$\vec{G} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \vec{g} dV \quad (1.59)$$

Le théorème de transport de Reynolds permet d'exprimer cela comme

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} dV + \iint_{\Sigma(t)} \vec{g} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (1.60a)$$

$$= \iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} dV + \iint_{\Sigma(t)} (\vec{g} \otimes \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (1.60b)$$

$$= \iiint_{\mathcal{V}(t)} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \otimes \vec{v}) \right) dV \quad (1.60c)$$

Pour démontrer ce théorème, le plus simple est de décomposer  $\vec{G}$  et  $\vec{g}$  sur une base Cartésienne, par exemple  $\vec{G} = G_i \vec{e}_i$ . On pourra alors appliquer le théorème de transport de Reynolds, version champ scalaire, sur chaque composante séparément

$$\frac{dG_i}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial g_i}{\partial t} dV + \iint_{\delta\mathcal{V}} g_i \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.61)$$

multipliant avec  $\vec{e}_i$  on retrouve l'expression de (1.60a). Pour retrouver (1.60b), on utilise la définition du produit tensoriel et du produit contracté

$$(\vec{g} \otimes \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \vec{g} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = g_i \vec{e}_i (v_j dS_j) \quad (1.62)$$

Ceci n'est qu'une étape pour trouver la dernière réduction (1.60c) ce qui nécessite rien d'autre que le théorème d'Ostrogradsky pour un champ tensoriel. Si on veut explicitement calculer cette divergence de tenseur, on peut par la définition de ce qu'est la divergence du tenseur  $\vec{g} \otimes \vec{v}$  utiliser

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \otimes \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (g_i v_j) \vec{e}_i = v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (g_i \vec{e}_i) + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} g_i \vec{e}_i \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{g} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{g} \end{aligned} \quad (1.63)$$

## 1.3 Lois fondamentales de la MMC

Après cette collection de concepts purement cinématiques, nous pouvons retourner vers la traduction annoncée en début de chapitre des lois fondamentales qui contrôlent le mouvement moyen d'amas de particules.

### 1.3.1 Conservation de la masse

L'amas de particules  $\mathcal{E}$  localisé autour de  $\vec{r}$  est supposé contenir  $\delta N$  particules de masse  $m$ . Celui-ci pèsera donc  $\delta M = m \delta N$ . Si on connaît son volume  $\delta V$ , alors on peut introduire la *densité*  $\rho(\vec{r}, t)$  locale par la relation suivante.

★ **Densité et masse.** La densité ou masse volumique  $\rho$  est définie telle que

$$\delta M = \sum_{i \in \mathcal{E}} m \approx \rho(\vec{r}, t) \delta V \quad (1.64)$$

En MMC, on calcule la masse  $M$  d'un volume macroscopique  $\mathcal{V}$  comme

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV, \quad (1.65)$$

Dans l'introduction, on a mentionné la relation

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} m \right)}_{\text{cumul masse}} = 0 \quad (1.66)$$

qui exprime la conservation de la masse. Le passage à la limite continue se fait naturellement à l'aide d'un volume matériel  $\mathcal{V}_m(t)$ . Comme ce type de volume suit le mouvement du fluide on ressent naturellement que la masse totale d'un volume matériel doit se conserver. Dans la limite continue, on écrit alors la conservation de la masse comme

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\vec{r}, t) dV \right) = 0 \quad (1.67)$$

En appliquant le théorème de transport de Reynolds sur cette intégrale, on trouve

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma_m(t)} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = 0 \quad (1.68)$$

Il faut maintenant réaliser que cette relation est vraie, quel que soit le volume matériel  $\mathcal{V}_m$ . Ceci signifie que c'est l'intégrande qui doit disparaître dans tout le volume du fluide et il en résulte la forme locale de la loi de conservation de la masse.

★ **Forme locale de la conservation de la masse.**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.69)$$

On parle aussi de l'équation de continuité.

Une forme équivalente de l'équation de continuité est

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (1.70)$$

Dans le cas spécial où  $\rho$  est supposé constant en temps et en espace, on déduit de la conservation de la masse que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ . A densité constante, la conservation locale de la masse est assurée par la conservation locale du volume.

**R** En réalité, les amas de particules ne sont pas réellement "étanches". Des particules individuelles ont des écarts de vitesse par rapport à la vitesse moyenne de l'amas. Proche du bord de l'amas, des particules peuvent bien entrer et sortir de l'amas. En moyenne ces deux flux entrants et sortants doivent s'équilibrer car sinon le champ de vitesse  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  ne serait pas proprement défini comme vitesse "moyenne" de l'amas.

### 1.3.2 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans cette section, on formule le passage à la limite continue de l'équation

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} m \vec{v}_i \right)}_{\text{cumul qt de movt}} = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i}_{\text{cumul forces ext}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i}}_{\text{cumul forces int}} \quad (1.71)$$

dérivé à partir du principe fondamental de la dynamique microscopique. Cela nécessite d'étudier plus précisément la limite des trois termes. On commence par introduire une densité de quantité de mouvement.

★ **Densité de quantité de mouvement.** La densité de quantité de mouvement  $\rho \vec{u}$  est définie par l'équivalence

$$\delta \vec{P} = \sum_{i \in \mathcal{E}} m \vec{v}_i \approx \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \delta V \quad (1.72)$$

sur un amas mésoscopique. En MMC, on calcule la quantité de mouvement d'un volume macroscopique  $\mathcal{V}$  comme

$$\vec{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{u} dV \quad (1.73)$$

La résultante des forces extérieures  $\delta \vec{F}$  qui s'exercent sur les particules de l'amas  $\mathcal{E}$  permet de définir  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  la densité de force locale.

★ **Densité de force (extérieure).**

$$\delta \vec{F} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \approx \vec{f}(\vec{r}, t) \delta V \quad (1.74)$$

En MMC, on calcule la force extérieure qui s'exerce sur un volume  $\mathcal{V}$  macroscopique comme

$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{f} dV \quad (1.75)$$

La limite continue de la résultante des forces d'interaction qui s'exercent sur les particules de l'amas,  $\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i}$ , est plus délicate à formuler car les particules de l'amas  $i \in \mathcal{E}$  peuvent interagir avec les particules  $j$  à l'intérieur à l'intérieur et à l'extérieur de cet amas. On note  $\mathcal{E}'$  l'ensemble des indices de particules qui se trouvent *en dehors* de l'amas. Dans la résultante des forces d'interaction qui s'exerce sur les particules de l'amas, on sépare les contributions provenant de l'intérieur et de l'extérieur :

$$\begin{aligned} \delta \vec{T} &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \vec{T}_{j \rightarrow i} + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \underbrace{(\vec{T}_{j \rightarrow i} + \vec{T}_{i \rightarrow j})}_{\vec{0}} + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Suite à la troisième loi de Newton, seules les forces d'interaction exercées par des particules  $j \in \mathcal{E}'$  à l'extérieur de l'amas contribuent à la résultante. Comme en plus, les interactions entre les particules agissent à courte distance  $\lambda$  petite devant l'échelle  $\delta$  de l'amas (hypothèse du milieu continu) on simplifie la résultante des forces d'interaction à

$$\delta \vec{T} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} = \sum_{i \in \delta \mathcal{E}} \sum_{j \in \delta \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \approx \delta \vec{F}_{\Sigma} \quad (1.77)$$

Les sommes sur  $i$  et  $j$  sont ici limitées aux sous-ensembles de particules  $\delta \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$  et  $\delta \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$ , immédiatement à l'intérieur ou à l'extérieur de l'amas, cf. l'illustration de la figure (1.10). Toutes ces opérations permettent de faire ressentir une chose importante : la résultante des interactions *mène à une force de surface*, d'où la préférence pour une notation  $\delta \vec{F}_{\Sigma}$  où l'indice  $\Sigma$  fait référence à "surface".

Pour aller plus loin sur la description de cette force de surface, il est plus adéquat de dézoomer afin de se placer à l'échelle macroscopique. Un volume macroscopique  $\mathcal{V}$  n'est rien d'autre qu'un très très grand amas sur lequel la résultante des forces d'interaction exerce une force de surface

$$\vec{F}_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} d\vec{F}_{\Sigma} \quad (1.78)$$

On intègre ici des contributions de forces de surface infinitésimales  $d\vec{F}_{\Sigma}$ , sur toute la surface  $\Sigma$ . Il serait mieux d'exprimer cette intégrale comme une vraie intégrale de surface et c'est ici que l'approche macroscopique

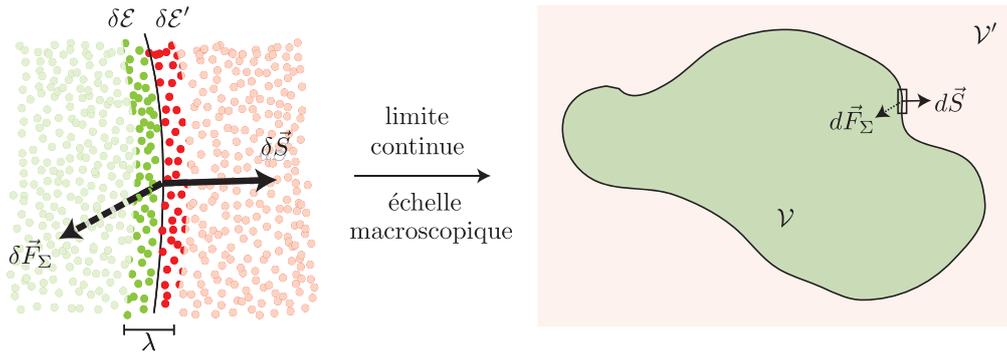


FIGURE 1.10 – La résultante des forces d’interaction dépend uniquement des interactions avec les particules à l’extérieur de l’amas et n’agit que sur les particules immédiatement au voisinage de la surface de l’amas. Dans la limite continue, elle donne lieu à une force de surface  $\vec{F}_\Sigma$  dont la différentielle  $d\vec{F}_\Sigma$  est reliée à la différentielle de surface  $d\vec{S}$  par le tenseur des contraintes.

est utile. Elle nous permet de zoomer sur l’échelle infinitésimale du pavé de surface (schématisé à droite dans la figure 1.10). A cette échelle différentielle on s’attend naturellement à une proportionnalité

$$\|d\vec{F}_\Sigma\| \sim \|d\vec{S}\| \quad (1.79)$$

des magnitudes. Ici il n’y a rien de très fondamental car il est tout simplement difficile de faire autrement dans un monde différentiel. Mais attention, rien ne nous dit que  $d\vec{F}_\Sigma$  et  $d\vec{S}$  doivent être parallèles. La résultante locale des forces d’interaction peut agir dans une direction différente que celle qui est normale à la surface. On cherche donc à exprimer une relation de proportionnalité entre deux vecteurs pas forcément parallèles et mathématiquement, c’est exactement ce qu’un *tenseur d’ordre deux* permet de faire. On écrit donc

$$d\vec{F}_\Sigma = \vec{\sigma}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (1.80)$$

et on introduit ici un nouveau champ  $\vec{\sigma}$ , *le tenseur des contraintes*. La contrainte a la dimension physique d’une force par unité de surface. Dans l’appendice A on vous donne des informations supplémentaires sur le calcul tensoriel et vectoriel. On y donne des exemples sur comment calculer le produit contracté d’un tenseur et un vecteur et on y rappelle le théorème de la divergence, qui permet de réécrire la résultante des forces de surface en une intégrale de volume.

★ **Force de surface et contrainte.** Sur un volume macroscopique, s’applique une force de surface

$$\vec{F}_\Sigma = \oint_\Sigma \vec{\sigma}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}(\vec{r}, t) dV \quad (1.81)$$

A l’échelle mésoscopique, le tenseur des contraintes s’obtient par le passage à la limite

$$\delta\vec{F}_\Sigma = \sum_{i \in \delta\mathcal{E}} \sum_{j \in \delta\mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \approx \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}(\vec{r}, t) \delta V \quad (1.82)$$

En pratique, il n’est pas commun de construire le tenseur des contraintes à partir des forces d’interaction mais cela est possible. Dans des liquides très idéalisés, c’est la physique statistique qui nous permet de faire ce passage. Dans des milieux plus réalistes par contre, il sera nécessaire de faire quelques simulations de dynamique moléculaire afin de pouvoir proposer le tenseur des contraintes. Dans la MMC, on ignore le détail de cette étape et on cherche plutôt à modéliser le tenseur des contraintes par une loi de comportement phénoménologique dont on verra quelques exemples dans les chapitres suivants.

Avec les champs introduits, nous sommes enfin prêts pour donner le passage à la limite de la loi

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_{i \in \mathcal{E}} m \vec{v}_i \right)}_{\text{cumul qt de mvt}} = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i}_{\text{cumul forces ext}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i}}_{\text{cumul forces int}} \quad (1.83)$$

Comme pour la conservation de la masse, ceci se fait assez naturellement sur un volume matériel  $\mathcal{V}_m(t)$ , qui est l'équivalent continu d'un amas de particules que l'on suit au cours du mouvement. On écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) dV \right) &= \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \vec{f}(\vec{r}, t) dV + \oint_{\Sigma_m(t)} \vec{\sigma}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} (\vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) dV \end{aligned} \quad (1.84)$$

comme version continue de la précédente loi. Avec le théorème de transport de Reynolds, on réécrit le terme de gauche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) dV \right) &= \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma_m(t)} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV \end{aligned} \quad (1.85)$$

Rassemblant tous les termes du même coté et dans une seule intégrale de volume, on obtient finalement

$$\iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left[ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \right] dV = \vec{0} \quad (1.86)$$

Cette relation s'applique quelque-soit le volume matériel  $\mathcal{V}_m$  ce qui signifie que l'on peut exiger que l'intégrande disparaisse en tout endroit du fluide. Ceci donne la forme locale du principe fondamental de la dynamique.

★ **Forme locale du principe fondamental de la dynamique.**

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (1.87)$$

En combinant avec la loi de conservation de la masse, on peut trouver quelques formes alternatives. On utilise la propriété

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{u} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.88)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \vec{e}_i = \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} u_i \vec{e}_i + \rho u_j \frac{\partial u_i \vec{e}_i}{\partial x_j} \\ &= [\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})] \vec{u} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Si on remplace ceci dans l'équation (1.87) et en utilisant la conservation de la masse locale ( $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ ), on obtient

★ **Forme alternative du PFD.**

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (1.90)$$

On reconnaît la dérivée advective dans le membre de droite  $\rho d\vec{u}/dt$ .

### 1.3.3 Equation d'énergie

Si on prend le produit scalaire du principe fondamental de la dynamique (1.90) avec  $\vec{u}$  et en utilisant la conservation de la masse, on arrive sur l'équation pour l'énergie cinétique de l'écoulement.

★ **Equation de l'énergie cinétique de l'écoulement.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \vec{u} \right) = \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \quad (1.91)$$

Cette équation est parfois appelée équation d'énergie mais ne fait apparaître que l'énergie cinétique associée au mouvement moyen des particules. L'énergie associée au mouvement fluctuant y est absent. Pour comprendre ce propos, on doit revenir vers la loi d'évolution

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i \in \mathcal{E}} \frac{m \|\vec{v}_i\|^2}{2} \right) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i \quad (1.92)$$

qui est la relation énergétique à traduire vers un formalisme continu. On remarque que la vitesse individuelle de chaque particule peut être séparée en une partie moyenne et une partie fluctuante (notée avec un prime) de moyenne nulle

$$\vec{v}_i = \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{v}_i' \quad (1.93)$$

Par construction, la vitesse moyenne de la particule est celle de l'amas qui n'est rien d'autre que celle donnée par le champ de vitesse  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  local. La vitesse fluctuante  $\vec{v}_i'$  est une quantité qui n'est pas intervenue jusqu'ici. Si on calcule l'énergie cinétique cumulée des particules de l'amas, en prenant en compte cette séparation, on trouvera deux termes :

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \frac{m \|\vec{v}_i\|^2}{2} = \underbrace{\frac{m \|\vec{u}\|^2}{2} \delta N}_{mvt \text{ moyen}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \frac{m \|\vec{v}_i'\|^2}{2}}_{mvt \text{ fluctuant}} \quad (1.94)$$

Les termes croisés disparaissent car  $\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{u} \cdot \vec{v}_i' = \vec{u} \cdot \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{v}_i' = 0$  : la moyenne des vitesses fluctuantes sur l'amas est nulle par définition. L'énergie cinétique des particules de l'amas est donc la somme d'une énergie cinétique du mouvement fluctuant et d'une énergie cinétique due au mouvement moyen. Les mouvements microscopiques étant inaccessibles dans une formulation continue, on est obligé d'introduire un nouveau champ pour obtenir une limite continue pour cette énergie cinétique d'un amas.

★ **Densité d'énergie cinétique totale.**

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \frac{m \|\vec{v}_i\|^2}{2} \approx \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e_c \right) \delta V \quad (1.95)$$

avec  $e_c$  une densité massique d'énergie cinétique associée au mouvement fluctuant. ■

Le champ  $\rho e_c$  ne sera jamais connu séparément mais fera partie d'une densité d'énergie interne  $\rho e$  totale.

Après ce traitement de l'énergie cinétique, on considère les puissances mécaniques qui se trouvent à droite dans l'équation (1.92). On peut de manière similaire imaginer que les forces extérieures agissant sur les particules ont elles aussi, une partie fluctuante et une partie moyenne :

$$\vec{F}_i = \underbrace{\frac{1}{\delta N} \left( \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \right)}_{\vec{f}/\rho} + \vec{F}_i' \quad (1.96)$$

La partie moyenne n'est rien d'autre que  $\vec{f}/\rho$ . Pour donner un exemple de ce à quoi une force fluctuante  $\vec{F}_i'$  peut correspondre, on imagine la force électromagnétique qui fait vibrer les particules sous l'influence d'un

rayonnement type micro-onde. Lors du calcul de cumul des puissances exercées par les forces extérieures, on trouvera donc également deux contributions

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \left( \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \right) \cdot \vec{u} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}'_i \cdot \vec{v}'_i}_{q \delta V} \quad (1.97)$$

Les termes croisés disparaissent encore par la définition de la partie moyenne et fluctuante. La limite continue du premier terme est évidente, car on a déjà décidé que  $\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i = \vec{f} \delta V$ . Pour traduire le deuxième terme, on a besoin d'introduire un nouveau champ. On ressent naturellement qu'une force fluctuante telle qu'un rayonnement de micro-onde, qui agit sur la vitesse fluctuante fera chauffer le milieu. C'est donc une source de chaleur volumique, soit une limite  $q \delta V$  que l'on invente ici pour écrire la limite continue. En somme, la limite continue de la puissance mécanique des forces extérieures est donc imaginée comme suit.

★ **Puissance mécanique des forces extérieures.**

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \approx (\vec{f} \cdot \vec{u} + q) \delta V \quad (1.98)$$

avec  $q(\vec{r}, t)$  la source de chaleur volumique. ■

Il nous reste à considérer la puissance mécanique fournie par les forces d'interaction. Comme dans la section précédente, on fait apparaître deux termes qui abritent les interactions avec les particules  $j$  à l'intérieur ou à l'extérieur de l'amas

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i \quad (1.99)$$

Le deuxième terme qui contient les interactions avec l'extérieur ne donnera que des termes surfaciques car les interactions sont à courte portée par hypothèse

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i = \underbrace{\left( \sum_{i \in \delta \mathcal{E}} \sum_{j \in \delta \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \right) \cdot \vec{u}}_{(\vec{\sigma} \cdot \delta \vec{S}) \cdot \vec{u}} + \underbrace{\left( \sum_{i \in \delta \mathcal{E}} \sum_{j \in \delta \mathcal{E}'} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}'_i \right)}_{-\vec{\varphi} \cdot \delta \vec{S}} \quad (1.100)$$

Ici on suggère les limites continues surfaciques directement, mais pour vraiment comprendre la nécessité de cette écriture, il est mieux de dézoomer afin de se mettre à une échelle macroscopique, exactement comme lors du traitement de la contrainte. A côté de la puissance liée au tenseur des contraintes et au champ de vitesse, un nouveau champ vectoriel  $\vec{\varphi}(\vec{r}, t)$  sera nécessaire et ce champ porte le nom de *flux de chaleur*. Il nous reste à traiter le terme des interactions avec les particules à l'intérieur de l'amas. Celui-ci se manipule ainsi

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \left( \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i + \vec{T}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad (1.101)$$

A l'échelle microscopique, il paraît correct de supposer que les interactions  $\vec{T}_{j \rightarrow i}$  sont conservatives et dérivent d'une énergie potentielle d'interaction qui ne dépend que de la position relative des particules, c'est-à-dire  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ . On définit alors

$$\vec{\epsilon} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad , \quad \frac{d\vec{\epsilon}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_j \quad (1.102)$$

L'hypothèse d'interactions conservatives signifie plus spécifiquement que  $\vec{T}_{j \rightarrow i} = -\vec{\nabla}_{\epsilon} V(\vec{\epsilon})$  avec  $V$  une énergie potentielle d'interaction. On aura alors

$$\vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = -\vec{\nabla}_{\epsilon} V \cdot \frac{d\vec{\epsilon}}{dt} = -\frac{dV(\vec{\epsilon})}{dt} \quad (1.103)$$

Dans le terme, cette réduction donne

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \approx -\frac{d}{dt} (\rho e_p \delta V) \quad (1.104)$$

pour le terme manquant. Ici, cette manipulation suggère l'existence d'un champ de densité d'énergie potentielle interne  $\rho e_p$ , qui ne dépend que de la configuration instantanée dans laquelle l'ensemble des particules de l'amas se trouve. On ne pourra jamais calculer cette énergie potentielle interne  $\rho e_p$  car les positions individuelles des particules ne sont pas connues. Par contre, on peut au moins imaginer qu'une énergie potentielle interne puisse exister et comment elle est reliée aux positions. En somme, nous avons trouvé une limite continue pour la cette puissance mécanique fournie par les forces d'interaction.

★ **Puissance mécanique des forces d'interactions.**

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{T}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i \approx \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{u} - \vec{\varphi} \right) \cdot \delta \vec{S} - \frac{d(\rho e_p \delta V)}{dt} \quad (1.105)$$

avec  $\vec{\varphi}(\vec{r}, t)$  un nouveau champ décrivant le flux de chaleur et  $e_p$  un nouveau champ pour la densité massique d'énergie interne. ■

Tout comme  $e_c$ , le champ  $e_p$  ne sera pas séparément disponible, mais fera partie de l'énergie interne totale.

★ **Densité d'énergie interne.**

$$e(\vec{r}, t) = e_c(\vec{r}, t) + e_p(\vec{r}, t) \quad (1.106)$$

définit la densité massique d'énergie interne. ■

Cette variable d'énergie interne est modélisée thermodynamiquement et en pratique est reliée à la température.

Tous les termes de l'équation (1.92) étant passés à la limite, nous pouvons enfin écrire l'équation pour l'énergie totale. En passant le terme avec la densité d'énergie potentielle à gauche, on aboutit à

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) dV = \iiint_{\mathcal{V}_m(t)} \left( \vec{f} \cdot \vec{u} + q \right) dV + \iint_{\Sigma_m(t)} \left( \vec{u} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\varphi} \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.107)$$

valable pour tout volume matériel. Comme avant, on utilise le théorème de transport et le théorème de la divergence afin de rassembler tous les termes sous une seule intégrale de volume. Comme  $\mathcal{V}_m$  est arbitraire, on doit satisfaire la loi locale pour l'énergie de sorte que :

★ **Equation d'énergie.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) \vec{u} \right] = \vec{f} \cdot \vec{u} + q + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\varphi} \right) \quad (1.108)$$

Si on soustrait de l'équation d'énergie totale (1.108), celle pour l'énergie cinétique de l'écoulement (1.91), on trouve une équation pour l'énergie interne :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) = q + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \right) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} \quad (1.109)$$

Quelques lignes de calcul indiciel permettent de trouver

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) = u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u} \quad (1.110)$$

d'où le résultat suivant

★ **Equation d'énergie interne.**

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) = \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u} + q - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} \quad (1.111)$$

### 1.3.4 La symétrie du tenseur des contraintes

Notre traduction des lois formulées dans l'introduction vers le formalisme du MMC est quasiment terminée. Il reste seulement

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left( \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \times m \vec{v}_i \right)}_{\text{cumul mom orbital}} = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}} \vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\text{cumul couple ext}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i}}_{\text{cumul couple int}} \quad (1.112)$$

qui exprime la conservation du moment cinétique sur tout le sous-ensemble de particules de l'amas. Le passage à la limite du moment cinétique  $\vec{L}$  et du couple des forces extérieures  $\vec{K}$  est trivial. A l'échelle de l'amas  $\mathcal{E}$  on aura

$$\delta \vec{L} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \times (m \vec{v}_i) \approx \vec{r} \times \rho \vec{u} \delta V \quad (1.113a)$$

$$\delta \vec{K} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \approx \vec{r} \times \vec{f} \delta V \quad (1.113b)$$

Pour calculer le moment orbital d'un volume macroscopique  $\mathcal{V}$  autour de l'origine et le couple des forces extérieures qui s'exerce dessus, on calcule

★ **Moment cinétique.**

$$\vec{L} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV \quad (1.114)$$

★ **Couple des forces extérieures.**

$$\vec{K} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{f} dV \quad (1.115)$$

Dans la plupart des milieux continus, l'hypothèse d'interactions centrales  $\vec{T}_{j \rightarrow i} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  convient. Dans ce cas et seulement dans ce cas, on montre que la limite continue des couples exercés par les forces d'interaction donne lieu à un couple surfacique. Pour le montrer, on effectue une série de manipulations similaires à celles utilisées en (1.76)

$$\begin{aligned} \delta \vec{K}_{\Sigma} &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_j \vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i} + \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}'} \vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{E}} \sum_{j \in \mathcal{E}} \underbrace{(\vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i} + \vec{r}_j \times \vec{T}_{i \rightarrow j})}_{=(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{T}_{j \rightarrow i} = \vec{0}} + \sum_{i \in \delta \mathcal{E}} \sum_{j \in \delta \mathcal{E}'} \vec{r}_i \times \vec{T}_{j \rightarrow i} \end{aligned} \quad (1.116)$$

Le premier terme ne disparaît que pour des interactions centrales. On a utilisé l'hypothèse d'interactions à courte portée, pour réduire les étendues des sommes à  $\delta \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$  et  $\delta \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$  = la proximité immédiate de la surface. Pour aller plus loin, on doit encore se mettre préférablement à l'échelle macroscopique. Ceci permet

de réaliser que la force de surface qui s'exerce sur le pavé infinitésimal  $d\vec{S}$  proche de  $\vec{r} \in \Sigma$  contribue de

$$d\vec{K}_\Sigma = \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{S}) \quad (1.117)$$

au couple surfacique total. Celui-ci se calcule donc comme suit :

★ **Couple surfacique.**

$$\vec{K}_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{S}) \quad (1.118)$$

Les trois termes intervenant dans le théorème du moment cinétique (1.112) étant passés à la limite continue, nous sommes en mesure de formuler une version continue sur un volume matériel  $\mathcal{V}_m(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV = \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times \vec{f} dV + \iint_{\Sigma_m} \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{S}) \quad (1.119)$$

On applique le théorème de transport de Reynolds à (1.119) :

$$\iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dV + \iint_{\Sigma_m} (\vec{r} \times \rho \vec{u}) (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times \vec{f} dV + \iint_{\Sigma_m} \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{S}) \quad (1.120)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on réécrit tous les termes de surface comme des termes de volume. Ici, il est vraiment nécessaire de maîtriser le calcul indiciel. On a

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_m} (\vec{r} \times \rho \vec{u}) (\vec{u} \cdot d\vec{S}) &= \iint_{\Sigma_m} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \rho u_k u_l dS_l \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial}{\partial x_l} (\vec{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \rho u_k u_l) dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \left( \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_l}}_{\delta_{jl}} \rho u_k u_l + x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) \right) dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m} \underbrace{\rho \vec{u} \times \vec{u}}_{=\vec{0}} dV + \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})) dV \end{aligned} \quad (1.121)$$

et

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_m} \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{S}) &= \iint_{\Sigma_m} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} dS_l \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m} \frac{\partial}{\partial x_l} (\vec{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m} \left( \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_l}}_{\delta_{jl}} \sigma_{kl} \right) dV + \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}_m} (\vec{e}_i \epsilon_{ijk} \sigma_{kj}) dV + \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) dV \end{aligned} \quad (1.122)$$

Ces équations permettent de réorganiser l'équation (1.120) comme

$$\iiint_{\mathcal{V}_m} (\vec{e}_i \epsilon_{ijk} \sigma_{kj}) dV = \iiint_{\mathcal{V}_m} \vec{r} \times \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}}_{=\vec{0}} \right) dV \quad (1.123)$$

Si on utilise la forme locale du principe fondamental de la dynamique, le membre de droite s'annule. La relation

$$\iiint_{\mathcal{V}_m} (\vec{e}_i \epsilon_{ijk} \sigma_{kj}) dV = 0 \quad (1.124)$$

doit donc être satisfaite pour tout volume matériel, d'où

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{xy} - \sigma_{yx} = 0, \sigma_{xz} - \sigma_{zx} = 0, \sigma_{yz} - \sigma_{zy} = 0 \quad (1.125)$$

et ce en tout point de l'espace. Le résultat fondamental qu'on obtient ici est donc que le tenseur des contraintes doit être symétrique.

★ **Symétrie du tenseur des contraintes.**

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^T \quad (1.126)$$

Cette propriété fondamentale découle entièrement de l'hypothèse d'interactions centrales. Il existe des modèles de fluides complexes dans lesquels on relâche cette hypothèse et le tenseur des contraintes n'y sera plus symétrique (au delà du cadre de ce cours).

### 1.3.5 Résumé

L'objectif initial qu'on s'est donné est atteint. En prenant l'hypothèse du milieu continu à la lettre, les équations pour des systèmes de particules en interaction suggèrent les lois fondamentales suivantes de la mécanique des milieux continus.

★ **Lois fondamentales (forme conservative).**

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.127a)$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (1.127b)$$

Energie totale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) \vec{u} \right] = \vec{f} \cdot \vec{u} + q + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\varphi}) \quad (1.127c)$$

On parle de la forme conservative car on retrouve systématiquement une structure

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{Champ}) + \vec{\nabla} \cdot (\text{Flux matériel du champ}) = \dots \quad (1.128)$$

dans les termes de gauche. Si on utilise la conservation de la masse, on peut proposer une forme alternative dans laquelle n'apparaissent que des dérivées advectives

★ **Lois fondamentales (forme avec dérivées advectives).**

Conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.129a)$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (1.129b)$$

Energie totale

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) = \vec{f} \cdot \vec{u} + q + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\varphi}) \quad (1.129c)$$

Au delà de ces lois d'évolution locale, on a pu déduire que le tenseur des contraintes doit toujours être symétrique, car sinon on violerait le théorème du moment cinétique à l'échelle locale des amas mésoscopiques.

Il est nécessaire de rappeler qu'avec seulement ces lois fondamentales, on ne résout aucun problème. Tout comme la mécanique Newtonienne nécessite de définir les forces extérieures, on aura besoin de définir

$$\vec{f}, q \quad (1.130)$$

en MMC. Tout comme la mécanique Newtonienne nécessite de définir les forces d'interaction entre particules, la MMC exigera de l'information supplémentaire sur les champs

$$\vec{\sigma}, \vec{\varphi}, e \quad (1.131)$$

Cette information sera donnée sous la forme de lois de comportement, dont on verra quelques exemples "fluides" dans les chapitres suivants.

### 1.3.6 Invariance Galiléenne

Les équations de la MMC étant obtenues à partir de la mécanique Newtonienne, elles héritent de l'invariance Galiléenne. Détaillons ce que cela signifie dans notre description continue. Le changement de coordonnées d'espace et temps se résume à

$$\begin{cases} x = x' + Ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x - Ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.132)$$

avec  $U$  une vitesse constante. La base naturelle des deux systèmes de coordonnées est la même

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \vec{e}'_x \\ \vec{e}_y = \vec{e}'_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}'_z \end{cases} \quad (1.133)$$

Pour traduire les dérivées partielles, on utilise la dérivée en chaîne. Ainsi on a

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - U \frac{\partial}{\partial x'} \quad (1.134)$$

et plus simplement

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad (1.135)$$

et similaire pour les autres dérivées spatiales,  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$  et  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$ . L'opérateur gradient devient, on a

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}' \Leftrightarrow \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}'_x \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{e}'_y \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{e}'_z \frac{\partial}{\partial z'} \quad (1.136)$$

Associé à ce changement de coordonnées est la transformation Galiléenne du champ de vitesse

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}'(x', y', z', t) + U \vec{e}'_x \quad (1.137)$$

Pour tous les autres champs on a plus simplement, une invariance

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z, t) &= \rho'(x', y', z', t') \\ e(x, y, z, t) &= e'(x', y', z', t') \\ q(x, y, z, t) &= q'(x', y', z', t') \\ \vec{f}(x, y, z, t) &= \vec{f}'(x', y', z', t') \\ \vec{\varphi}(x, y, z, t) &= \vec{\varphi}'(x', y', z', t') \\ \vec{\sigma}(x, y, z, t) &= \vec{\sigma}'(x', y', z', t') \end{aligned} \quad (1.138)$$

On montre que les lois d'évolutions pour les variables sans primes sont identiques à celles pour les variables avec primes. Les lois de la MMC prennent donc la même forme dans tous les repères inertiels. Exemple pour l'équation de continuité :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial \rho'}{\partial t'} - U \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + (\vec{u}' + U \vec{e}'_x) \cdot \vec{\nabla}' \rho' + \rho' \vec{\nabla}' \cdot (\vec{u}' + U \vec{e}'_x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial \rho'}{\partial t'} - U \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' \rho' + U \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \rho' \vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' \rho' + \rho' \vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' = 0
\end{aligned} \tag{1.139}$$

Dans le principe fondamental de la dynamique, tout le membre de droite reste identique (il suffit d'ajouter des primes partout). Dans le membre de gauche, on a

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \\
& = \rho' \left( \frac{\partial}{\partial t'} - U \frac{\partial}{\partial x'} \right) (\vec{u}' + U \vec{e}'_x) + \rho' \left( (\vec{u}' + U \vec{e}'_x) \cdot \vec{\nabla}' \right) (\vec{u}' + U \vec{e}'_x) \\
& = \rho' \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} - \rho' U \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x'} + \rho' (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{u}' + \rho' + \rho' U \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x'} \\
& = \rho' \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \rho' (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{u}'
\end{aligned} \tag{1.140}$$

et ainsi l'équation qui exprime le PFD localement est invariante. Pour l'équation d'énergie, on peut faire exactement le même traitement.

**Exercice** On considère un repère non-inertiel en translation non-stationnaire

$$\begin{cases} x = x' + X_*(t) \\ y = y' + Y_*(t) \\ z = z' + Z_*(t) \\ t = t' \end{cases} \tag{1.141}$$

Ici  $\vec{R}_*(t) = X_*(t) \vec{e}_x + Y_*(t) \vec{e}_y + Z_*(t) \vec{e}_z$  est la translation supposée connue. La vitesse se transforme nécessairement comme

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}'(x', y', z', t') + \frac{d\vec{R}_*}{dt}(t) \tag{1.142}$$

et on suppose l'accélération du référentiel  $\frac{d^2 \vec{R}_*}{dt^2}(t)$ , non-nulle. Les autres champs se transforment comme

$$\begin{aligned}
\rho(x, y, z, t) &= \rho'(x', y', z', t') \\
\dots \quad \dots \quad \dots &
\end{aligned} \tag{1.143}$$

Montrer que la force volumique n'est pas invariante, qu'il existe une pseudo-force volumique proportionnelle à l'accélération du référentiel. ■

**Exercice** On peut considérer l'équation pour l'énergie totale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) \vec{u} \right] = \vec{f} \cdot \vec{u} + q + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\varphi}) \tag{1.144}$$

comme seule équation fondamentale. Démontrer que l'exigence que celle-ci soit invariante pour toute transformation Galiléenne, quelle que soit  $\vec{U}$  la vitesse de translation uniforme du repère, implique nécessairement que la loi de conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique soient satisfaites. ■

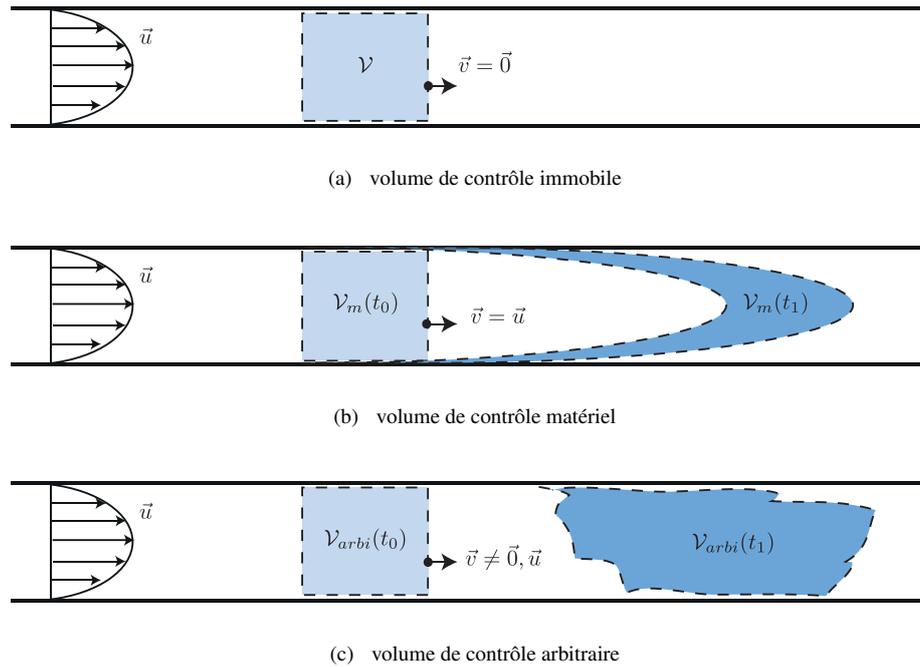


FIGURE 1.11 – En utilisant les lois de conservation, on peut évaluer des bilans sur des volumes de contrôle qui sont des volumes que l'utilisateur détermine et qui peuvent être fixe, matériel ou arbitraire.

## 1.4 Bilans sur volume de contrôle

Maintenant qu'on dispose des lois fondamentales valables à l'échelle locale, on est dans la capacité d'effectuer des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sur des volumes macroscopiques. Ecrire ces lois de bilan, c'est écrire des équations différentielles ordinaires pour la variation temporelle de la masse  $M$ , de la quantité de mouvement  $\vec{P}$  et de l'énergie totale  $E$ , dans un volume  $\mathcal{V}$  de contrôle. Ce volume de contrôle  $\mathcal{V}$  sera toujours choisi par l'utilisateur et peut être

1. **immobile** : le volume  $\mathcal{V}$  ne se déplace pas, sa vitesse  $\vec{v} = \vec{0}$ ,
2. **mobile et matériel** : le volume  $\mathcal{V}$  se déplace à la vitesse  $\vec{v} = \vec{u}$  locale du fluide,
3. **mobile et arbitraire** : le volume  $\mathcal{V}$  se déplace avec une vitesse  $\vec{v}$  connue mais arbitraire,

comme illustré sur la figure 1.11. Les formules suivantes sont données dans le cas général du volume mobile et arbitraire, mais il suffit de remplacer par  $\vec{v} = \vec{u}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  pour couvrir les cas du volume de contrôle matériel et fixe.

★ **Bilan de masse.** La masse  $M$  dans le volume de contrôle varie comme

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV = \iint_{\Sigma} \rho (\vec{v} - \vec{u}) \cdot d\vec{S} \quad (1.145)$$

★ **Bilan de quantité de mouvement.** La quantité de mouvement  $\vec{P}$  dans le volume de contrôle varie comme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{u} dV = \iint_{\Sigma} \rho \vec{u} (\vec{v} - \vec{u}) \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \vec{f} dV + \iint_{\Sigma} \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} \quad (1.146)$$

★ **Bilan d'énergie.** L'énergie totale  $E$  dans le volume de contrôle varie comme

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) dV & (1.147) \\ &= \oint_{\Sigma} \rho \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) (\vec{v} - \vec{u}) \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{f} \cdot \vec{u} + q) dV + \oint_{\Sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{u} - \vec{\varphi}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Pour montrer ces relations on utilise d'abord le théorème de transport, ensuite les lois locales fondamentales et puis le théorème de la divergence. Exemple donné pour la formule du bilan de masse

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ &= - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV + \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\Sigma} \rho (\vec{v} - \vec{u}) \cdot d\vec{S} & (1.148) \end{aligned}$$

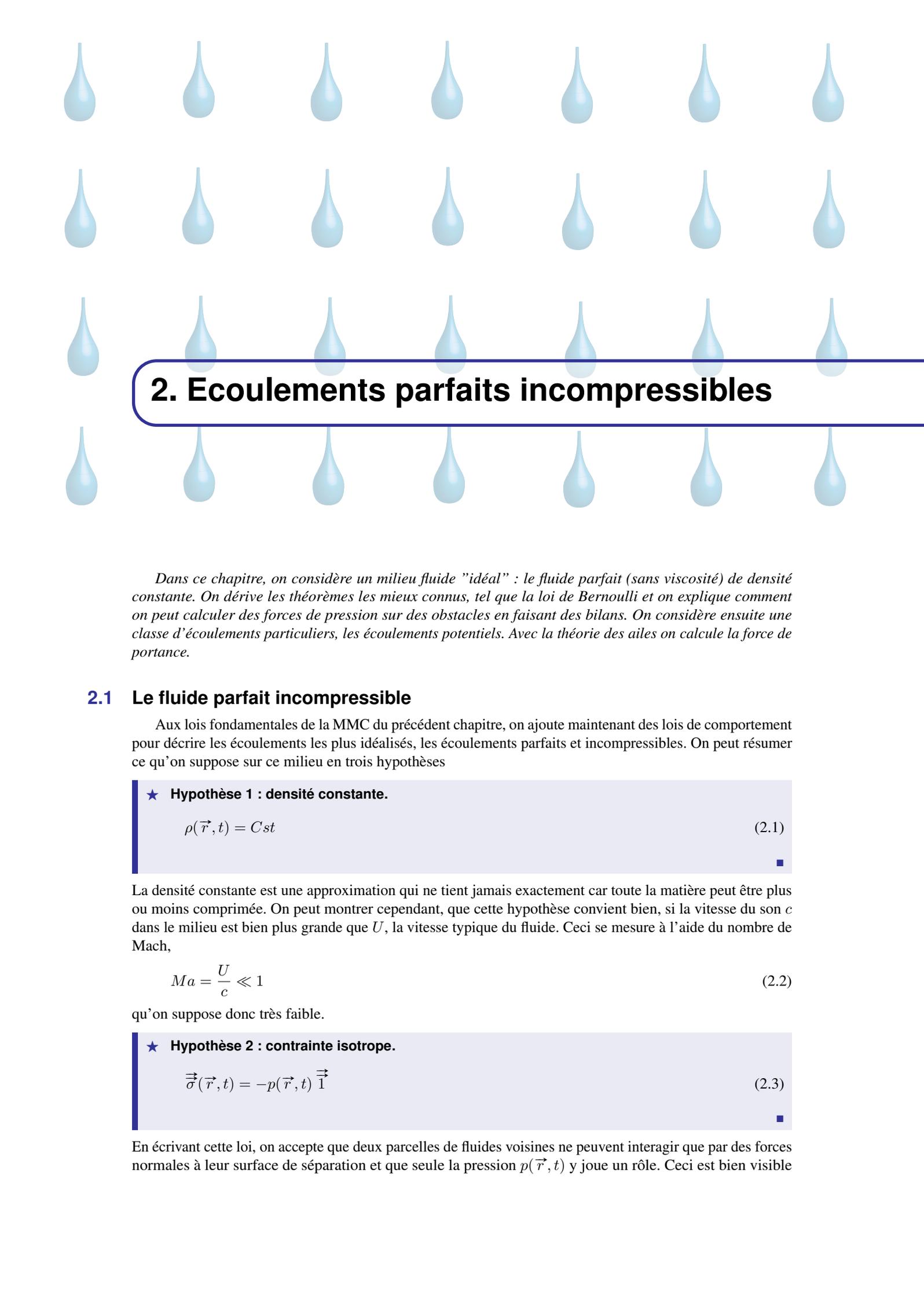
On vérifie aisément que lorsque le volume de contrôle est matériel, c'est-à-dire si  $\vec{u} = \vec{v}$ , la masse se conserve bel et bien. Démontrer vous-même les formules pour le bilan de quantité de mouvement et d'énergie totale.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser ce type de bilan dans un contexte typique d'écoulement stationnaire et de volume de contrôle stationnaire. Toute la dynamique étant indépendante du temps, on a nécessairement

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (1.149)$$

Avec les formules ci-dessus, ceci fixera donc des relations intégrales à satisfaire par le système. Parfois cela peut suffire pour déduire de l'information pertinente sur des systèmes fluides qui semblent assez complexes au premier abord, tel que le ressaut hydraulique qui sera étudié en TD2.





## 2. Écoulements parfaits incompressibles

*Dans ce chapitre, on considère un milieu fluide "idéal" : le fluide parfait (sans viscosité) de densité constante. On dérive les théorèmes les mieux connus, tel que la loi de Bernoulli et on explique comment on peut calculer des forces de pression sur des obstacles en faisant des bilans. On considère ensuite une classe d'écoulements particuliers, les écoulements potentiels. Avec la théorie des ailes on calcule la force de portance.*

### 2.1 Le fluide parfait incompressible

Aux lois fondamentales de la MMC du précédent chapitre, on ajoute maintenant des lois de comportement pour décrire les écoulements les plus idéalisés, les écoulements parfaits et incompressibles. On peut résumer ce qu'on suppose sur ce milieu en trois hypothèses

★ **Hypothèse 1 : densité constante.**

$$\rho(\vec{r}, t) = Cst \quad (2.1)$$

La densité constante est une approximation qui ne tient jamais exactement car toute la matière peut être plus ou moins comprimée. On peut montrer cependant, que cette hypothèse convient bien, si la vitesse du son  $c$  dans le milieu est bien plus grande que  $U$ , la vitesse typique du fluide. Ceci se mesure à l'aide du nombre de Mach,

$$Ma = \frac{U}{c} \ll 1 \quad (2.2)$$

qu'on suppose donc très faible.

★ **Hypothèse 2 : contrainte isotrope.**

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, t) = -p(\vec{r}, t) \vec{1} \quad (2.3)$$

En écrivant cette loi, on accepte que deux parcelles de fluides voisines ne peuvent interagir que par des forces normales à leur surface de séparation et que seule la pression  $p(\vec{r}, t)$  y joue un rôle. Ceci est bien visible

dans la forme différentielle de la force de surface

$$d\vec{F}_\Sigma = -p d\vec{S} \quad (2.4)$$

qui est toujours normale à la surface de séparation. En plus, l'amplitude de la force de pression ne dépend pas de l'orientation de l'élément de surface, d'où le vocabulaire "isotrope". Dans un milieu incompressible, la pression joue à peu près le même rôle que les forces de réaction de la mécanique du point : elle s'adapte pour que le milieu fluide puisse rester infiniment peu compressible.

★ **Hypothèse 3 : ni source ni flux de chaleur.**

$$q = 0, \quad \vec{\varphi} = \vec{0} \quad (2.5)$$

Une parcelle de fluide parfait ne peut pas échanger la chaleur qu'elle transporte avec le fluide autour et on ne peut pas non plus chauffer le fluide par l'extérieur.

## 2.2 Les équations du modèle

### 2.2.1 Lois d'évolution

La conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique dans ce milieu sont donnés par

★ **Lois d'évolution (écoulement parfait incompressible).**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.6a)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (2.6b)$$

La deuxième équation (2.6b) est connue sous le nom **d'équation d'Euler**. Ces deux équations (1 scalaire et 1 vectorielle) définissent un système fermé pour les variables  $p$  et  $\vec{u}$ . Dans la majorité des applications, la gravité sera la seule densité de force extérieure telle que

$$\vec{f} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z = -\vec{\nabla}(\rho g z) \quad (2.7)$$

avec l'axe  $z$  orienté vers le haut. Il s'agit d'une force conservative, qui dérive d'une densité d'énergie potentielle. Dans un fluide parfait incompressible, l'équation pour l'énergie interne n'apporte rien de plus car  $e$  n'a aucune influence sur  $\vec{u}$  ou  $p$ . Toutefois, avec les lois de comportement données, on peut trouver

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.8)$$

La densité massique d'énergie interne  $e$  est donc un champ matériel dans un fluide parfait incompressible.

### 2.2.2 Conditions aux limites

Soit  $\Sigma$  une paroi rigide en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  et  $\vec{n}$  la normale à cette paroi. Bien qu'un fluide parfait peut glisser librement sur cette paroi, cette dernière reste imperméable malgré tout. Mathématiquement on exprime cette condition par :

★ **Imperméabilité d'une paroi rigide.**

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{n}|_\Sigma = 0 \quad (2.9)$$

pour une paroi de normale  $\vec{n}$  qui bouge à la vitesse  $\vec{v}$ .

Sur une paroi (infiniment) rigide, il n'y a pas besoin de donner une condition sur la pression car on suppose justement que cette paroi peut résister à toute pression.

Dans le TD3 sur le ressaut hydraulique, l'écoulement supposé présente une surface libre, en contact avec un gaz à la pression atmosphérique  $p_0$ . Si cette surface libre ne change pas de forme, on peut utiliser la condition aux limites suivante :

★ **Surface libre immobile (sans tension de surface).**

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0 \quad , \quad p|_{\Sigma} = p_0 \quad (2.10)$$

Le cas général d'une surface libre mobile avec tension de surface non-nulle sera traité dans le chapitre 4, dédié à la capillarité.

## 2.3 Théorèmes

### 2.3.1 Loi de Bernoulli (v1)

La loi de Bernoulli est une loi locale qui se dérive à partir de la loi d'Euler et qui s'applique à des écoulements parfaits stationnaires. En utilisant la propriété de calcul vectoriel

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \left( \epsilon_{jlm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) u_k \\ &= \vec{e}_i (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) \frac{\partial u_m}{\partial x_l} u_k \\ &= \vec{e}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k - \vec{e}_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} u_k \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

on peut écrire l'équation d'Euler pour un écoulement stationnaire ( $\partial_t \vec{u} = \vec{0}$ ) de manière alternative :

$$\rho (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\vec{\nabla} \left( p + \frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} + \rho g z \right) \quad (2.12)$$

On multiplie scalairement cette relation avec  $\vec{u}$ , ce qui donne

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left( p + \rho \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \rho g z \right) = 0 \quad (2.13)$$

On sort exactement la même loi de l'équation pour l'énergie cinétique de l'écoulement (1.91). Avec la définition (1.18) de la ligne de courant,  $\vec{u} = \partial_s \vec{r}$  et la définition du gradient, on peut écrire cette loi comme

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( p + \rho \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \rho g z \right) = 0 \quad (2.14)$$

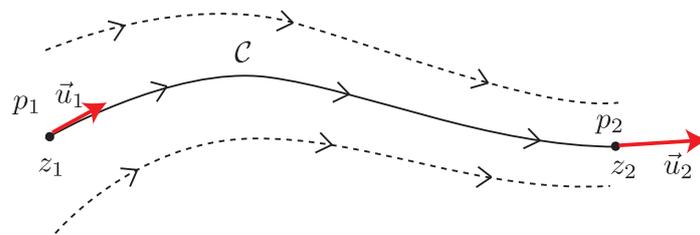


FIGURE 2.1 – Dans un écoulement parfait, incompressible et stationnaire, la loi de Bernoulli permet de relier pression, vitesse et hauteur entre deux points qui appartiennent à la même ligne de courant.

$\forall s$ , c'est-à-dire pour toute position sur une ligne de courant. Ceci implique que  $p + \rho(\|\vec{u}\|^2/2) + \rho gz$ , appelé la charge, doit se conserver le long d'une ligne de courant. On retrouve ici, la célèbre loi de Bernoulli.

★ **Loi de Bernoulli.** Dans un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, la charge

$$p + \frac{\rho\|\vec{u}\|^2}{2} + \rho gz = C \quad (2.15)$$

reste constante le long des lignes de courant. ■

Chaque ligne de courant peut admettre une valeur de  $C$  différente. Le plus souvent, on applique la loi de Bernoulli entre deux points 1 et 2 sur une même ligne de courant (cf. figure 2.1), on peut alors exiger que

$$p_1 + \frac{\rho\|\vec{u}_1\|^2}{2} + \rho gz_1 = p_2 + \frac{\rho\|\vec{u}_2\|^2}{2} + \rho gz_2 \quad (2.16)$$

Ceci permet de corréler pressions et vitesses dans deux points entièrement différents.

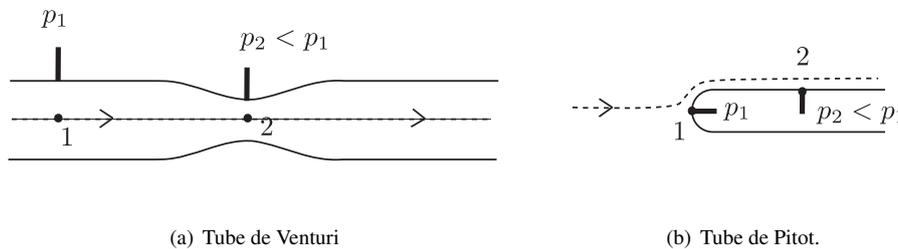


FIGURE 2.2 – Instruments pour mesurer la vitesse à l'aide d'une mesure de différence de pression et dont on explique le fonctionnement par la loi de Bernoulli.

### Venturi et tube de Pitot

La loi de Bernoulli est souvent utilisée pour expliquer le fonctionnement du tube de Venturi et du tube de Pitot. Ces deux instruments servent à mesurer la vitesse d'un fluide et ils sont illustrés sur la figure 2.2.

Commençons par discuter le tube de Venturi de la figure 2.2-(a). À l'entrée du tube, au point 1, le fluide avance à la vitesse  $U_1$  à travers une section  $S_1$  et à la pression  $p_1$ . Au milieu du tube, au point 2, le fluide passe à la vitesse  $U_2$  dans un convergent de section  $S_2 < S_1$  et sa pression y vaut  $p_2$ . La conservation du débit et la loi de Bernoulli imposent respectivement que

$$Q = U_1 S_1 = U_2 S_2 \quad , \quad p_1 + \frac{\rho U_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho U_2^2}{2} \quad (2.17)$$

En combinant ces deux formules, on déduit que

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)S_1^2 S_2^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}. \quad (2.18)$$

Cette formule permet donc de calculer le débit en fonction des caractéristiques du fluide, du tube et de la mesure du différentiel de pression  $p_1 - p_2$ .

Le tube de Pitot illustré sur la figure 2.2-(b) permet une mesure plus directe de la vitesse. Dans le point 1 sur la face amont du tube, le fluide est au repos  $U_1 = 0$  et la pression y vaut  $p_1$ . Le point 2 est sur le côté du tube où le fluide a de nouveau été accéléré à la vitesse  $U_2$  et la pression y vaut  $p_2$ . La loi de Bernoulli nous permet d'écrire

$$U_2 \approx \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (2.19)$$

et cette vitesse sera approximativement celle du fluide.

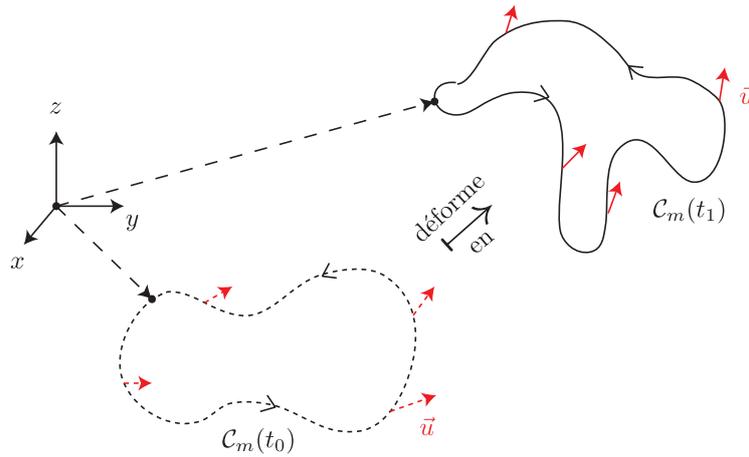


FIGURE 2.3 – Illustration d'un contour matériel  $C_m(t)$  qui se déplace avec le fluide. Dans un fluide parfait et incompressible, la circulation de l'écoulement  $\vec{u}$  le long d'un contour matériel se conserve au cours du temps (Théorème de Kelvin).

### 2.3.2 Théorème de la circulation de Kelvin

Le théorème de la circulation de Kelvin est une loi de conservation qui s'applique dans tous les fluides parfaits barotropes (pression varie seulement avec la densité) et incompressibles. Ici on se limite au cas incompressible.

★ **Théorème de la circulation de Kelvin.** Dans un écoulement parfait incompressible, la circulation sur un contour matériel se conserve au cours du temps.

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.20)$$

Pour démontrer ce théorème, commençons par définir ce qu'est un contour matériel. Il s'agit d'une ligne matérielle  $C_m(t)$  fermée sur elle-même qui bouge donc dans le fluide, comme illustré sur la figure 2.3. Mathématiquement, on peut paramétriser un tel contour comme

$$\vec{r}(s, t) \in C_m(t) \quad , \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{r}(s, t_0) \in C_m(t_0) \quad (2.21)$$

avec  $s \in [s_i, s_f]$  un intervalle du paramètre  $s$  arbitraire. Comme il s'agit d'un contour fermé, on a nécessairement

$$\vec{r}(s_i, t) = \vec{r}(s_f, t) \quad (2.22)$$

c'est-à-dire les points initiaux et finaux doivent être coïncider, à tout temps. Ayant introduit ce contour, on peut réécrire l'intégrale de la circulation comme une intégrale à bornes fixes

$$\Gamma = \oint_{C_m(t)} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_{s_i}^{s_f} \vec{u}(\vec{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds. \quad (2.23)$$

Ceci permet, comme dans le théorème du transport, de passer la dérivation dans l'intégrale :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{s_i}^{s_f} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \right] \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \vec{u}(\vec{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s \partial t} \right\} ds \quad (2.24)$$

Comme le contour est matériel, on peut remplacer  $\partial_t \vec{r} = \vec{u}$  :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{s_i}^{s_f} \left\{ \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \vec{u}(\vec{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \right\} ds \quad (2.25)$$

On utilise l'équation d'Euler pour le premier terme de l'intégrale et le deuxième terme se regroupe sous la forme d'une différentielle totale

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{s_i}^{s_f} \left[ \left( -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial \|\vec{u}\|^2}{\partial s} \right] ds \quad (2.26)$$

On peut simplifier  $\vec{\nabla} p \cdot (\partial \vec{r} / \partial s) = \partial p / \partial s$  et ceci nous permet de revenir sur une notation plus formelle de ces intégrales

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{\rho} \oint_{C_m(t)} dp + \oint_{C_m(t)} d(\vec{g} \cdot \vec{r}) + \frac{1}{2} \oint_{C_m(t)} d(\|\vec{u}\|^2) = 0 \quad (2.27)$$

Sous les intégrales on ne trouve que des différentielles totales, qui une fois intégrées sur le contour fermée, s'annulent. On trouve donc  $d\Gamma/dt = 0$ , ce qui démontre le théorème de Kelvin.

Avec le théorème de Stokes on peut donner une forme alternative, qui s'appuie sur une surface matérielle et sur la vorticité  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ .

★ **Théorème de circulation de Kelvin (alternatif).**

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.28)$$

Physiquement, le théorème de Kelvin exprime que le moment orbital d'un volume matériel quelconque se conserve comme on le montre en TD2.

## 2.4 Force de pression sur un obstacle rigide

Dans de nombreuses situations, on considère un écoulement stationnaire en contact avec un obstacle supposé rigide. Nous sommes alors intéressés par la force que l'écoulement exerce sur la structure.

### 2.4.1 Méthode 1 : calcul direct

Si on connaît le champ de pression à la surface  $S$  de l'obstacle, on peut utiliser la formule suivante pour calculer la force sur l'obstacle.

★ **Force de pression sur une surface (calcul direct).**

$$\vec{F}_{sur S} = \iint_S p d\vec{S} \quad (2.29)$$

On prend soin d'orienter  $d\vec{S}$  toujours vers l'extérieur du volume fluide, vers l'obstacle.

### 2.4.2 Méthode 2 : en passant par un bilan

Une méthode alternative consiste à passer par un bilan de quantité de mouvement ou par une intégration de l'équation d'Euler sur un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  fixe délimité par une surface  $\Sigma$  contenant  $S$ , la surface du solide. L'intégration de la loi d'Euler sur ce volume de contrôle ou l'expression du bilan  $d\vec{P}/dt = \vec{0}$  donne directement

$$-\iint_{\Sigma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{g} dV}_{M\vec{g}} - \iint_{\Sigma} p d\vec{S} = 0 \quad (2.30)$$

La gravité cause toujours un terme de poids trivial. En pratique la surface  $\Sigma$  sera constituée d'un ensemble de facettes

$$\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k \quad (2.31)$$

dont  $S_1$  est par exemple la surface du solide. En manipulant l'équation (2.30), on peut alors isoler

★ Force de pression sur une surface (par bilan).

$$\vec{F}_{sur S_1} = \iint_{S_1} p d\vec{S} = M \vec{g} - \oiint_{\Sigma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) - \sum_{j=2}^k \iint_{S_k} p d\vec{S} \quad (2.32)$$

L'intérêt de cette formule, plus complexe que la précédente, ne semble pas directement évident et expliquons-le donc. En pratique, on ne connaît pas toujours la pression sur la surface de l'obstacle rigide et la force de pression semble donc a priori inaccessible. Cette formule alternative nous indique, qu'il peut être suffisant de connaître la pression et l'écoulement à d'autres endroits. En choisissant bien le volume de contrôle on peut donc parfois accéder à la force de pression sur l'obstacle, sans connaître la pression sur l'obstacle lui-même. Il sera parfois nécessaire de combiner cette formule avec la conservation de la masse et la loi de Bernoulli

$$1. \frac{dM}{dt} = - \oiint_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0 \quad , \quad 2. \quad p + \frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} + \rho g z = Cst \quad (2.33)$$

pour s'en sortir.

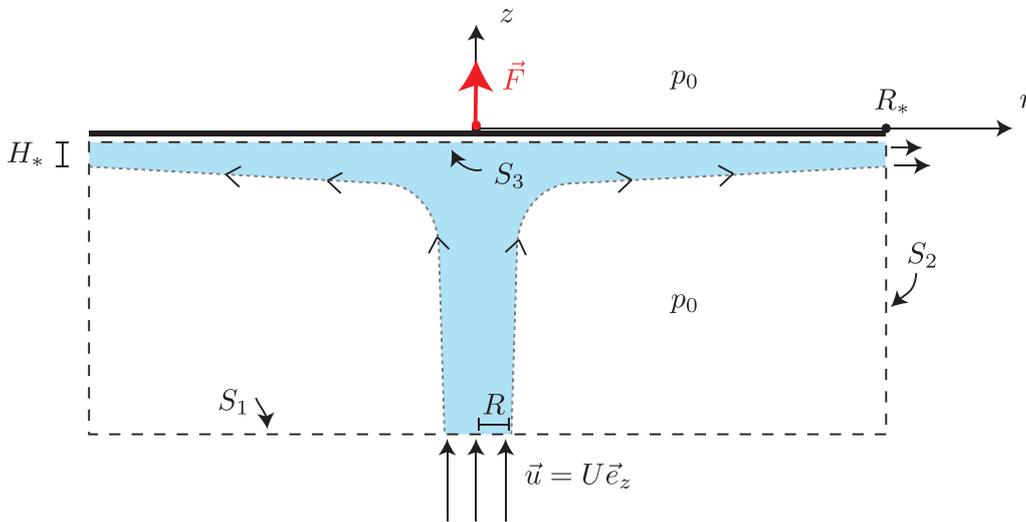


FIGURE 2.4 – Un jet axisymétrique de rayon  $R$  et de vitesse  $U$  impacte une plaque plane. On calcule la force de pression exercée sur cette plaque en utilisant la méthode qui passe par un bilan. Le volume de contrôle (ligne interrompue) choisi ici est un cylindre de rayon  $R_*$ .

### 2.4.3 Exemple : Force d'un jet axisymétrique qui impacte une plaque plane

On considère un jet de fluide axisymétrique de rayon  $R$  qui envoie un écoulement à la vitesse  $U \vec{e}_z$  à la pression atmosphérique  $p_0$  sur une plaque située en  $z = 0$ . Après impact sur le disque, le fluide est évacué radialement. On suppose la surface libre en contact avec l'air de forme fixe et que la pression de l'air est  $p_0$ . On ignore la gravité,  $\vec{g} = 0$ . On veut calculer la force que ce jet exerce sur le disque.

On introduit un volume de contrôle cylindrique schématisé dans la figure 2.4-(a). Sa surface  $\Sigma$  se laisse découper en 3 morceaux distincts :  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Groupons ce qu'on sait sur l'écoulement, sur la surface et sur la pression à ces trois endroits. L'entrée du jet se fait par  $S_1$ , mais seulement pour  $r \in [0, R]$ . Sur cette surface

$$S_1 : d\vec{S}|_{S_1} = -r dr d\theta \vec{e}_z \quad , \quad \vec{u}|_{S_1} = \begin{cases} U \vec{e}_z & , \quad r < R \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases} \quad , \quad p|_{S_1} = p_0 \quad (2.34)$$

L'hypothèse que la pression dans le jet est identique à la pression  $p_0$  de l'air n'est pas si mauvaise si on ignore la tension de surface (cf. chapitre 4). Sur la paroi cylindrique  $S_2$  de rayon  $R_*$ , le fluide ne sort que

pour  $z \in [-H_*, 0]$ . A cet endroit du fluide, pression et vitesse sont inconnues, mais on sait que  $d\vec{S}$  y est radial et cette information est suffisante. Sur le reste du cylindre, la vitesse est nulle et la pression, celle de l'air

$$S_2 : d\vec{S}|_{S_2} = R_* d\theta dz \vec{e}_r, \quad \vec{u}|_{S_2} = \begin{cases} u_r(R_*, z) \vec{e}_r & , \quad -H_* < z < 0 \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$p|_{S_2} = \begin{cases} p(R_*, z) & , \quad -H_* < z < 0 \\ p_0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.35)$$

La plaque  $S_3$  est imperméable et la pression y est inconnue à ce stade

$$S_3 : \vec{u} \cdot d\vec{S}|_{S_3} = 0, \quad p|_{S_3} = p(r, 0) \quad (2.36)$$

Malgré le fait que la pression n'est pas connue sur la plaque, on peut tout de même calculer la force de pression exercée sur cette plaque en passant par la méthode du bilan de quantité de mouvement. En intégrant la loi d'Euler sur le volume de contrôle, on obtient

$$\vec{0} = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) + \iint_{\Sigma} p d\vec{S} \quad (2.37)$$

On a

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) &= -\rho U^2 \pi R^2 \vec{e}_z \\ \iint_{S_2} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) &= R_* \left( \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta \right) \left( \int_{-H_*}^0 \rho u_r^2(R_*, z) dz \right) = \vec{0} \\ \iint_{S_3} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.38)$$

La contribution sur  $S_2$  disparaît car  $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$  intégrée sur  $\theta \in [0, 2\pi]$  donne  $\vec{0}$ . Pour les forces de pression, on a

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} p d\vec{S} &= -p_0 \pi R_*^2 \vec{e}_z \\ \iint_{S_2} p d\vec{S} &= R_* \left( \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\theta \right) \left( \int_{-H}^0 p(R_*, z) dz \right) = \vec{0} \\ \iint_{S_3} p d\vec{S} &= \vec{F}_{jet \text{ sur } S_3} \end{aligned} \quad (2.39)$$

N'oublions pas qu'on doit intégrer la pression sur tout  $S_1$ , c'est-à-dire pour  $r \in [0, R_*]$ .  $\vec{F}_{jet \text{ sur } S_3}$  est la force que le fluide exerce sur le bas de la plaque. En injectant tout ceci dans le bilan (2.37), on trouve

$$\vec{F}_{jet \text{ sur } S_3} = p_0 \pi R_*^2 \vec{e}_z + \rho U^2 \pi R^2 \vec{e}_z \quad (2.40)$$

L'air au dessus de la plaque la pousse vers le bas avec une force

$$\vec{F}_{air \text{ sur } S_3} = -p_0 \pi R_*^2 \vec{e}_z \quad (2.41)$$

et compense l'effet de la pression atmosphérique qui doit effectivement n'avoir aucun effet dans ce problème. On trouve finalement que

$$\vec{F}_{sur S_3} = \vec{F}_{jet \text{ sur } S_3} + \vec{F}_{air \text{ sur } S_3} = \rho U^2 \pi R^2 \vec{e}_z \quad (2.42)$$

Seules les caractéristiques du jet déterminent la force exercée. L'étendue de la plaque,  $R_*$  et la pression  $p_0$  n'influencent pas la force.

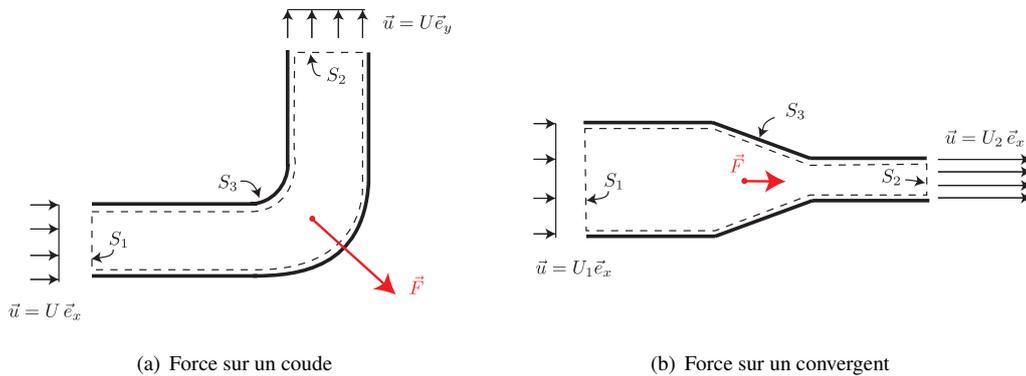


FIGURE 2.5 – Calculer la force de pression sur la paroi solide pour deux écoulements parfaits et incompressibles. Le premier écoulement passe par (a) un coude et exerce une force diagonale et orientée vers le bas. Dans le cas (b) d'un écoulement dans un convergent, on trouve la force orientée dans le sens de l'écoulement.

### Exercices

Dans les deux exercices suivants, on a un but similaire : le calcul d'une force de pression sur une structure, en passant par la méthode du bilan de quantité de mouvement. Entraînez-vous.

**Exercice Force sur un coude.** Lorsqu'on fait circuler un fluide dans un tuyau tordu, ce tuyau subira des forces de pression non-négligeables. On a tout intérêt à bien l'accrocher au mur ou, dans le cas d'un tuyau d'arrosage de pompier, de bien le tenir. On imagine la situation de la figure 2.5-(a), où un fluide à pression  $p$  et vitesse  $U$  est dévié de  $90^\circ$ . On note  $S$ , la section du tube. La direction  $z$  est le haut et  $x$  vers la droite. On ignore la gravité.

1. Exprimer la conservation de masse et de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle.
2. Calculer la force de pression exercée sur la paroi solide ( $S$ ) du coude.

**Exercice Force sur un convergent.** Comme le montre la figure 2.5-(b), on imagine un écoulement uniforme qui entre à la vitesse  $U_1$  et la pression  $p_1$  dans un tube de section  $S_1$  et qui ressort, après être passé par un convergent, à la vitesse  $U_2$  uniforme et la pression  $p_2$  dans un tube de section  $S_2 < S_1$ . Le volume de contrôle est délimité par les faces d'entrée et de sortie et par la paroi du tuyau. On ignore la gravité. On cherche à calculer la force que l'écoulement exerce sur la paroi du tuyau.

1. Exprimer la conservation de la masse totale  $M$  sur le volume.
2. Exprimer la conservation de la quantité de mouvement totale  $\vec{P}$  sur le volume.
3. Exprimer la loi de Bernoulli entre l'entrée et la sortie.
4. Combiner les 3 lois pour trouver la force que l'écoulement exerce sur le tuyau en fonction du débit volumique  $Q$ ,  $\rho$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .

#### 2.4.4 Paradoxe de d'Alembert

On considère la figure 2.6 où on imagine un obstacle rigide à la surface  $S_{obs}$  placée dans une conduite de section  $S$ . On suppose un écoulement parfait et stationnaire qui entre à la vitesse  $U \vec{e}_x$  à la pression  $p$  et on ignore la gravité. Suffisamment loin en aval de l'obstacle, on peut supposer que l'écoulement retrouve sa forme homogène. Suite à la conservation de la masse, on doit avoir la même vitesse  $U \vec{e}_x$  à la sortie et suite à la loi de Bernoulli, on doit avoir la même pression  $p$ . A cause de cette symétrie, la méthode du bilan nous

donne

$$\vec{F}_{sur\ S} = \iint_{S_{obs}} p d\vec{S} = - \iint_{S_{tuyau}} p d\vec{S} \quad (2.43)$$

La magnitude de la force exercée dans le sens de l'écoulement sur l'obstacle sera

$$F_{sur\ obs\ selon\ x} = \vec{F}_{sur\ S} \cdot \vec{e}_x = 0 \quad (2.44)$$

car la paroi du tuyau est supposée perpendiculaire à  $\vec{e}_x$ . Ceci suggère que l'écoulement parfait stationnaire n'exerce aucune force dans le sens de l'écoulement sur l'obstacle, quelle que soit sa forme. Ce résultat est un peu surprenant car on sait bien que des objets placés dans un écoulement subissent des forces de trainée. On parle du paradoxe de d'Alembert.

★ **Paradoxe de d'Alembert.** Un obstacle rigide placé dans un écoulement uniforme, stationnaire, parfait et incompressible ne subit aucune force de la part de l'écoulement dans le sens de l'écoulement. ■

Les autres composantes de la force ne s'annulent pas forcément, on peut avoir des forces de portance. En TD4 on retrouvera ce résultat par un calcul plus direct et dans le cas d'une géométrie très spécifique, l'écoulement autour d'un cylindre infini.

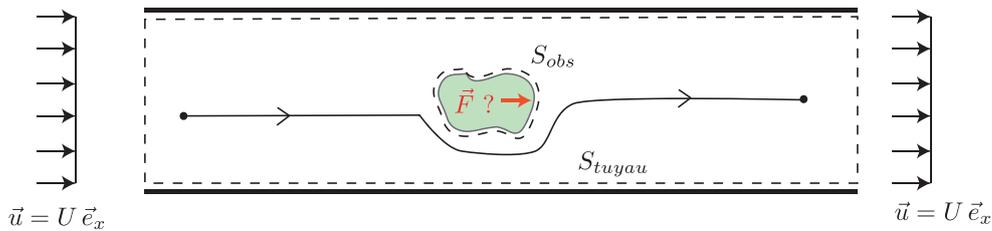


FIGURE 2.6 – Paradoxe de d'Alembert : un obstacle rigide placé dans un écoulement parfait, incompressible et stationnaire ne subit aucune force dans la direction de l'écoulement.

## 2.5 Écoulements potentiels

### 2.5.1 Potentiel hydrodynamique

Un écoulement incompressible qui est potentiel est un écoulement qui dérive d'un potentiel hydrodynamique Laplacien

★ **Écoulement potentiel.** On appelle  $\phi$  le potentiel hydrodynamique et

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad (2.45)$$

sera l'écoulement potentiel. L'incompressibilité exige que  $\phi$  soit une fonction harmonique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.46)$$

Le potentiel  $\phi$  est toujours défini à une constante additive près. ■

Un écoulement potentiel est automatiquement irrotationnel, c'est-à-dire sa vorticité est nulle telle que

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \vec{0} \quad (2.47)$$

Si l'écoulement entre en contact avec des parois imperméables, il faut imposer la condition aux limites d'imperméabilité.

★ **Imperméabilité pour un écoulement potentiel.**

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi|_{\Sigma} = \vec{n} \cdot \vec{v}|_{\Sigma} \quad (2.48)$$

■

### 2.5.2 Exemples d'écoulements potentiels élémentaires

On donne quelques exemples de potentiels hydrodynamiques à deux dimensions.

★ **Écoulements potentiels élémentaires.**

Écoulement uniforme

$$\phi = Ux = Ur \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi = U \vec{e}_x \quad (2.49a)$$

Source ponctuelle

$$\phi = A \ln r \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi = \frac{A}{r} \vec{e}_r \quad (2.49b)$$

Vortex ponctuel

$$\phi = A\theta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi = \frac{A}{r} \vec{e}_\theta \quad (2.49c)$$

Dipôle élémentaire

$$\phi = -\frac{A}{r} \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi = \frac{A}{r^2} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (2.49d)$$

Multipôle élémentaire

$$\phi = -\frac{A}{r^m} \cos m\theta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi = \frac{mA}{r^{m+1}} (\cos m\theta \vec{e}_r - \sin m\theta \vec{e}_\theta) \quad (2.49e)$$

■

Quelques uns de ces écoulements sont illustrés dans la figure suivante.

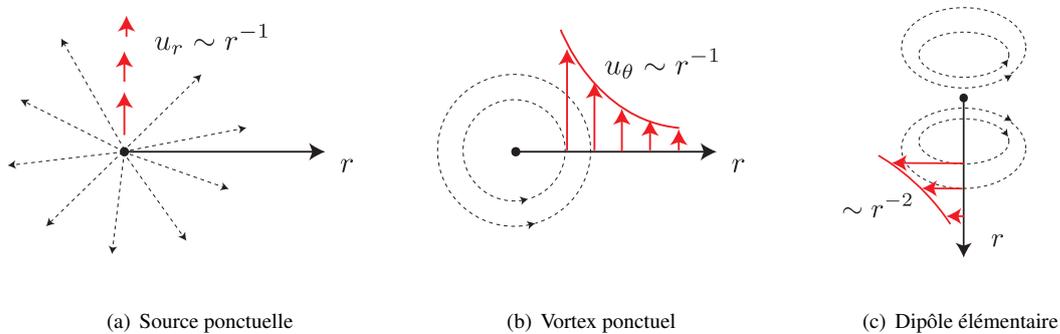


FIGURE 2.7 – Illustration d'écoulements potentiels simples.

### 2.5.3 Loi de Bernoulli (v2)

Si on remplace  $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$  dans l'équation d'Euler instationnaire et en utilisant la propriété (2.11) avec  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$ , nous pouvons arriver sur

$$\vec{\nabla} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho \|\vec{\nabla}\phi\|^2}{2} + p + \rho g z \right) = \vec{0} \quad (2.50)$$

L'intégration spatiale mène à une deuxième version de la loi de Bernoulli, uniquement valable pour des écoulements potentiels.

★ **Loi de Bernoulli pour écoulement potentiel.**

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho \|\vec{\nabla}\phi\|^2}{2} + p + \rho g z = C(t) \quad (2.51)$$

Ici  $C(t)$  est une fonction arbitraire du temps. ■

Parfois on parle de la forme instationnaire de la loi de Bernoulli, mais il est préférable de bien mentionner qu'elle ne s'applique qu'aux écoulements potentiels. Intéressant à retenir est que cette loi permet de relier les conditions hydrodynamiques en des points différents qui *ne se trouvent pas sur la même ligne de courant*. Ceci est une spécificité des écoulements potentiels. Le plus souvent on utilise cette loi pour calculer la pression, une fois que  $\phi$  a été trouvé après avoir résolu le problème de Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$ , comme on le verra en TD3.

### 2.5.4 Non-unicité du potentiel

Dans un domaine de fluide simplement connecté, le potentiel hydrodynamique solution de (2.48) est unique (à une constante près). Dans ce type de domaine, tout contour dans le domaine peut être continûment transformé en un contour de longueur 0, sans croiser les bords du domaine. L'intérieur ou l'extérieur d'une sphère sont des exemples de domaines simplement connectés.

Dans le cas d'un domaine multiplement connecté, le problème de Laplace pour le potentiel avec des conditions d'imperméabilité n'admet pas une solution unique. Toute une famille d'écoulements est alors admise. Un exemple d'un tel domaine est l'intérieur ou l'extérieur d'un tore ou l'extérieur d'un cylindre infiniment haut. La non-unicité du potentiel se mesure à travers la non-unicité de la circulation.

★ **Non-unicité du potentiel hydrodynamique.** Le potentiel hydrodynamique est non-unique dans un domaine de fluide multiplement connecté. La circulation autour d'un contour  $C$  dont on ne peut pas réduire continûment la longueur à zéro

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (2.52)$$

prendra une valeur arbitraire. ■

On ne démontre pas ce théorème de manière générale. Donnons juste un exemple concret. On imagine le domaine fluide à l'extérieur d'un cylindre. Au loin on suppose un écoulement uniforme  $\vec{u} \approx U \vec{e}_x$ . Ce cas sera étudié en TD3 et on y trouvera un potentiel  $\phi$ . Mais cette solution n'est pas unique,

$$\phi' = \phi + \phi_* \quad \text{avec} \quad \phi_* = A\theta \quad (2.53)$$

convient aussi, en effet  $\nabla^2 \phi' = 0$  car  $\nabla^2 \phi_* = r^{-2} \partial_{\theta\theta}^2 (A\theta) = 0$ . Si la condition d'imperméabilité  $\partial_r \phi|_{r=R} = 0$  est satisfaite alors il en sera de même pour  $\partial_r \phi'|_{r=R} = 0$  car l'écoulement associé à  $\phi_*$  est purement azimutal et est celui du vortex ponctuel

$$\vec{u}_* = \phi_* = \vec{\nabla} \frac{1}{r} \frac{\partial (A\theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{A}{r} \vec{e}_\theta \quad (2.54)$$

Le potentiel hydrodynamique dans ce problème de l'écoulement autour d'un cylindre est donc indéterminé à ce champ  $\phi_*$  près. Si on calcule la circulation apportée par  $\phi_*$ , autour d'une courbe qui contourne le cylindre

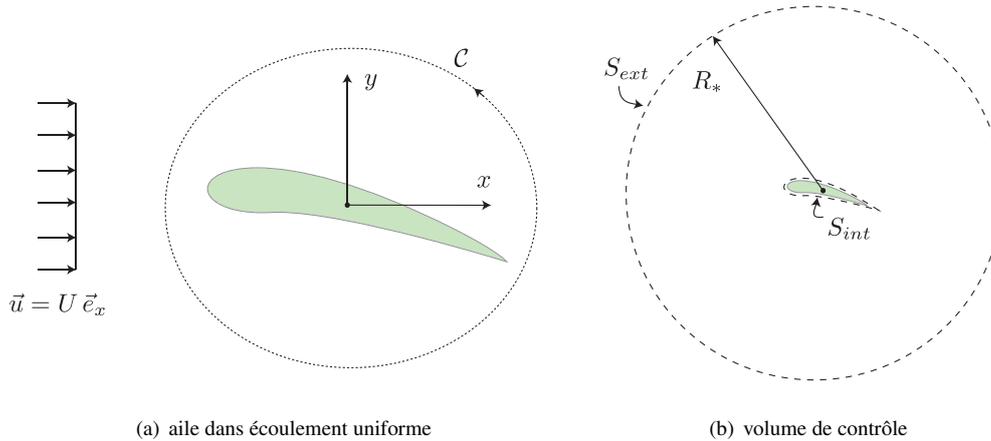


FIGURE 2.8 – La force de portance d’une aile dépend de la vitesse incidente et de la circulation autour de l’aile le long du contour  $C$ . On calcule cette force à l’aide de méthode qui passe par un bilan sur un volume de contrôle.

on trouvera

$$\Gamma_* = \oint_C \vec{\nabla} \phi_* \cdot d\vec{r} = \phi_*(2\pi) - \phi_*(0) = 2\pi A \quad (2.55)$$

quelle que soit cette courbe. Comme  $A$  est arbitraire, la circulation  $\Gamma_*$  est arbitraire. Ceci explique donc pourquoi on a la propriété mentionnée plus haut. La non-unicité du potentiel peut seulement être levée si on ajoute des conditions supplémentaires au problème.

## 2.6 Théorie des ailes

### 2.6.1 Introduction

La théorie des ailes a trouvé son essor au début de 19<sup>ième</sup> siècle, pas trop longtemps avant que les premiers avions, hélicoptères et autres objets volants soient mis en service pour des buts martiaux. C’est peut être la plus belle application de la théorie des écoulements parfaits et potentiels car elle réussit à expliquer et à calculer la force de portance qui s’exerce sur une famille vaste d’ailes, les ailes de Joukowski.

Dans cette section, on peut difficilement couvrir l’intégralité de cette théorie, car celle-ci nécessite d’introduire de nombreux outils mathématiques pas si communs, typiquement issus de l’analyse complexe. On approche l’aile par un profil invariant selon  $z$ . Le domaine fluide autour de l’aile étant multiplement connexe, le potentiel hydrodynamique est non-unique et pour le fixer, on donne un critère supplémentaire, le critère de Kutta-Joukowski. Ensuite, on montre que, par l’analyse complexe, on peut calculer la force de portance par des calculs pas si inabordables.

### 2.6.2 Théorème de Kutta-Joukowski

La figure 2.8-(a), montre une aile typique, simplifiée car supposée invariante le long de  $z$ . On place cette aile dans un écoulement incident uniforme  $U \vec{e}_x$ . La circulation de l’écoulement le long d’un contour  $C$  qui entoure l’aile est définie par

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (2.56)$$

est a priori inconnue, cf. section précédente. Remarquons ici que, par convention, on parcourt le contour  $C$  dans le sens positif (anti-horaire). Supposons un instant qu’on connait la circulation  $\Gamma$  et que celle-ci prend une valeur fixe dans des conditions de vol à l’équilibre. Le théorème de Kutta-Joukowski nous permet alors de calculer la force de portance avec une formule simple.

★ **Théorème de Kutta-Joukowski.** La force de portance qui s'exerce sur un profil d'aile invariant en  $z$ , placé dans un écoulement uniforme  $U \vec{e}_x$  de fluide de densité  $\rho$  est

$$\vec{F}_{portance} = -\rho U \Gamma L \vec{e}_y \quad (2.57)$$

Ici  $L$  est la longueur de l'aile dans la direction  $z$  et  $\Gamma$  la circulation autour de l'aile. ■

La démonstration de ce théorème se fait le plus souvent à l'aide de l'analyse complexe, mais elle peut également se faire à l'aide d'un système de coordonnées cylindriques. On imagine l'aile quelque part autour de l'origine du système de coordonnées. A l'extérieur de l'aile, on imagine un écoulement potentiel. La solution générale du problème de Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$  en coordonnées cylindrique donne

$$\phi(r, \theta) = Ur \cos \theta + \Gamma \frac{\theta}{2\pi} + \underbrace{C_0}_{=0} \ln r + \sum_{m=1}^{+\infty} r^{-m} (C_m \cos(m\theta) + D_m \sin(m\theta)) \quad (2.58)$$

Dans ce potentiel, le premier terme  $Ur \cos \theta = Ux$  assure que  $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \rightarrow U \vec{e}_x$  loin de l'aile, pour  $r \rightarrow +\infty$ . Le deuxième terme correspond au potentiel du vortex ponctuel et contient à lui tout seul, toute la circulation de l'écoulement autour de l'aile. On peut vérifier en effet que

$$\Gamma = \oint_C \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{\tau} = \phi(r_*, 2\pi) - \phi(r_*, 0) = \Gamma \quad (2.59)$$

exactement, quelle que soit la position initiale  $r_*$  sur la courbe  $\mathcal{C}$  fermée qui entoure l'aile. Le coefficient  $C_0 = 0$ , sinon il y aurait un flux de matière non-nul (vitesse radiale en  $r^{-1}$ ) qui sortirait de l'aile, ce qui n'est évidemment pas possible. Le coefficient  $D_0$  est sans grand intérêt car le potentiel est toujours déterminé à une constante près. Les coefficients  $C_m, D_m$  pour  $m = 1, 2, \dots$  peuvent finalement (mais difficilement) être fixés en imposant les conditions aux limites d'imperméabilité sur la surface de l'aile. Par contre, tout cela ne doit enfin pas être connu, pour calculer la force de portance, il suffit de savoir que

$$\phi(r, \theta) \approx Ur \cos \theta + \Gamma \frac{\theta}{2\pi} + \dots \quad (2.60)$$

seule la vitesse au loin  $U$  et la circulation  $\Gamma$  doivent être connues pour calculer la force de portance.

Comme on ne connaît pas si bien l'écoulement autour de l'aile et encore moins la pression de l'air à sa surface, on tente de calculer la force de pression sur l'obstacle, par la méthode qui passe par un bilan de quantité de mouvement. On considère le volume de contrôle fixe de la figure 2.8-(b), délimité par la surface de l'aile  $S_{int}$ , par la surface  $S_{ext}$  d'un cylindre de rayon  $R_*$  très grand et deux plans  $z = Cst$  verticaux. Un bilan de quantité de mouvement ou alternativement, l'intégration de l'équation d'Euler sur ce volume nous donne

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) + \iint_{\Sigma} p d\vec{S} = 0 \quad (2.61)$$

En utilisant l'imperméabilité de l'aile et son invariance selon  $z$ , on obtient une formule utile pour calculer la force sur l'aile

$$\underbrace{\iint_{S_{int}} p d\vec{S}}_{\vec{F}_{sur\ obs}} = - \underbrace{\iint_{S_{ext}} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{S})}_{\vec{F}_1} - \underbrace{\iint_{S_{ext}} p d\vec{S}}_{\vec{F}_2} \quad (2.62)$$

On distingue deux contributions différentes,  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , qui toutes les deux, ne nécessitent que des informations sur l'écoulement et la pression au loin (sur la surface  $S_{ext}$ ). Pour la vitesse on a

$$u_r|_{r=R_*} = U \cos \theta + O(R_*^{-2}) \quad , \quad u_\theta|_{r=R_*} = -U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R_*} + O(R_*^{-2}) \quad (2.63)$$

et une application de la loi de Bernoulli (v2) donne la pression

$$p|_{r=R_*} = C - \frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \Big|_{r=R_*} = C - \frac{\rho}{2} \left( U^2 - \frac{U\Gamma}{\pi R_*} \sin \theta \right) + O(R_*^{-2}) \quad (2.64)$$

sur cette surface extérieure. Avec  $d\vec{S} = R_* d\theta dz \vec{e}_r$  sur la surface extérieure, on obtient pour  $\vec{F}_1$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= -\rho L R_* \int_0^{2\pi} (u_r^2 \vec{e}_r + u_r u_\theta \vec{e}_\theta) d\theta \\
 &= -\rho L R_* \int_0^{2\pi} \left[ (U^2 \cos^2 \theta + O(R_*^{-2})) (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \right. \\
 &\quad \left. + \left( -U^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R_*} U \cos \theta + O(R_*^{-2}) \right) (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \right] d\theta \\
 &= -\frac{\rho U \Gamma L}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \right) \vec{e}_y + O(R_*^{-1}) \\
 &= -\frac{\rho U \Gamma L}{2} \vec{e}_y + O(R_*^{-1}) \tag{2.65}
 \end{aligned}$$

Ici on a utilisé la définition de  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  en fonction de  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . De très nombreuses intégrales disparaissent simplement à cause de la périodicité de l'intégrande sur  $[0, 2\pi]$ . Dans la deuxième contribution  $\vec{F}_2$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_2 &= -L R_* \int_0^{2\pi} \left[ C - \frac{\rho}{2} \left( U^2 - \frac{U \Gamma}{\pi R_*} \sin \theta \right) \right] \vec{e}_r d\theta \\
 &= -\frac{\rho U \Gamma L}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \right) \vec{e}_y + O(R_*^{-1}) \\
 &= -\frac{\rho U \Gamma L}{2} \vec{e}_y + O(R_*^{-1}) \tag{2.66}
 \end{aligned}$$

Les deux contributions à la force totale sont donc identiques à  $O(R_*^{-1})$  près. Le choix du volume de contrôle est arbitraire et on peut donc laisser tendre  $R_* \rightarrow +\infty$  afin de faire disparaître l'influence des termes ignorés dans l'équation. Ceci donne donc la force totale qui s'exerce sur l'obstacle

$$\vec{F}_{portance} = \lim_{R_* \rightarrow +\infty} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -\rho U \Gamma L \vec{e}_y \tag{2.67}$$

On appelle cette force, la force de portance.

### 2.6.3 Condition de Kutta-Joukowski

La circulation  $\Gamma$  autour d'une aile n'est pas libre en pratique et on la fixe par une condition supplémentaire : la condition de Kutta-Joukowski.

★ **Condition de Kutta-Joukowski.** Dans un régime de vol stationnaire, la valeur de la circulation s'équilibre à la valeur qui permet de localiser le point de stagnation au bord de fuite de l'aile, pour un profil à angle aigu. Si le bord de fuite est un profil à pointe, la vitesse tangentielle doit y être finie, mais il n'y a pas de point de stagnation. ■

Pour comprendre cette condition, on étudie la phase transitoire pendant laquelle l'écoulement autour de l'aile se met en place, ici illustrée en figure 2.9. Au début on constate, que l'écoulement contourne l'aile des deux côtés et peut donc remonter la face arrière de l'aile. Autrement dit, il se forme un petit tourbillon (initiateur) sur la face arrière de l'aile. Ce tourbillon s'intensifie et déplace le point de stagnation en aval (●) progressivement vers le bas de l'aile. Lorsque le point de stagnation atteint le bord de fuite de l'aile, le tourbillon de démarrage s'échappe derrière l'aile et une circulation non-nulle et négative persiste autour de l'aile. L'écoulement atteint son régime d'équilibre et le vol devient stationnaire.

La circulation est donc fixée à la valeur pour laquelle le point de stagnation a réussi à descendre jusqu'au bord de fuite de l'aile. Attention, ceci ne signifie pas qu'il y a forcément un point de stagnation. Comme le montre la figure 2.10, on peut imaginer deux cas. Si le bord de fuite de l'aile est un profil à pointe, 2.10-(a) alors la tangente au profil en ce bord sera la même des deux cotés du bord de fuite. On peut donc imaginer que la vitesse tangentielle y soit continue et non-nulle. Dans un deuxième cas, cf. figure 2.10-(b), l'aile a une pointe aiguë au bord de fuite. Dans ce cas, les tangentes des deux côtés du profil ne se rejoignent pas et la pointe devra bien être un point de stagnation (●).

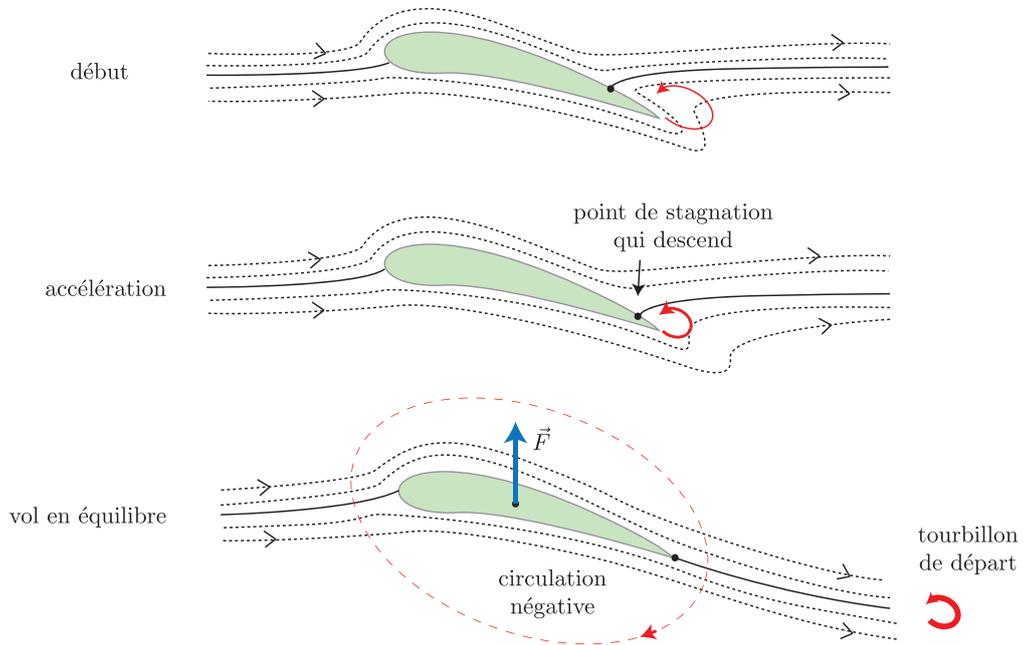


FIGURE 2.9 – Mise en place de la circulation autour de l’aile lors du démarrage.

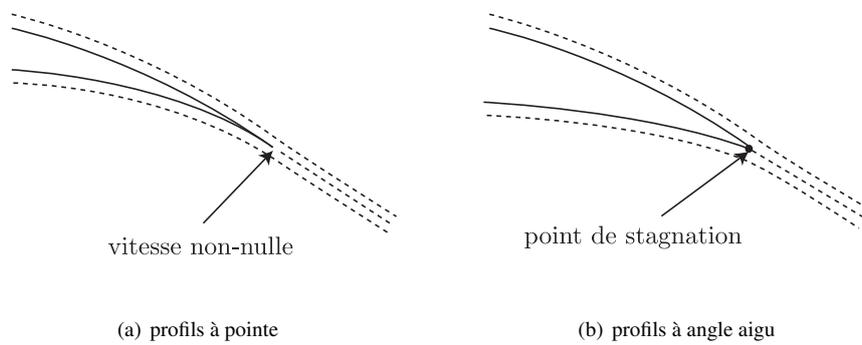


FIGURE 2.10 – Profils d’aile à pointe ou à angle aigu.

### 2.6.4 Portance d'une aile de Joukowski

On a donc une condition supplémentaire qui fixe la circulation  $\Gamma$ , mais celle-ci reste difficile à exprimer sans avoir spécifié un profil d'aile. Ici on se confronte à une réelle difficulté car une forme d'aile n'est généralement pas suffisamment simple pour qu'on puisse s'en sortir avec un système de coordonnées classique (cylindriques, ...). Il faut d'autres outils mathématiques et c'est ici que l'analyse complexe intervient. Quelques indications sur les étapes à suivre.

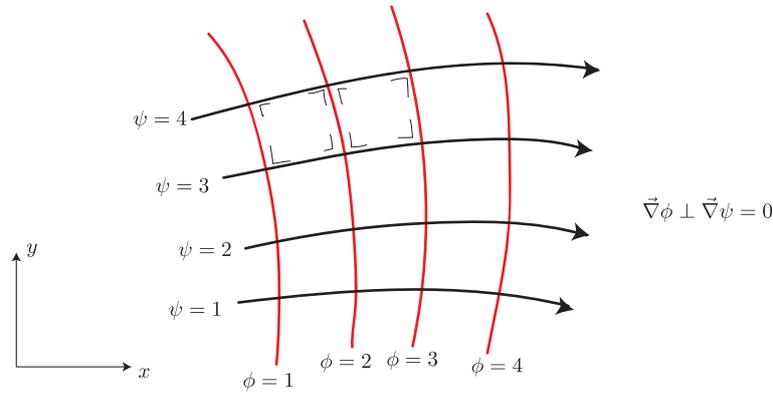


FIGURE 2.11 – Iso-lignes de potentiel hydrodynamique  $\phi$  et de fonction de courant  $\psi$  sont toujours perpendiculaires.

#### 1. Potentiel et fonction de courant

En 2D, on peut représenter un écoulement irrotationnel et incompressible à l'aide d'un potentiel  $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$  ou à l'aide d'une fonction de courant,  $\vec{u} = \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_z)$  (cf. chapitre 1). Plus concrètement en coordonnées Cartésiennes, cela signifie

$$\vec{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y \quad (2.68a)$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_y \quad (2.68b)$$

En exprimant le caractère incompressible et irrotationnel on trouve que le potentiel  $\phi$  et la fonction de courant  $\psi$  sont tous les deux des fonctions harmoniques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.69a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_z) = -\nabla^2 \psi \vec{e}_z = \vec{0} \quad (2.69b)$$

soit  $\nabla^2 \phi = 0$  et  $\nabla^2 \psi = 0$ . La figure 2.11 illustre d'ailleurs une propriété géométrique. Par définition, cf. chapitre 1, une fonction de courant est telle que  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0$  ainsi cela signifie que

$$\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \phi \perp \vec{\nabla} \psi \quad (2.70)$$

Ceci indique que les iso-lignes  $\psi$  c'est à dire les lignes de courant, sont perpendiculaires aux iso-lignes de  $\phi$ .

#### 2. Potentiel complexe et holomorphe

Le fait que  $\phi$  et  $\psi$  soient des fonctions harmoniques permet de dire que le potentiel hydrodynamique complexe

$$f = \phi + i \psi \quad (2.71)$$

est une fonction holomorphe de la variable  $z = x + i y$  complexe. Pour rappel, on appelle une fonction complexe holomorphe ou analytique, si la dérivée

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_*} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_* + \Delta z) - f(z_*)}{\Delta z} \quad (2.72)$$

existe dans un voisinage d'un point  $z_*$  et quelle que soit la direction dans laquelle on varie  $\Delta z$ . En prenant donc  $\Delta z = \Delta x$  une première fois et  $\Delta z = i\Delta y$  une deuxième fois et  $f = \phi + i\psi$ , on a

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_*} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_* + \Delta x + iy_*) - f(x_* + iy_*)}{\Delta x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.73a)$$

et si  $f$  est holomorphe, ceci doit être égal à

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_*} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_* + i(y_* + \Delta y)) - f(x_* + iy_*)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.73b)$$

Ceci permet d'identifier que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.74)$$

sans nécessaire pour que la fonction  $f = \phi + i\psi$  soit holomorphe. On peut découpler cette paire d'équations soit en  $\phi$ , soit en  $\psi$ . Par exemple, en prenant la dérivée selon  $x$  de la première équation et utilisant la deuxième relation, on a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.75)$$

On retrouve donc  $\nabla^2 \phi = 0$ , que  $\phi$  est une fonction harmonique. En découplant dans la variable  $\psi$ , on trouve de manière similaire que  $\nabla^2 \psi = 0$ . Ainsi, on vient de montrer que le caractère holomorphe d'une fonction  $f = \phi + i\psi$  est équivalent à dire que  $\nabla^2 \phi = 0$  et  $\nabla^2 \psi = 0$ . Dans notre contexte d'écoulement potentiel, on cherche justement ce potentiel ou cette fonction de courant. On peut donc alternativement chercher le bon potentiel complexe holomorphe.

En pratique, on connaît de très nombreuses fonctions holomorphes. Des exemples de fonctions élémentaires holomorphes sont

$$f = z, \quad f = z^2, \quad f = z^3, \quad f = z^{-1}, \quad f = \ln z, \quad f = z^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad (2.76)$$

Toutes les fonctions élémentaires qu'on construit comme des séries entières aussi

$$f = e^z \quad f = \cos z \quad , \dots \quad (2.77)$$

Toutes ces fonctions holomorphes se dérivent donc de manière simple, comme si  $z$  serait une variable réelle. Exemple

$$f = \ln z \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dz} = \frac{1}{z} \quad , \quad f = \sin z \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dz} = \cos z \quad (2.78)$$

Pour toutes ces fonctions, on a la garantie que  $\phi = \text{Re}(f)$  et  $\psi = \text{Im}(f)$  sont des fonctions harmoniques. Par exemple, pour la fonction  $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$  on retrouve bien que  $\nabla^2(x^3 - 3xy^2) = \nabla^2(3x^2y - y^3) = 0$ . Pour la fonction  $\sin(kz) = \sin(k(x + iy)) = \sin(kx) \cos(iky) + \cos(kx) \sin(iky) = \sin(kx) \cosh(ky) + i \cos(kx) \sinh(ky)$ . Les parties réelles et imaginaires,  $\sin(kx) \cosh(ky)$  et  $\cos(kx) \sinh(ky)$ , sont effectivement des solutions du problème de Laplace. Trouver des solutions du problème de Laplace n'a jamais été aussi simple, on peut le dire ! Par la suite, il sera important de retenir que

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - i u_y \quad , \quad \left| \frac{df}{dz} \right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad (2.79)$$

On peut donc accéder facilement aux composantes de la vitesse en dérivant le potentiel complexe. La vitesse se calcule comme la norme de la dérivée du potentiel complexe.

### 3. Transformations conformes

Une transformation conforme est un changement de variable complexe  $z(z')$  qui préserve le caractère holomorphe des fonctions. C'est-à-dire si  $f(z)$  est holomorphe alors  $f(z(z'))$  sera holomorphe aussi par rapport à la nouvelle variable  $z' = x' + iy'$ . Une condition suffisante pour que une fonction soit holomorphe est que la transformation

$$z(z') = \text{une fonction holomorphe de } z' \quad (2.80)$$

La démonstration n'est pas difficile, mais elle est longue (cf. transparents du cours).

L'intérêt d'une transformation conforme pour les physiciens est grande. On peut transformer un potentiel complexe, solution d'un certain problème 2D simple, en une solution pour un autre problème 2D plus difficile. Ici, c'est exactement par cette stratégie, qu'on va identifier le potentiel qui est celui de l'écoulement autour d'une aile. On partira du potentiel pour l'écoulement autour du cylindre et en faisant une transformation conforme *bien choisie*, on obtiendra le potentiel pour l'écoulement autour d'une aile. Schématiquement :

$$f(z) \text{ cylindre} \xrightarrow{\text{TF conforme } z(z'')} f(z''(z)) \text{ profil d'aile?} \quad (2.81)$$

Ceci est possible avec une classe particulière de transformations conformes qui replace les points à l'extérieur d'un cylindre aux points à l'extérieur d'un profil d'aile : les transformations conformes de Joukowski.

### 4. Transformations conforme de Joukowski

Afin de simplifier l'analyse, il devient intéressant d'adimensionner les variables. Le cylindre de rayon  $R$  est notre référence et il est donc naturel de choisir  $R$  comme échelle spatiale. On note

$$(X, Y) = (x/R, y/R) \quad , \quad Z = z/R = (x + iy)/R \quad (2.82)$$

pour les variables d'espace adimensionnées. Similaire pour  $(X', Y') = (x'/R, y'/R)$  et  $Z' = z'/R$  et  $(X'', Y'') = (x''/R, y''/R)$  et  $Z'' = z''/R$ .

★ **Transformation conforme de Joukowski.** La transformation conforme de Joukowski  $Z \mapsto Z''$  ou en deux étapes  $Z \mapsto Z' \mapsto Z''$  est définie par

$$Z'' = Z' + \frac{1}{Z'} \quad , \quad Z' = s + |1 - s|Z \quad (2.83)$$

Il s'agit d'une transformation conforme qui déforme le domaine de l'extérieur du cercle unité (dans la variable  $Z$ ) dans le domaine (pour la variable  $Z''$ ) à l'extérieur d'un profil de type aile. En variant le paramètre  $s \in \mathbb{C}$  avec  $|s| \ll 1$  et  $\text{Re}(s) < 0$ , on obtient différentes formes d'ailes, toujours avec un profil à pointe. ■

Quelques exemples d'ailes de Joukowski sont montrés sur la figure 2.12. Avec  $s = 0$  on retrouve une plaque horizontale,  $s < 0$  réel donne un profil symétrique,  $s$  imaginaire donne un profil en arc fléchi vers le haut ou le bas selon le signe de  $\text{Im}(s)$ . La condition  $\text{Re}(s) < 0$  est absolument nécessaire pour que tous les points à l'extérieur du cercle unité (variable  $Z$ ) se retrouvent à l'extérieur de l'aile (variable  $Z''$ ). Pour tout  $|s| \ll 1$ , le bord de fuite de l'aile se trouve en

$$Z''_* = 2 \quad , \quad Z'_* = 1 \quad , \quad Z_* = \frac{1 - s}{|1 - s|} = e^{i\beta} \quad (2.84)$$

C'est en ce point qu'il faudra imposer la condition de Kutta-Joukowski, que la vitesse doit être finie. Il est également intéressant de remarquer que la distance  $D$  entre face devant et le bord de fuite de l'aile est toujours proche de 4 ici. Par des séries limités sur la transformation conforme, on montre plus précisément que cette largeur adimensionnée  $D/R$  de l'aile est

$$|s| \ll 1 : \frac{D}{R} = 4 + O(|s|^2) \quad (2.85)$$

On utilisera cette formule à la fin.

Une information importante est l'allure de la transformation conforme pour  $Z$ ,  $Z'$  ou  $Z''$  grand. Loin de cylindre ou loin de l'aile, pour  $|Z|$  ou  $|Z''|$  grand, on peut simplifier la transformation (2.83) en

$$|Z| \gg 1 : Z' \approx |1 - s|Z \quad , \quad Z'' \approx Z' \Rightarrow Z'' \approx |1 - s|Z \quad (2.86)$$

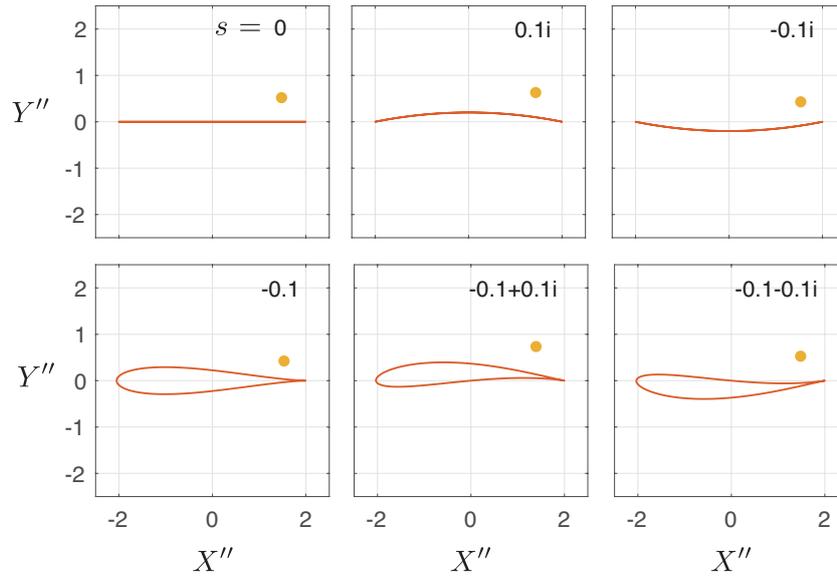


FIGURE 2.12 – Ailes de Joukowsky. Les courbes rouges montrent les courbes  $Z''(Z)$  obtenues par la transformation de Joukowsky du cercle unité  $Z = e^{i\theta}$  et pour  $s$  variable. Le point donne  $Z''$  pour  $z = 1 + i$  et illustre que l'extérieur du cercle unité correspond bien à l'extérieur de l'aile. Remarque que la largeur adimensionnée de toutes ces ailes est proche de 4.

### 5. Potentiel complexe du vent uniforme, loin de l'aile et loin du cylindre

Les profils d'ailes de Joukowsky produite par la transformation conforme sont toujours plus au moins horizontaux. On aimerait étudier la portance de ces ailes dans des vents uniformes incidents de direction variable. Dans la théorie, le plus simple est de maintenir l'aile plate et de faire tourner la direction du vent incident. Le vent incident loin de l'aile est par définition

$$\vec{u}''_{\infty} = U(\cos \alpha \vec{e}''_x + \sin \alpha \vec{e}''_y) \quad (2.87)$$

On met ici deux primes, car nous sommes dans le système de coordonnées de l'aile. Le potentiel hydrodynamique associé est défini par  $\vec{u}''_{\infty} = \vec{\nabla}'' \phi''_{\infty}$ . En ignorant la constante d'intégration, on trouve

$$\phi''_{\infty} = U(x'' \cos \alpha + y'' \sin \alpha) \quad (2.88)$$

Pour la fonction de courant  $\vec{u}''_{\infty} = \vec{\nabla}'' \times \psi''_{\infty} \vec{e}''_z$  on a .

$$\psi''_{\infty} = U(y'' \cos \alpha - x'' \sin \alpha) \quad (2.89)$$

Le potentiel complexe, loin de l'aile est donc

$$f''_{\infty} = \phi''_{\infty} + i\psi''_{\infty} = U(x'' + iy'')(\cos \alpha - i \sin \alpha) = Uz''e^{-i\alpha} = URZ''e^{-i\alpha} \quad (2.90)$$

On veut savoir quelle est l'allure de ce potentiel au loin, sous l'effet de la transformation conforme inverse. Autrement dit, que vaut le potentiel  $f_{\infty}$  de l'écoulement incident du cas de référence du cylindre ? Pour trouve ce potentiel  $f_{\infty}$  loin du cylindre de référence, on remplace tout simplement  $Z'' = |1 - s|Z$  comme (2.86) l'indique, dans la formule précédente :

$$f_{\infty} = UR|1 - s|Z e^{-i\alpha} = U|1 - s|z e^{-i\alpha} \quad (2.91)$$

Avec  $z = re^{i\theta}$  cela donne le potentiel hydrodynamique et la fonction de courant

$$\phi_{\infty} = \text{Re}(f_{\infty}) = U|1 - s|r \cos(\theta - \alpha) \quad (2.92a)$$

$$\psi_{\infty} = \text{Im}(f_{\infty}) = U|1 - s|r \sin(\theta - \alpha) \quad (2.92b)$$

Et l'écoulement loin du cylindre est donc

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_\infty = \vec{\nabla}\phi_\infty &= U|1-s|(\cos(\theta-\alpha)\vec{e}_r - \sin(\theta-\alpha)\vec{e}_\theta) \\
 &= U|1-s|(\cos(\theta-\alpha)(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) - \sin(\theta-\alpha)(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)) \\
 &= U|1-s|(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

Ici, on vient d'identifier un petit point d'attention. Si on veut modéliser une aile dans un vent uniforme d'intensité  $U$  arrivant par un angle  $\alpha$ , alors le vent incident du cas de référence, le cylindre centré de rayon  $R$ , arrivera lui aussi par un angle  $\alpha$ , mais il devra être d'une intensité  $U|1-s|$  légèrement différente.

### 6. Potentiel complexe $f$ du cas de référence du cylindre

Ayant compris la forme du potentiel loin du cylindre, on peut maintenant chercher le potentiel complexe  $f$  de ce cas de référence. Utilisant les méthodes du TD3, on montre que le potentiel hydrodynamique  $\phi$  de l'écoulement autour du cylindre doit être

$$\phi = U|1-s|\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos(\theta-\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{2.94}$$

Ici on a juste tournée la solution d'un angle  $\alpha$ . On admet une circulation  $\Gamma$  non-nulle que pour l'instant on ne connaît pas. Il est facile de vérifier que  $\nabla^2\phi = 0$  et sur la surface  $r = R$  du cylindre, nous avons l'imperméabilité.

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0 \tag{2.95}$$

Loin du cylindre, pour grand  $r$ , nous trouvons le bon comportement, c.a.d.  $\phi \rightarrow \phi_\infty$ . Pour calculer la fonction de courant, on peut utiliser les relations

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.96}$$

qui sortent directement de l'égalité de  $\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}\psi \times \vec{e}_z$ . On trouve alors

$$\psi = U|1-s|\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin(\theta-\alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{R} \tag{2.97}$$

Dans le terme logarithmique, on faut apparaître le rapport  $r/R$  afin que l'expression sous le logarithme soit sans dimension. De toute manière,  $\psi$  est déterminée à une constante près et ici on fixe cette constante convenablement. Ce potentiel  $\phi$  et cette fonction de courant  $\psi$  donnent maintenant le potentiel complexe

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \phi + i\psi \\
 &= U|1-s|\left(r(\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)) + \frac{R^2}{r}(\cos(\theta-\alpha) - i\sin(\theta-\alpha))\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\left(i\theta + \ln\frac{r}{R}\right) \\
 &= U|1-s|\left(re^{i(\theta-\alpha)} + \frac{R^2}{re^{i(\theta-\alpha)}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{re^{i\theta}}{R} \\
 &= U|1-s|\left(ze^{-i\alpha} + \frac{R^2}{ze^{-i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{R}
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

soit en fonction de  $Z = z/R$  adimensionné,

$$f(Z) = UR|1-s|\left(Ze^{-i\alpha} + \frac{1}{Ze^{-i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln Z \tag{2.99}$$

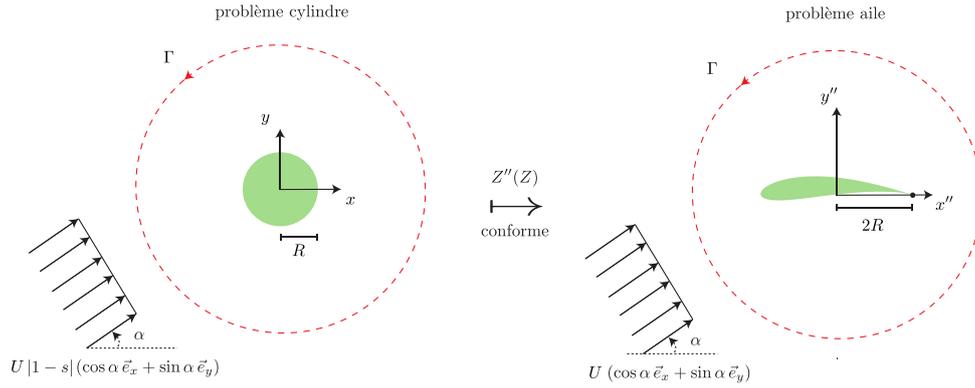


FIGURE 2.13 – But de la transformation conforme. On résout d’abord le problème ”facile” de l’écoulement potentiel autour du cylindre, puis on utilise une transformation conforme pour trouver la solution qui convient autour de l’aile. Ici on a pris une aile de Joukowsky avec  $s = -0.1 + 0.1 i$ .

### 7. Potentiel, écoulement et pression autour de l’aile

En utilisant la transformation conforme de Joukowsky inverse, on peut maintenant trouver la forme du potentiel autour du profil d’aile. Ceci peut se faire avec la transformation inverse  $Z(Z'(Z''))$  où

$$Z(Z') = \frac{Z' - s}{|1 - s|} \quad \text{suivi de} \quad Z'(Z'') = \frac{1}{2} \left( Z'' + \sqrt{Z''^2 - 4} \right) \quad (2.100)$$

Pour trouver la deuxième formule  $Z'(Z'')$  on a calculé la solution en  $Z'$  de  $Z'^2 - Z''Z' + 1 = 0$  qui sort directement de la transformation  $Z'' = Z' + 1/Z'$  donnée plus haut. Seule la racine avec  $+\sqrt{\dots}$  est significative et donnera l’extérieur du cylindre ou l’aile. Au final, on a

$$Z(Z'(Z'')) = \frac{\frac{1}{2} \left( Z'' + \sqrt{Z''^2 - 4} \right) - s}{|1 - s|} \quad (2.101)$$

Le potentiel autour de l’aile est ensuite obtenu en remplaçant dans (2.99),  $Z$  par ce  $Z(Z'(Z''))$  ce qui donne de manière explicite

$$\begin{aligned} f''(Z'') &= f(Z(Z'(Z''))) \\ &= UR \left( \left( \frac{1}{2} \left( Z'' + \sqrt{Z''^2 - 4} \right) - s \right) e^{-i\alpha} + \frac{|1 - s|^2}{\left( \frac{1}{2} \left( Z'' + \sqrt{Z''^2 - 4} \right) - s \right) e^{-i\alpha}} \right) \\ &\quad - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left( \frac{\frac{1}{2} \left( Z'' + \sqrt{Z''^2 - 4} \right) - s}{|1 - s|} \right) \end{aligned} \quad (2.102)$$

La formule est effectivement assez complexe et pas super nécessaire pour calculer la force de portance. Par contre, c’est bien avec ce potentiel, qu’on peut ensuite calculer la vitesse en tout point autour de l’aile utilisant la formule

$$u_x'' - iu_y'' = \frac{df''}{dz''} = \frac{1}{R} \frac{df''}{dZ''} = \frac{1}{R} \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dZ'} \frac{dZ'}{dZ''} = \dots \quad (2.103)$$

La valeur absolue  $|df''/dz''|$  donne ensuite la norme de la vitesse  $\|\vec{u}''\|$  et grâce à la loi de Bernoulli,  $p'' + \rho \|\vec{u}''\|^2/2 = C$  on peut enfin calculer la pression partout autour de l’aile, à une constante près. Ainsi, grâce à la transformation conforme, on a *presque* toute l’information sur l’écoulement autour de l’aile. La seule chose qui nous manque encore est la valeur de la circulation  $\Gamma$ , toujours inconnue pour l’instant.

### 8. Fixer la circulation $\Gamma$ avec la condition de Kutta-Joukowski

La condition de Kutta-Joukowski fixe  $\Gamma$  et pour notre aile à pointe aiguë, on doit donc imposer que la vitesse au bord de fuite reste finie. On rappelle que ce bord de fuite est situé à l'endroit  $z'' = RZ''_*$  avec

$$Z''_* = 2 \quad , \quad Z'_* = 1 \quad , \quad Z_* = \frac{1-s}{|1-s|} = e^{i\beta} \quad (2.104)$$

A cet endroit on doit donc exiger que

$$\left. \frac{df''}{dz''} \right|_{z''=z''_*} = R^{-1} \left. \frac{df''}{dZ''} \right|_{Z''=Z''_*} = \text{finie} \quad (2.105)$$

Comme  $f''(Z'') = f(Z'(Z''))$  par définition, on peut ré-exprimer cette condition comme

$$\left. \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dZ'} \frac{dZ'}{dZ''} \right|_{Z''=Z''_*} = \text{finie} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left. \frac{df}{dZ} \right|_{Z=Z_*}}{\left. \frac{dZ'}{dZ} \right|_{Z=Z_*} \left. \frac{dZ''}{dZ'} \right|_{Z'=Z'_*}} = \text{finie} \quad (2.106)$$

Vis à vis de la variable  $Z'$ , le bord de fuite est à l'endroit  $Z'_* = 1$ . Comme  $Z'' = Z' + (1/Z')$  on y trouve

$$\left. \frac{dZ''}{dZ'} \right|_{Z'=Z'_*} = 1 - \frac{1}{Z'^2} = 0 \quad (2.107)$$

et cela signifie qu'on divise donc par zéro dans l'équation (2.106). Afin de satisfaire la condition (2.106), il est donc absolument nécessaire que la division par zéro soit compensée par une multiplication par zéro au numérateur, c'est-à-dire par l'exigence que

$$\left. \frac{df}{dZ} \right|_{Z=Z_*} = 0 \quad (2.108)$$

Il est maintenant intéressant de constater que cette relation peut directement être imposée sur le potentiel de référence (2.99) du cylindre, *Pas besoin de l'expression compliquée de (2.102) pour calculer  $\Gamma$* . La condition (2.108) devient alors

$$|1-s|UR \left( e^{-i\alpha} - \frac{1}{Z_*^2 e^{-i\alpha}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi Z_*} = 0 \quad (2.109)$$

Remplaçant enfin  $Z_* = e^{i\beta}$ , où  $\beta = \arg(1-s)$  on obtient comme résultat

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{i} |1-s|UR \left( e^{i(\beta-\alpha)} - e^{-i(\beta-\alpha)} \right) \\ &= 4\pi |1-s|UR \sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.110)$$

### 9. Force de portance

On connaît maintenant tout l'écoulement. Loin de l'aile, pour  $|Z''| \gg 1$ , le potentiel complexe est de la forme

$$f'' \approx URZ'' e^{-i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z'' + O(1) \quad (2.111)$$

Avec  $z'' = r'' e^{i\theta''}$ , la partie réelle donne

$$r'' \gg 1 : \phi'' = UR r'' \cos(\theta'' - \alpha) + \Gamma \frac{\theta''}{2\pi} + \dots \quad (2.112)$$

Ce potentiel est bien similaire à (2.60) supposée lors de la dérivation du théorème de Kutta-Joukowski, on a juste un angle tournée de  $\alpha$  car le vent incident vient d'une autre direction. On peut donc utiliser ce théorème, qui nous donne

$$\vec{F}_{portance} = -\rho U L \Gamma \vec{e}_n \quad \text{avec} \quad \vec{e}_n = -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y \quad (2.113)$$

La force de portance est normale au vent incident. Si on remplace, dans cette formule la valeur de la circulation  $\Gamma$  trouvée, alors on a

$$\vec{F}_{portance} = \pi \sin(\alpha - \beta) \rho U^2 |1 - s| 4RL \vec{e}_n \quad (2.114)$$

Cette formule dépend encore de  $R$ , rayon du cylindre de référence, ce qui n'est pas idéale pour une aile donnée. Plus haut en équation (2.85), nous avons trouvé que la largeur de l'aile vaut  $D = (4 + O(|s|^2))R$  dans la limite de  $|s| \ll 1$ . Ainsi, on peut récrire une formule plus pratique avec  $S = DL$  la surface portante de l'aile.

★ **Portance d'une aile de Joukowsky.** Une aile de Joukowsky définie par la transformation conforme (2.83) a une portance

$$\vec{F}_{portance} \approx \underbrace{2\pi|1 - s| \sin(\alpha - \beta)}_{C_L} \frac{\rho U^2 S}{2} \vec{e}_n \quad (2.115)$$

On appelle  $C_L$  le coefficient de portance de l'aile (lift coefficient). Le nombre complexe  $s$  est le seul qui caractérise l'aile et est telle que  $Re(s) < 0$  et  $|s| \ll 1$  pour une aile mince. L'angle  $\beta = \arg(1 - s)$ , s'appelle angle de zéro-portance car pour  $\alpha = \beta$  la force de portance s'annule. ■

Si on veut qu'une aile porte, l'angle d'attaque  $\alpha$  doit au minimum être supérieur à  $\beta$ . Dans une moindre mesure, la forme de l'aile impacte aussi l'intensité de la force de portance à travers le facteur  $|1 - s|$ , toujours légèrement supérieur à 1 dans la limite  $|s| \ll 1$ .

## 10. Comparaison aux expériences

La théorie des ailes a été confirmée par de nombreuses expériences. Pendant la préparation de ce cours, nous avons confronté nous-même la formule de portance à quelques mesures expérimentales. Le rapport technique de F. Bertagnolio du DTU (Danemark) est un des plus récents à avoir mesuré le coefficient de portance  $C_L$  en fonction de l'angle  $\alpha$ , pour une aile NACA 0015. Une reproduction du profil transverse de cette aile est montrée en figure 2.14-(a). Si on adimensionne l'espace par rapport à la largeur  $D \approx 4R$  de l'aile, on constate que pour le choix  $s = -0.13$ , l'aile de Joukowsky ressemble à cette aile NACA. L'aile NACA est par contre bien plus épaisse sur l'arrière de l'aile, donc il ne faut pas s'attendre à que la théorie soit parfaite ici. Comme  $\beta = 0$  pour  $s$  réel, pour une aile symétrique, le coefficient de portance prédit par la théorie des ailes est  $C_L \approx 2\pi|1 - s| \sin \alpha$ . Comme le montre la figure 2.14-(b), cela correspond à peu près à ce qui a été mesuré expérimentalement à petit angle  $\alpha$  d'attaque. La théorie fonctionne pas trop mal sur ce profil.

## 11. DM sur la théorie des ailes

Suite à une demande explicite des étudiants de la promotion 2021-2022, nous organisons maintenant un DM sur la théorie des ailes. Ce DM se fera sur une base volontaire de votre part et sous Python. A l'examen, on posera une petite question en lien avec ce DM. On fournit un notebook Jupyter à compléter et dans ce notebook, nous mettons en application la méthode des transformations conformes. Un des objectifs sera de calculer le couple qui s'exerce sur l'aile.

### 2.6.5 Conclusion

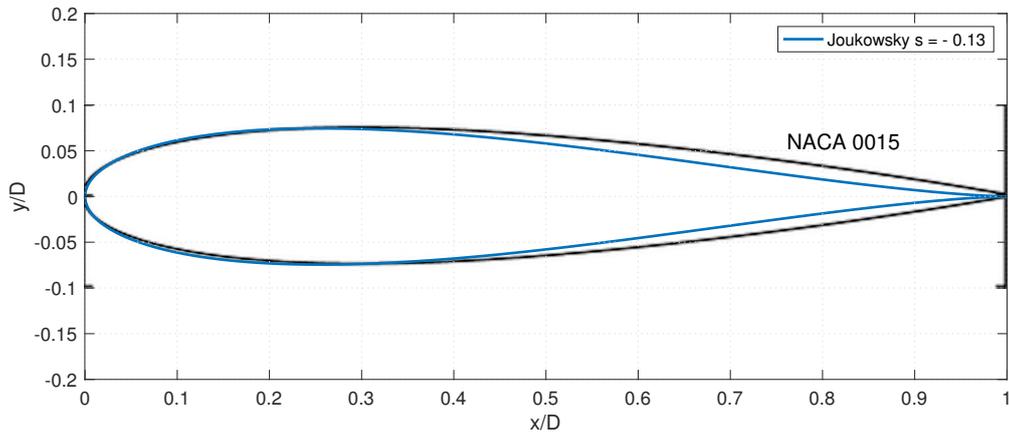
La théorie des ailes est certainement une très belle application de la théorie des écoulements parfaits et incompressibles et de l'analyse complexe, mais elle a évidemment des limites.

1. *Pas toutes les ailes sont des ailes de type Joukowsky, aucune aile est 2D*  
Pas toutes les formes d'ailes imaginables sont atteignables par transformation conforme du cylindre. Comme l'a montré le cas test, on peut espérer que la théorie des ailes donne une bonne approximation.
2. *Écoulement pas si potentiel*  
Plus grave est que les écoulements autour des ailes ne sont pas toujours si irrotationnels que ça. Suite à la viscosité, il se forme une couche limite sur l'aile qui peut décoller et initier une transition à la turbulence. Ceci diminue drastiquement la portance et est une cause notoire d'accidents aériens (phénomène de décrochage ou "stall" en anglais). Les figures 2.15 et 2.16, montre quelques clichés de

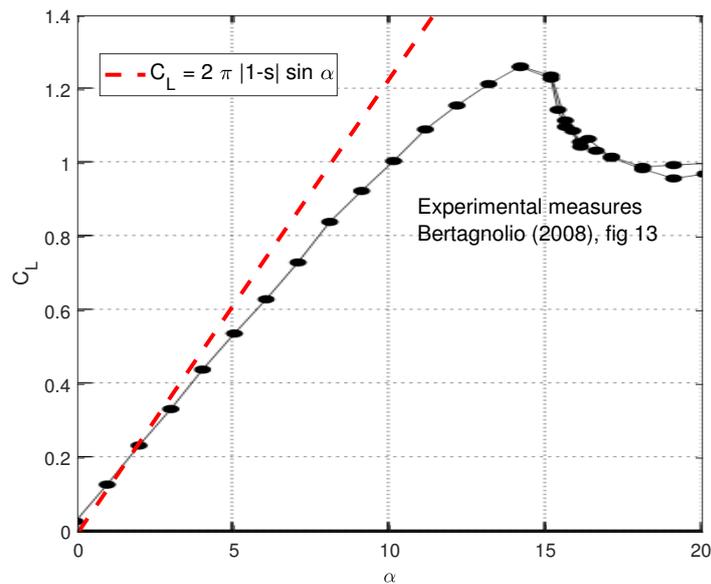
ce phénomène, issus du célèbre "album of fluid motion" de M. Van Dyke.

### 3. *Ecoulement pas si incompressible*

Lorsque la vitesse du fluide se rapproche de la vitesse du son, nombre de Mach proche de 1, on ne peut plus ignorer la compressibilité de l'air. La portance d'une aile dans le régime supersonique nécessite une description physique différente.

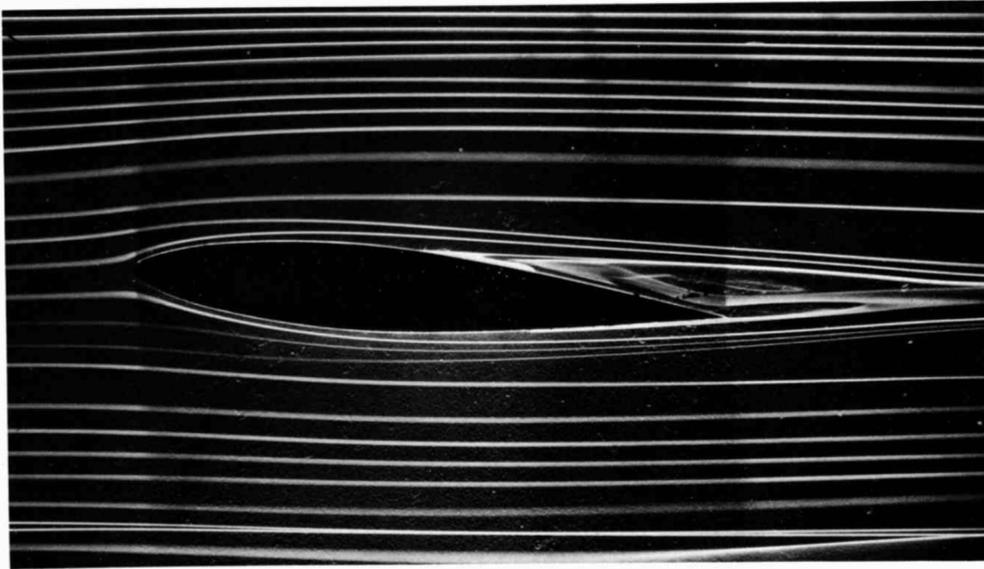


(a)



(b)

FIGURE 2.14 – Comparaison de la théorie des ailes aux expériences (cf. rapport technique de F. Bertagnolio, 2008, fig. 13). (a) L'aile NACA 0015 ressemble plus au moins à l'aile de Joukowski avec  $s = -0.13$ . (b) Le coefficient de portance  $C_L$  de l'aile NACA 0015 mesuré dans les expériences se compare bien avec la formule  $C_L = 2\pi|1 - s| \sin \alpha$  pour  $\alpha$  petit.



34. **Boundary-layer separation on an inclined airfoil.** When the NACA 64A015 airfoil of figure 23 is raised to  $5^\circ$  incidence the laminar boundary layer separates from the rear half of the upper surface. The flow remains attached

to the lower surface, from which it leaves tangentially at the trailing edge. Streamlines are shown by colored fluid filaments in water. ONERA photograph, Werlé 1974

FIGURE 2.15 – La théorie classique des ailes a des limitations. Dans un fluide visqueux, on a des couches limites sur la surface de l'aile qui peuvent décoller et donner lieu à une bulle de recirculation ou la turbulence. Ceci qui diminue fortement la portance et augmente la traînée. Ici on voit une bulle de recirculation derrière une aile (issue de "Album of fluid motion" de M. Van Dyke, expérience réalisée à l'ONERA ).

37. **Global separation over an inclined plate.** As the angle of attack is increased, the local laminar leading-edge separation shown above spreads rapidly rearward. Here at a Reynolds number of 10,000 and  $20^\circ$  incidence the flow has separated from the entire upper surface. ONERA photograph, Werlé 1974

26

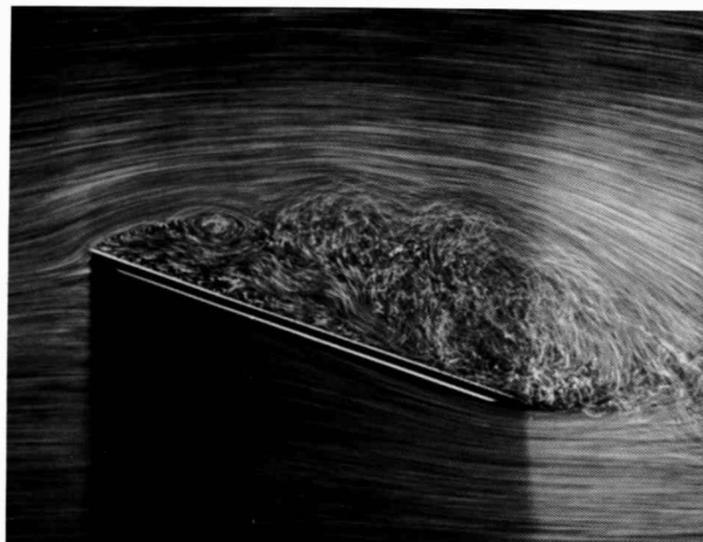
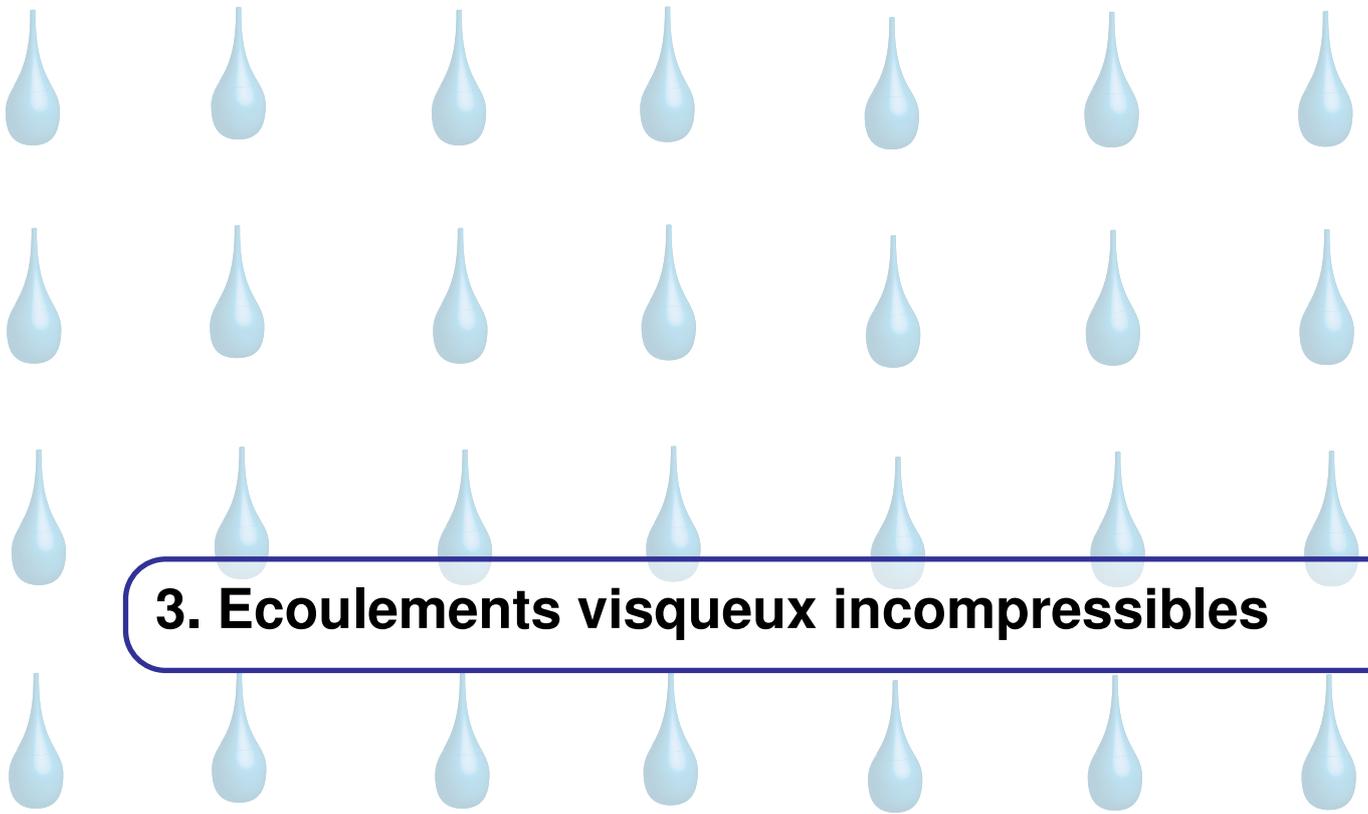


FIGURE 2.16 – Ecoulement turbulent derrière une plaque à grand angle d'attaque (issue de "Album of fluid motion" de M. Van Dyke, expérience réalisée à l'ONERA).



## 3. Ecoulements visqueux incompressibles

*Le modèle de Navier-Stokes incompressible est un modèle très utilisé en mécanique des fluides. On relâche les hypothèses du milieu parfait, en admettant que le fluide est visqueux et qu'il peut transmettre la chaleur par conduction. On étudiera quelques écoulements laminaires, solution de ces équations.*

### 3.1 Le fluide visqueux incompressible

#### 3.1.1 Les imperfections de l'écoulement parfait

Le modèle de l'écoulement parfait permet de comprendre certains écoulements, mais a de sérieuses lacunes. Listons quelques imperfections. Sur la figure 3.1, on imagine comment un liquide parfait ou visqueux initialement immobile réagissent si on le met sur une table tournante. Dans un fluide visqueux, le fluide se met en rotation et cette rotation va progressivement envahir tout le fluide, jusqu'à ce qu'une rotation solide se réalise à temps long. Sans viscosité, il serait impossible de faire tourner ce fluide, car avec seule la pression comme contrainte, il est *impossible de transmettre des forces tangentielles entre lamelles de fluide* qui tournent à vitesses différentes.

L'exemple précédent montre que sans viscosité, on peut réaliser et maintenir des discontinuités de vitesse à la paroi, mais cela est également le cas à l'intérieur du fluide. L'écoulement illustré en figure 3.2-(a) est en effet admis par l'équation d'Euler. Dans un fluide réel, il ne maintiendra pas au cours du temps et la discontinuité de vitesse initiale s'étalera progressivement dans le temps suite à un processus de diffusion de la quantité de mouvement comme le suggère la figure 3.2-(b).

Finalement, sans viscosité, un écoulement initialement lancé persiste inlassablement dans le temps, comme illustré en figure 3.3. Cette idée contredit notre intuition et cela indique qu'il manque un phénomène dissipatif dans le modèle du fluide parfait. Ce phénomène dissipatif permet de transformer et dissiper l'énergie cinétique de l'écoulement sous forme de chaleur.

#### 3.1.2 Exemple simple d'un écoulement visqueux : Couette

La viscosité traduit la capacité d'un fluide à s'opposer au mouvement de cisaillement qu'on lui impose. On imagine le cas le plus simple d'un écoulement de cisaillement, l'écoulement de Couette plan, illustré sur la figure 3.4. Le fluide visqueux occupe le domaine entre deux plaques planes séparées par une distance  $L$ . La plaque du dessous est supposé au repos alors que la plaque du dessus se déplace à vitesse  $U$  dans la direction  $x$ . Si on imagine un fluide assez visqueux alors un écoulement de Couette va progressivement

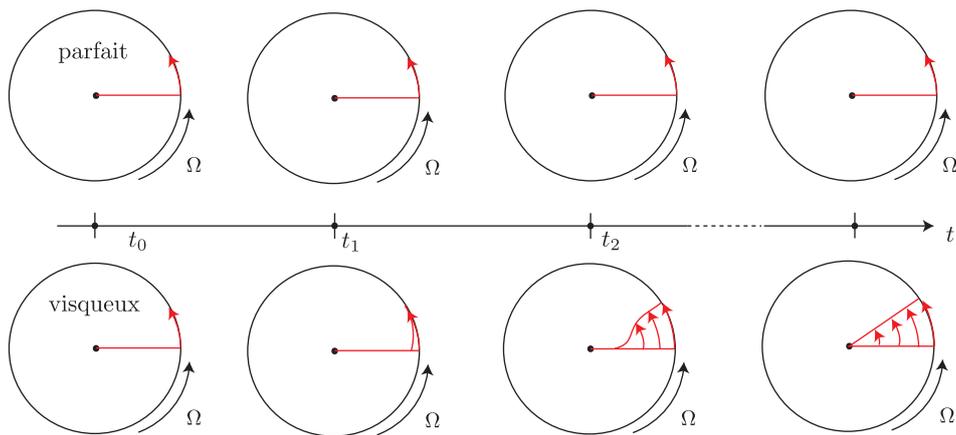


FIGURE 3.1 – On illustre comment la rotation est progressivement communiquée vers l'intérieur du fluide par la viscosité. Sans viscosité il est impossible de mettre en rotation le fluide dans un récipient à symétrie de rotation compte tenu de la condition du glissement à la paroi

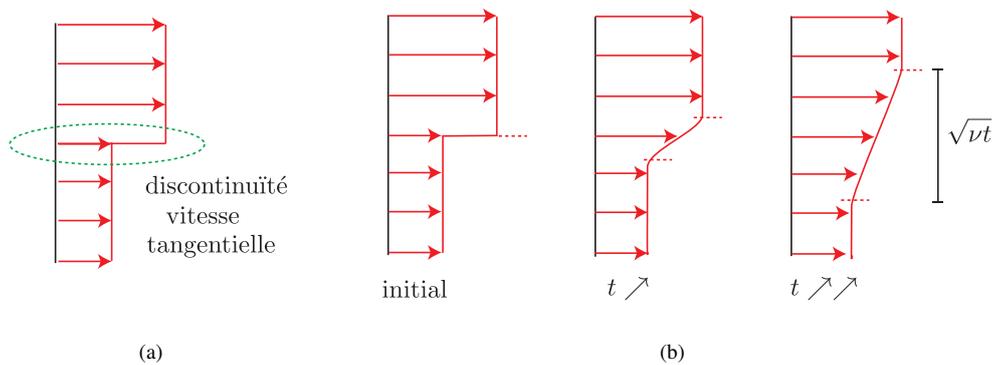


FIGURE 3.2 – Sans viscosité on peut maintenir des discontinuités de vitesse dans les écoulements. Avec viscosité, le saut de vitesse va progressivement s'étaler comme un front diffusif.

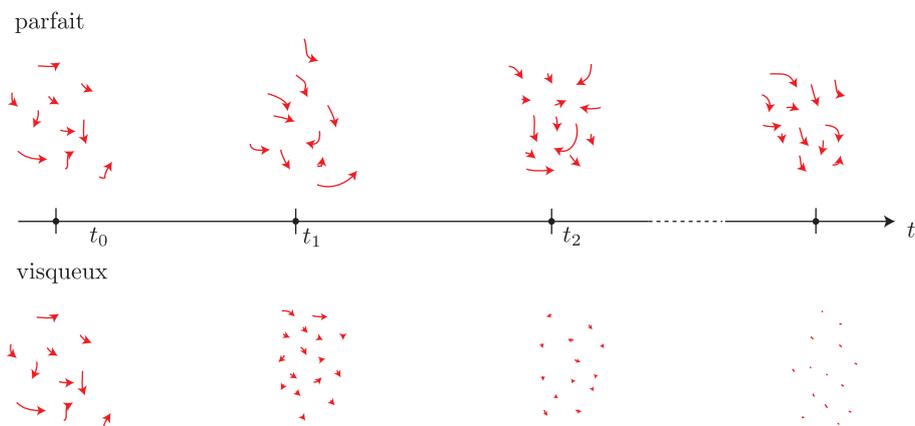


FIGURE 3.3 – La viscosité permet de dissiper de l'énergie. Lorsqu'on laisse un écoulement (turbulent ou pas) évoluer au cours du temps, celui-ci va progressivement s'arrêter (ou aller vers un mouvement solide) suite à la dissipation visqueuse.

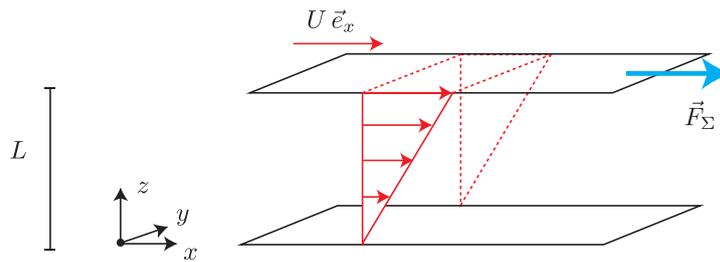


FIGURE 3.4 – Un écoulement de Couette plan entre deux plaques planes en mouvement relatif. La plaque du dessus exerce une force de surface  $\vec{F}_\Sigma$  dans le sens de l'écoulement d'intensité  $\eta U/LS$ .

s'établir tel que

$$\vec{u} = \frac{U}{L} z \vec{e}_x \quad (3.1)$$

qui a une dépendance linéaire en espace. Cet écoulement à un gradient vertical de vitesse constant

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{U}{L} \quad (3.2)$$

on appelle  $U/L$  le taux de cisaillement. Pour maintenir la fluide en mouvement, la plaque doit exercer une force  $\vec{F}_\Sigma$  sur le fluide en dessous. Cette force de surface est due aux contraintes visqueuses et elle vaut

$$\vec{F}_\Sigma = \frac{\eta U}{L} S \vec{e}_x \quad (3.3)$$

pour un fluide Newtonien. Cette force est tangentielle à la surface, proportionnel au gradient vertical de la vitesse et proportionnel à la viscosité dynamique  $\eta$ .

### 3.1.3 Tenseur des contraintes visqueuses

Après cet exemple, donnons la définition générale du tenseur des contraintes visqueuses dans un fluide dit Newtonien et incompressible.

#### ★ Tenseur des contraintes visqueuses.

$$\vec{\sigma}^v = \eta \left( \overline{\nabla u} + \overline{\nabla u}^T \right) = 2\eta \vec{\varepsilon} \quad (3.4)$$

On appelle  $\eta$  la viscosité dynamique et  $\nu = \eta/\rho$  la viscosité cinématique. ■

La viscosité dynamique  $\eta$  a la dimension physique de  $M L^{-1} T^{-1}$ . Le plus souvent on l'exprime en unités de  $Pa \cdot s$ . La viscosité cinématique  $\nu$  a la dimension physique  $L^2/T$  d'un coefficient de diffusion.

En pratique, on mesure la viscosité d'un fluide à l'aide d'un rhéomètre. Certains rhéomètres ressemblent à un dispositif de Couette cylindrique (cf. plus bas dans le chapitre), dans lequel le fluide est situé entre deux cylindres qui tournent à des vitesses différentes. Si le cylindre extérieur tourne plus rapidement que le cylindre intérieur alors les contraintes visqueuses exercent une force de surface tangentielle (flèches bleues) sur toute la surface du cylindre intérieur. Ceci résulte en un couple surfacique qui se mesure et qui est proportionnel à la viscosité dynamique. Quelques valeurs typiques pour la viscosité dynamique de différents fluides sont données dans le tableau 3.1. Entre l'air et le miel,  $\eta$  peut varier sur plus de 9 décades. Le tableau 3.1 donne quelques valeurs typiques. Remarquons que la viscosité cinématique de l'air est environ 15 plus grande que celle de l'eau.

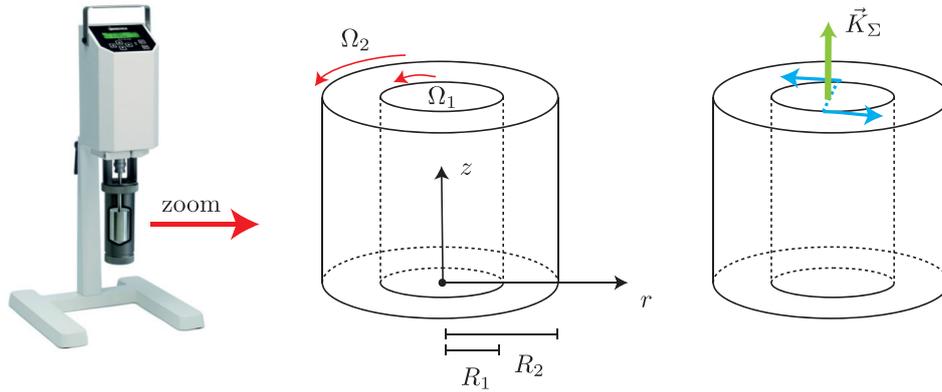


FIGURE 3.5 – Un rhéomètre est un appareil qui permet de mesurer la viscosité d'un fluide. Dans un rhéomètre de type Couette on place le fluide entre deux cylindres qui tournent à vitesse de rotation différente. Le couple surfacique qui s'exerce sur les cylindres (intérieur ou extérieur) est proportionnel à la viscosité dynamique.

fluide	air	eau	glycérol	miel
$\eta$ en (Pa.s)	$18.5 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-3}$	1.49	$2 - 10 \times 10^3$
$\nu$ en ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	$15.6 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$1.18 \times 10^{-3}$	1.4 – 7.0

TABLE 3.1 – Quelques valeurs pour la viscosité dynamique et cinématique dans de différents fluides à  $20^\circ \text{C}$ .

### 3.1.4 Force visqueuse sur un obstacle

Lorsqu'un écoulement visqueux rencontre un obstacle, celui-ci sentira une force de pression mais aussi une force visqueuse. On peut calculer la force visqueuse exercée par le fluide sur une paroi solide par l'intégrale

$$\vec{F}_{sur\ S}^v = - \iint_S \vec{\sigma}^v \cdot d\vec{S} \quad (3.5)$$

avec  $d\vec{S}$  orienté du fluide vers le solide.

#### Force sur une surface plane

Donnons un exemple où on imagine un écoulement qui coule sur une surface plane, comme l'écoulement de Couette. La force visqueuse exercée par le fluide sur le fond de ce bassin, y prend une forme plus simple. Pour situer les idées, on place la surface plane en  $z = 0$ ,  $x \in [0, L_x]$  et  $y \in [0, L_y]$  et on suppose qu'elle se déplace à vitesse uniforme ou qu'elle est au repos. Sur cette telle surface  $d\vec{S} = -\vec{e}_z dx dy$  et utilisant la représentation matricielle du tenseur des contraintes visqueuses, on calcule cette force visqueuse comme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_x^v \\ F_y^v \\ F_z^v \end{bmatrix} &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta \begin{bmatrix} 2\partial_x u_x & (\partial_y u_x + \partial_x u_y) & (\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ (\partial_y u_x + \partial_x u_y) & 2\partial_y u_y & (\partial_z u_y + \partial_y u_z) \\ (\partial_z u_x + \partial_x u_z) & (\partial_z u_y + \partial_y u_z) & 2\partial_z u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dx dy \\ &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta \begin{bmatrix} \partial_z u_x \\ \partial_z u_y \\ 0 \end{bmatrix} dx dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

De nombreux termes disparaissent car, comme nous le verrons plus bas, la vitesse adhère à la paroi solide ( $\vec{u}|_{z=0} = \vec{V}$  pour une plaque qui se déplace à vitesse constante ou au repos). Ainsi, cela implique que les dérivées de la vitesse tangentielle s'annulent :  $\partial_x u_y|_{z=0} = \partial_y u_x|_{z=0} = 0$ . Suite à l'incompressibilité, nous trouvons en plus  $\partial_z u_z|_{z=0} = -(\partial_x u_x|_{z=0} + \partial_y u_y|_{z=0}) = 0$ . Tout ceci simplifie la force visqueuse à

★ **Force visqueuse sur une paroi solide plane.**

$$\vec{F}^v = \iint_S \eta \frac{\partial \vec{u}_\perp}{\partial z} \Big|_{z=0} dx dy \quad (3.7)$$

pour une paroi  $z = 0$ . ■

La force visqueuse est toujours tangentielle à la paroi et ne dépend que de la dérivée normale de la vitesse tangentielle  $\vec{u}_\perp$  à la paroi. Si vous utilisez la précédente formule, il faut toujours vérifier et modifier le signe de la force si cela est nécessaire. Plus loin dans le chapitre on calculera la force visqueuse sur une sphère placé comme obstacle dans un écoulement visqueux.

**Couple sur une surface cylindrique**

On suppose un rhéomètre de type Couette et on souhaite calculer le couple exercé par les contraintes visqueuses sur le cylindre intérieur. On suppose que ce cylindre intérieur est de rayon  $R_1$  et de hauteur  $H$  et que la vitesse  $\vec{u} = u_\theta(r) \vec{e}_\theta$  est connue et indépendante de  $\theta$  (cf. écoulement de Couette cylindrique, plus bas). Le couple que le fluide exerce sur le cylindre est

$$\vec{K}^v = - \iint_S \vec{r} \times (\vec{\sigma}^v \cdot d\vec{S}) \quad (3.8)$$

Ici  $d\vec{S} = -R_1 d\theta dz \vec{e}_r$  sortant du fluide et  $\vec{r} = R_1 \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ . Sur la surface  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $z \in [0, H]$ . Par symétrie, le seul couple non-nul sera le couple selon  $z$ . Ainsi on trouve cette composante comme

$$K_z^v = 2\pi H R_1^2 \sigma_{\theta r}^v \Big|_{r=R_1} \quad (3.9)$$

La composante  $\theta r$  du tenseur des contraintes visqueuses est par définition

$$\sigma_{\theta r}^v = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \quad (3.10)$$

cf. formulaire en appendix B. Ainsi avec  $u_r = 0$ , on trouve

$$K_z^v = 2\pi H R_1^2 \eta \left( -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_1} \quad (3.11)$$

### 3.1.5 Origine microscopique de la viscosité

Il existe des modèles microscopiques pour décrire la viscosité et ceci fait l'objet de la physique des fluides. Dans la théorie cinétique des gaz, on peut à l'aide du formalisme de Chapman-Enskog, estimer les contraintes visqueuses dans un gaz idéalisé. Dans les liquides, il faut utiliser un autre modèle différent (cf. Livre "Hydrodynamique physique, E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit").

## 3.2 Le modèle de Navier-Stokes

### 3.2.1 Lois de comportements

On résume les lois de comportement adoptées dans ce chapitre. Premièrement, on maintient l'hypothèse que la densité du milieu reste constante.

★ **Hypothèse 1 : densité constante.**

$$\rho(\vec{r}, t) = Cst \quad (3.12)$$

La loi utilisée pour le tenseur des contraintes est celle du fluide Newtonien incompressible. La pression contient la partie isotrope de la contrainte et se trouve à côté des contraintes visqueuses.

★ **Hypothèse 2 : fluide Newtonien.**

$$\vec{\sigma} = -p \vec{1} + \eta \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T \right) = -p \vec{1} + 2\eta \vec{\epsilon} \quad (3.13)$$

L'équation de la chaleur n'est toujours pas très importante dans ce fluide incompressible, mais on pourra s'en servir pour calculer la température, moyennant quelques hypothèses thermodynamiques supplémentaires.

★ **Hypothèse 3 : chaleur.**

$$q \text{ (connue)}, \quad \frac{de}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} \text{ (Joule 1)}, \quad \vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T \text{ (Fourier)} \quad (3.14)$$

La source de chaleur  $q$  est supposée connue. La première loi de Joule permet de faire apparaître la température du milieu et fait apparaître la chaleur spécifique à volume constant  $c_v$  du matériau qui s'exprime en  $Jkg^{-1}K^{-1}$ . La première loi de Joule convient à un milieu incompressible car le volume local se préserve (conséquence de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ) comme on le montre plus en détail au chapitre 5. Dans la loi de Fourier, la densité de flux de chaleur  $\vec{\varphi}$  est reliée au gradient de température par la conductivité thermique  $\lambda$ , exprimée en  $Wm^{-1}kg^{-1}$ .

### 3.2.2 Lois d'évolution

En injectant ces lois de comportement dans les lois d'évolution fondamentales, on obtient les équations du modèle de Navier-Stokes incompressible. On supposera dans la suite de ce chapitre, que toutes les propriétés des matériaux sont uniformes dans l'espace et indépendantes du temps.

★ **Navier-Stokes incompressible.**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.15a)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (3.15b)$$

Ces deux équations définissent un système fermé pour  $p$  et  $\vec{u}$ . Parfois il peut être plus simple de manipuler l'équation de la vorticité  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ . Utilisant la propriété

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} + \vec{\nabla} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) \quad (3.16)$$

et en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes on aboutit sur

★ **Equation de vorticité.**

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (3.17a)$$

Remarque que la pression est éliminée. Une forme alternative de l'équation de vorticité est

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (3.18)$$

L'équation pour l'énergie interne peut s'écrire comme une équation pour la température.

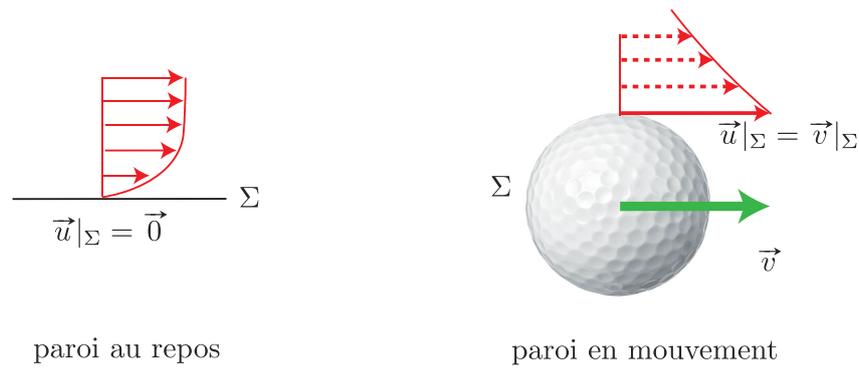


FIGURE 3.6 – Illustration de la condition limite non-glissement sur une paroi au repos ou une paroi en mouvement

★ **Equation de température.**

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \lambda \nabla^2 T + q + 2\eta \vec{\epsilon} : \vec{\epsilon} \quad (3.19)$$

L'énergie cinétique dissipée par la viscosité,  $2\eta \vec{\epsilon} : \vec{\epsilon}$  apparaît ici comme une source de chaleur, une source qui sera très souvent négligeable. Tant qu'on suppose que la densité et les propriétés des matériaux ne dépendent pas ou très peu de la température, on pourra ignorer cette équation de la température et ceci sera le cas dans ce chapitre.

### 3.2.3 Conditions aux limites

Lorsqu'un fluide visqueux est en contact avec une surface solide  $\Sigma$  qui se déplace à la vitesse  $\vec{v}$ , on supposera que le fluide adhère à cette paroi.

★ **Condition d'adhérence (no-slip, non-glissement).**

$$\vec{u}|_{\Sigma} = \vec{v}|_{\Sigma} \quad (3.20)$$

La vitesse du fluide est égale à celle de la paroi, cf. illustration en figure (3.6). A grande vitesse, l'accommodation de la vitesse du fluide à celle de la paroi se fait souvent sur une courte distance, on parle d'une couche limite. L'étude de ces couches limites est un sujet en soit et mérite un chapitre à lui tout seul. On remarque encore que l'adhérence du fluide à une paroi rigide est une loi phénoménologique. Il s'agit d'une approximation qui peut être mise à défaut dans certaines conditions.

Sur une surface libre  $\Sigma$  immobile en contact avec un gaz à pression  $p = p_0$ , en ignorant la tension de surface (chapitre 4), on doit imposer les conditions aux limites suivantes

★ **Condition sur surface libre immobile (sans tension de surface).** Avec  $\vec{n}$  la normale unitaire sur la surface libre  $\Sigma$ , on impose

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0 \quad , \quad -(p - p_0)\vec{n}|_{\Sigma} + \eta \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T \right) \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = \vec{0} \quad (3.21a)$$

La surface libre est imperméable et la contrainte normale est continue. Donnons un exemple sur une surface

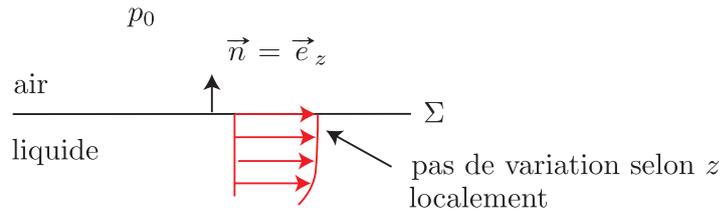


FIGURE 3.7 – Illustration de la condition limite visqueuse en dessous d’une surface libre plate .

plate située à la hauteur  $z = 0$ . On devra y exiger que

$$u_z|_{z=0} = 0 \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = p_0 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Ici on a utilisé  $\partial_x u_z|_{z=0} = \partial_y u_z|_{z=0} = 0$  ce qui est une conséquence de l’imperméabilité. Les conditions  $\partial_z \vec{u}_{horiz}|_{z=0} = 0$  que la vitesse horizontale varie peu, immédiatement en dessous de la surface libre, cf. figure (3.7).

### 3.2.4 Les nombres de Reynolds et de Froude

Si on dispose d’une échelle typique  $U$  pour la vitesse et d’une échelle typique pour l’espace  $L$  alors on peut fixer un système d’unités pour le temps, l’espace, la vitesse et la pression qui nous permet d’adimensionner les équations. On choisit par exemple

$$\vec{r} = L\vec{\tilde{r}} \quad , \quad \vec{u} = U\vec{\tilde{u}} \quad , \quad t = LU^{-1}\tilde{t} \quad , \quad p = \rho U^2 \tilde{p} \quad (3.23)$$

Les dérivées spatiales et temporelles se transforment alors

$$\vec{\nabla} = L^{-1}\vec{\tilde{\nabla}} \quad , \quad \nabla^2 = L^{-2}\tilde{\nabla}^2 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = UL^{-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (3.24)$$

On injecte ce changement de variables dans les équations (3.15). La loi de l’incompressibilité exprimée sous forme adimensionnelle garde la même forme

$$\vec{\tilde{\nabla}} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \quad (3.25)$$

L’équation de Navier-Stokes devient quant à elle

$$\rho U^2 L^{-1} \left( \frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\tilde{\nabla}}) \vec{\tilde{u}} \right) = -\rho U^2 L^{-1} \vec{\tilde{\nabla}} \tilde{p} - \rho g \vec{e}_z + \eta UL^{-2} \vec{\tilde{\nabla}}^2 \vec{\tilde{u}} \quad (3.26)$$

Si on divise l’ensemble par  $\rho U^2 L^{-1}$  on obtient

$$\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{\tilde{\nabla}}) \vec{\tilde{u}} = -\vec{\tilde{\nabla}} \tilde{p} - \frac{1}{Fr^2} \vec{e}_z + \frac{1}{Re} \vec{\tilde{\nabla}}^2 \vec{\tilde{u}} \quad (3.27)$$

avec deux nombres sans dimension.

#### ★ Nombre de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{termes d'inertie}}{\text{termes visqueux}} \quad (3.28)$$

★ **Nombre de Froude.**

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} = \frac{\text{termes d'inertie}}{\text{gravité}} \quad (3.29)$$

Le nombre de Reynolds  $Re$  mesure le poids relatif des termes d'inertie ( $\rho \partial_t \vec{u}$  et  $\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ ) par rapport au terme visqueux. Un écoulement avec  $Re \gg 1$  est dominé par l'inertie, tandis qu'un écoulement avec  $Re \ll 1$  est dominé par la viscosité. Le nombre de Froude mesure le poids relatif des termes d'inertie par rapport au terme de gravité. Un écoulement avec  $Fr \gg 1$  est peu influencé par la gravité, un écoulement avec  $Fr \ll 1$  sera fortement influencé par la gravité. Comme le montrent les formules alternatives

$$Re = \frac{(L^2/\nu)}{(L/U)} = \frac{\text{temps diffusif}}{\text{temps advectif}}, \quad Fr = \frac{\sqrt{(L/g)}}{L/U} = \frac{\text{temps de chute libre}}{\text{temps advectif}} \quad (3.30)$$

on peut aussi interpréter ces deux nombres comme des rapports de deux temps caractéristiques. Le phénomène le plus rapide (temps le plus court) sera toujours le phénomène dominant.

### 3.3 Ecoulements visqueux exactes

L'équation de Navier-Stokes n'admet pas de nombreuses solutions analytiques simples et ceci est principalement dû à la présence du terme non-linéaire  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ . Dans certains cas spéciaux, le terme non-linéaire disparaît ou s'équilibre avec un gradient de pression. Ces solutions sont des écoulements laminaires, composés de "lamelles de fluides" qui glissent les unes sur les autres. On peut ignorer la gravité dans cette section car elle n'affecte pas les écoulements mais seulement la pression.

#### 3.3.1 Ecoulements parallèles (Cartésien)

Un écoulement parallèle est uni-directionnelle et invariant dans cette direction, par exemple

$$\vec{u} = u_x(y, z, t) \vec{e}_x \quad (3.31)$$

Ce genre d'écoulement est toujours incompressible et le terme non-linéaire disparaît exactement

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0} \quad (3.32)$$

Des équations de Navier-Stokes, il reste

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u_x \quad (3.33a)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.33b)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.33c)$$

à résoudre. Les deux dernières équations indiquent que la pression ne peut pas dépendre de  $y$  et  $z$ . Si on applique  $\partial_x$  sur la première équation, on trouve  $\partial_{xx}^2 p = 0$ , ce qui signifie

$$p = C + Gx \quad (3.34)$$

Ici  $C$  et  $G$  dépendent éventuellement du temps.  $G$  est le gradient de pression horizontale constant et peut traduire une force constante qui s'applique dans la direction  $x$ , soit

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -G + \eta \nabla^2 u_x \quad (3.35)$$

On reconnaît cette équation, comme une équation de diffusion avec une source  $G$  constante en espace mais éventuellement dépendant du temps. Cette équation linéaire admet des solutions analytiques qui peuvent satisfaire des conditions aux limites sur des plaques planes  $z = Cst$  et  $y = Cst$ .

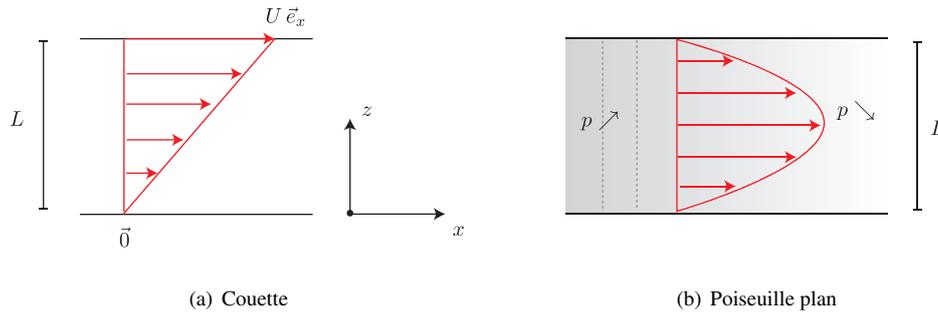


FIGURE 3.8 – Écoulements laminaires entre deux plaques horizontales. (a) L'écoulement Couette. (b) L'écoulement de Poiseuille plan.

Donnons quelques exemples. L'écoulement de Couette plan est celui qui se développe entre deux plaques horizontales qu'on déplace à vitesses différentes, en absence de gradient de pression  $G = 0$ . Si la plaque du bas placée en  $z = 0$  est au repos et celle du haut en  $z = L$ , se déplace à vitesse  $U$  alors

★ **Couette Plan.**

$$\vec{u} = U \frac{z}{L} \vec{e}_x = Sz \vec{e}_x \quad (3.36)$$

On appelle  $S = U/L$  le taux de cisaillement de l'écoulement de Couette plan. Cet écoulement de Couette est schématisé en figure 3.8-(a).

Au contraire, si on impose un gradient de pression  $G$  constant entre deux plaques horizontales en  $z = 0$  et  $z = L$  au repos, il se réalise un écoulement de Poiseuille plan.

★ **Poiseuille Plan.**

$$\vec{u} = U \frac{4z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \vec{e}_x = Az(z - L) \vec{e}_x \quad (3.37)$$

La vitesse varie de manière parabolique et atteint une vitesse maximale  $U$  au centre. Cet écoulement est schématisé en figure 3.8-(b).

**Exercice** Calculer le gradient de pression  $G$  nécessaire pour réaliser un écoulement d'intensité  $U$  dans un fluide qui a une viscosité  $\eta$ . Si on suppose que les deux plaques de dimension  $L_x, L_y$  et la distance entre elles  $L$ , quelle force faudra-t-il appliquer sur l'écoulement pour le faire bouger comme un écoulement de Poiseuille ?

### 3.3.2 Écoulement parallèle (cylindrique)

En géométrie cylindrique, on peut également trouver des écoulements parallèles. On cherche par exemple

$$\vec{u} = u_z(r, t) \vec{e}_z \quad (3.38)$$

c'est-à-dire un écoulement le long de l'axe du cylindre avec une structure axisymétrique (indépendant de  $\theta$  et  $z$  et avec une dépendance radiale). Cet écoulement est toujours incompressible et le terme non-linéaire disparaît exactement

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{0} \quad (3.39)$$

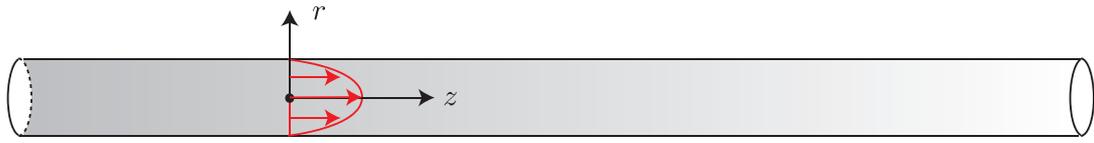


FIGURE 3.9 – Ecoulements de Hagen-Poiseuille dans un tuyau.

Les équations de Navier-Stokes, se réduisent à

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.40a)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3.40b)$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.40c)$$

comme projections radiales, azimutales et verticales. Première et deuxième équations indiquent que la pression ne peut être qu'une fonction qui dépend de  $z$  et du temps  $t$ . Appliquant  $\partial_z$  sur la composante  $z$ , on isole  $\partial_{zz}^2 p = 0$  ce qui donne

$$p = C + Gz \quad (3.41)$$

avec  $C$  et  $G$  potentiellement fonction de  $t$ . Il reste donc

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -G + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.42)$$

qui est encore une équation de diffusion.

L'écoulement de Hagen-Poiseuille est l'écoulement le mieux connu, solution de l'équation précédente. Il s'agit de l'écoulement stationnaire qui se développe dans un tuyau de rayon  $R$  sous l'influence d'un gradient de pression constant.

★ **Hagen-Poiseuille.**

$$\vec{u} = U \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z \quad (3.43)$$

Ici,  $U$  est la vitesse maximale atteinte au centre du tuyau. On retrouve encore un profil parabolique, cf. figure 3.9.

**Exercice** Calculer le gradient de pression  $G$  en fonction de  $U$  et  $\eta$ . Calculer la puissance qu'on doit fournir pour pousser un fluide visqueux à travers un tuyau de longueur  $L$ .

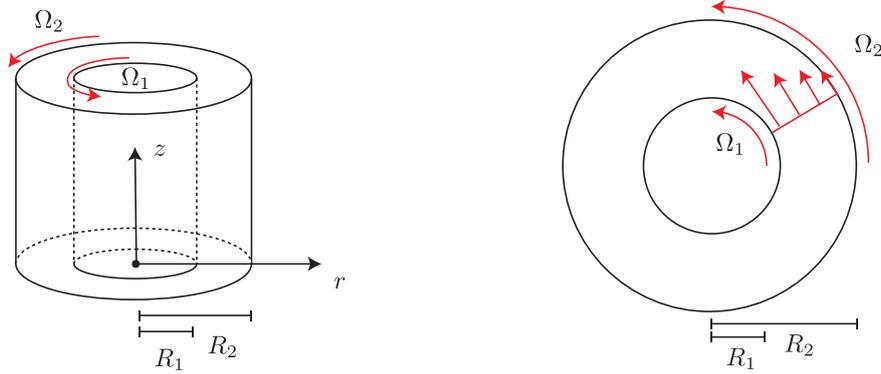


FIGURE 3.10 – Écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres tournant à vitesses différentes, vu de côté et du dessus.

### 3.3.3 Écoulements tournants

Toujours en géométrie cylindrique, on cherche cette fois-ci un écoulement purement azimutal, souvent appelé tourbillon tel que

$$\vec{u} = u_\theta(r, t) \vec{e}_\theta. \quad (3.44)$$

Cet écoulement est évidemment incompressible et des équations de Navier Stokes il reste

$$-\frac{\rho u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.45a)$$

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \quad (3.45b)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.45c)$$

Cette fois-ci, le terme non-linéaire ne disparaît pas. Dans la composante selon  $r$ , le terme  $-\rho u_\theta^2/r$  correspond à une densité de force de type centrifuge. Comme l'indique l'équation, cette force centrifuge s'équilibre avec un gradient radial de pression. Si  $u_\theta$  est connue alors on peut accéder à la pression en intégrant

$$p(r, t) = C + \int^r \frac{\rho u_\theta^2(\tilde{r}, t)}{\tilde{r}} d\tilde{r} \quad (3.46)$$

L'équation pour  $u_\theta$  restante est encore une simple équation de diffusion.

L'écoulement de Couette cylindrique (ou Taylor-Couette) est l'écoulement azimutal stationnaire  $\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0$  qui se développe entre deux cylindres co-axiaux de rayon  $R_1 \neq R_2$  différent, qui tournent à des vitesses de rotation  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  différentes. Pour identifier cet écoulement, il est utile de remarquer que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.47)$$

La dernière équation s'intègre aisément pour trouver

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}, \quad (3.48)$$

où les constantes  $A$  et  $B$  sont fixées par les conditions limites d'adhérence  $u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1$  et  $u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2$ . On trouve finalement que

$$A = \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad B = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \quad (3.49)$$

★ **Couette cylindrique.** Ecoulement entre deux cylindres co-axiaux de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , qui tournent à des vitesses de rotation  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

$$u_\theta(r) = \left( \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) r + \left( \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \frac{1}{r} \quad (3.50)$$

Le vortex de Lamb-Oseen ou vortex Gaussien est un tourbillon instationnaire. On peut le trouver comme une solution de l'équation (3.45b), mais il est en fait plus facile de manipuler l'équation de la vorticité. Par définition, la vorticité de l'écoulement (3.44) est purement verticale de sorte que

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z \quad (3.51)$$

De l'équation de la vorticité, il ne reste alors plus que la composante  $z$  à regarder

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) \quad (3.52)$$

On propose une solution auto-similaire à cette équation de la forme

$$\omega_z = \frac{A}{t} F(X) \quad \text{avec} \quad X = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} \quad (3.53)$$

Ici  $A$  est une constante sans dimension et arbitraire.  $X$  est une variable auto-similaire sans dimension qui incorpore espace et temps. Si on propose cette forme de solution à l'équation de diffusion, il vient après quelques manipulations

$$-F - \frac{X}{2} \frac{dF}{dX} = \frac{1}{X} \frac{d}{dX} \left( X \frac{dF}{dX} \right) \quad (3.54)$$

Si on multiplie avec  $X$ , on voit qu'on peut isoler une dérivée dans les termes de gauche et les termes de droite :

$$-\frac{d}{dX} \left( \frac{X^2 F}{2} \right) = \frac{d}{dX} \left( X \frac{dF}{dX} \right) \Rightarrow X \frac{dF}{dX} + \frac{X^2 F}{2} = C. \quad (3.55)$$

L'intégration donne alors  $C$ , une première constante d'intégration arbitraire. Ensuite, on multiplie cette équation par le facteur intégrant  $X^{-1} e^{X^2/4}$ , on peut regrouper les deux termes de gauche et obtenir une solution en deux termes

$$\frac{d}{dX} \left( F e^{\frac{X^2}{4}} \right) = C \frac{e^{\frac{X^2}{4}}}{X} \Rightarrow F = C e^{-\frac{X^2}{4}} \left( \int^X \frac{e^{\frac{\tilde{X}^2}{4}}}{\tilde{X}} d\tilde{X} \right) + D e^{-\frac{X^2}{4}} \quad (3.56)$$

La solution proportionnelle à  $C$  diverge pour  $X \rightarrow 0$  ne semble pas régulière, on l'écarte ici  $C = 0$ . La forme de  $F(X)$  admissible est donc

$$F = D e^{-X^2/4} \quad (3.57)$$

L'axe  $r = 0$  du tourbillon et donc  $X = 0$  fait partie du domaine. En conséquence on doit choisir  $C = 0$ . La constante  $D = 1$  sans perte de généralité car on doit encore multiplier la fonction  $F(X)$  par  $A/t$  pour trouver la vorticité  $\omega_z$  et  $A$  est arbitraire. Au final, on obtient donc

$$\omega_z(r, t) = \frac{A}{t} \exp \left( -\frac{r^2}{4\nu t} \right) \quad (3.58)$$

La vorticité a la forme d'une Gaussienne qui s'étale dans le temps et qui diminue en même temps en s'écrasant. Si on utilise une surface  $\Sigma_\infty$  avec son contour  $\mathcal{C}_\infty$  de rayon  $R \rightarrow +\infty$ , alors on peut relier  $A$  à la circulation  $\Gamma_\infty$ . Utilisant le théorème de Stokes

$$\Gamma_\infty = \oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 2\pi \int_0^\infty \frac{A}{t} \exp \left( -\frac{r^2}{4\nu t} \right) r dr = 4\pi A \nu \quad (3.59)$$

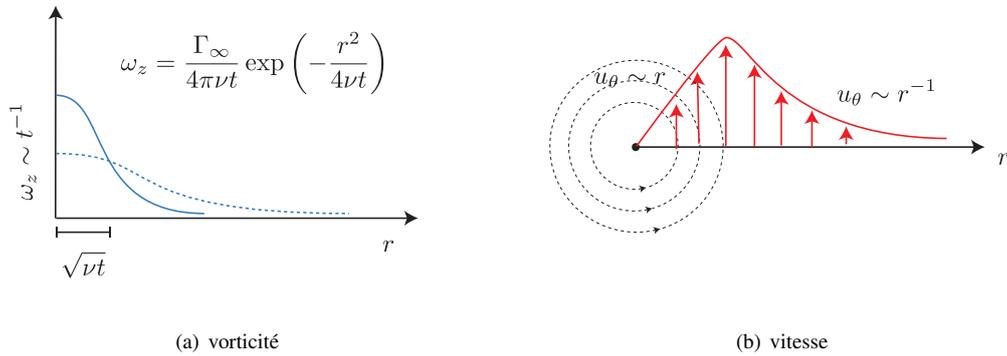


FIGURE 3.11 – Vortex de Lamb-Oseen. La vorticité varie comme une Gaussienne qui s'étale et son amplitude décroît au cours du temps. Le fluide tourne comme une rotation solide au centre ( $u_\theta \sim r$ ) et comme autour d'un vortex ponctuel loin du coeur ( $u_\theta \sim r^{-1}$ ).

Le changement de variable qui a été utilisée ici est  $s = r^2/(4\nu t)$ . Ceci permet d'écrire  $A = \Gamma_\infty/(4\pi\nu)$  qui est la forme préférée dans la littérature. Le même théorème de Stokes permet de remonter à la vitesse azimutale en tout point. Intégrant la vorticité sur la surface d'un disque  $\Sigma$  de rayon  $r$  au contour  $\mathcal{C}$ , on trouve

$$u_\theta(2\pi r) = 2\pi \int_0^r \frac{\Gamma_\infty}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{\tilde{r}^2}{4\nu t}\right) \tilde{r} d\tilde{r} \quad (3.60)$$

soit

$$u_\theta = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi r} \int_0^{r^2/4\nu t} \exp(-s) ds = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (3.61)$$

★ **Vortex de Lamb-Oseen (vortex Gaussien).**

$$\omega_z(r, t) = \frac{\Gamma_\infty}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad , \quad u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (3.62a)$$

La figure 3.11 illustre ce tourbillon Gaussien. A l'instant  $t$ , le rayon typique du tourbillon est  $\sqrt{\nu t}$  et son intensité décroît linéairement dans le temps. Le tourbillon est auto-similaire car à tout instant, il a une forme similaire, ici Gaussienne. Il est finalement instructif d'utiliser un développement limité pour obtenir une approximation de la vitesse dans la région  $r \ll 2\sqrt{\nu t}$  du coeur. On y obtient

$$u_\theta \approx \frac{\Gamma_\infty}{8\pi\nu t} r \quad , \quad \text{si } r \ll 2\sqrt{\nu t} \quad (3.63)$$

soit une rotation solide. Le coeur du tourbillon tourne donc presque comme un solide. Très loin du coeur du tourbillon, c'est-à-dire pour  $r \gg 2\sqrt{\nu t}$  on peut ignorer le terme exponentiel de la Gaussienne et la vitesse tend vers

$$u_\theta \approx \frac{\Gamma_\infty}{2\pi r} \quad , \quad \text{si } r \gg 2\sqrt{\nu t} \quad (3.64)$$

Ceci n'est rien d'autre que le profil de vitesse associé au tourbillon ponctuel, qu'on avait rencontré comme écoulement potentiel dans le chapitre précédent. En dehors du coeur du tourbillon, la vorticité s'annule et il ne reste donc que cet écoulement irrotationnel.

### 3.4 Écoulements dominés par la viscosité : régime de Stokes

L'équation de Navier-Stokes étant trop complexe pour admettre de nombreuses solutions exactes, on cherche à étudier des limites plus simples de cette équation. Dans le régime de Stokes, on va tout simplement ignorer les termes non-linéaires. Le modèle linéaire qui en résulte admet plus de solutions, mais ces solutions peuvent parfois être problématiques.

#### 3.4.1 Equation de Stokes

Dans le régime de Stokes, on suppose que le terme non-linéaire a un poids négligeable devant le terme visqueux. Utilisant  $[\vec{u}] = U$  et  $[\vec{r}] = L$  comme échelles typique, on identifie une condition nécessaire

$$[\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] \ll [\eta \nabla^2 \vec{u}] \Leftrightarrow \frac{\rho U^2}{L} \ll \eta \frac{U}{L^2} \quad (3.65)$$

soit une condition sur nombre de Reynolds

★ **Régime de Stokes.** Si le nombre de Reynolds est tel que

$$Re = \frac{UL}{\nu} \ll 1 \quad (3.66)$$

on peut simplifier l'équation de Navier-Stokes à l'équation de Stokes.

$$\rho \partial_t \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (3.67)$$

Le terme d'accélération  $\rho \partial_t \vec{u}$  n'est pas toujours important devant le terme visqueux et sous la condition supplémentaire

$$[\rho \partial_T \vec{u}] \ll [\eta \nabla^2 \vec{u}] \Leftrightarrow \frac{\rho U}{T} \ll \frac{\eta U}{L^2} \quad (3.68)$$

on peut encore plus simplifier le modèle.

★ **Régime de Stokes stationnaire.** Sous les deux hypothèses

$$Re = \frac{UL}{\nu} \ll 1, \quad N = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1 \quad (3.69)$$

l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes stationnaire

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (3.70)$$

Les équations du régime de Stokes sont linéaires et ainsi il existe de nombreuses méthodes analytiques pour trouver des solutions (superposition de solutions). Le modèle de Stokes reste populaire de nos jours, par exemple pour modéliser les écoulements autour de micro-nageurs (algues, bactéries) ou pour savoir comment de petites impuretés solides et lourdes sédimentent dans un fluide.

Les écoulements laminaires et stationnaires trouvés plus haut, c'est-à-dire Couette et Poiseuille plan, Couette cylindrique et Hagen-Poiseuille satisfont tous l'équation de Stokes car le terme non-linéaire n'y avait aucun rôle dynamique. Mais d'autres solutions existent à cette équation et l'exemple le plus connu est celui de l'écoulement visqueux autour d'une sphère solide. Mais attention, l'équation de Stokes n'est pas toujours adéquate et ceci est discuté dans la section sur le paradoxe de Stokes.

#### 3.4.2 Écoulement visqueux autour d'une sphère

On suppose qu'un écoulement uniforme d'intensité  $U$  à l'infini arrive sur une sphère de rayon  $R$  au repos. L'écoulement doit contourner cette sphère et exerce une force de friction dessus que l'on peut calculer. Le calcul de cet écoulement n'a rien d'évident principalement parce qu'il faut utiliser les coordonnées

sphériques. Pour simplifier les calculs, on aligne la direction de l'écoulement uniforme à l'infini avec la direction  $z$  de sorte que

$$\vec{u}_\infty = U \vec{e}_z = U \cos \theta \vec{e}_r - U \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (3.71)$$

en coordonnées sphériques. Partout ailleurs, il semble acceptable de proposer un écoulement axisymétrique

$$\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta \quad (3.72)$$

sans composante azimutale  $u_\phi = 0$  et qui ne dépend donc que du rayon sphérique  $r \in [R, \infty[$  et de la latitude  $\theta \in [0, \pi]$ . Le calcul présenté ici diffère de l'approche classique et il est utile de motiver notre approche alternative avant de se lancer.

**R** Dans l'approche classique on représente le champ de vitesse incompressible avec un potentiel vecteur

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\psi}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta \quad (3.73)$$

On appelle  $\psi$  la fonction de courant de Stokes. Combiné avec (3.71), on déduit que  $\psi$  à l'infini doit tendre vers

$$\psi \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{Ur^2}{2} \sin^2 \theta \quad (3.74)$$

Cette forme limite de la solution inspire le choix spécifique de la fonction de courant

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta \quad (3.75)$$

partout dans le domaine fluide, qui a donc la même dépendance en latitude. Les conditions de non-glissement sur la surface de la sphère en  $r = R$  et la forme de  $\psi$  à l'infini, imposent

$$f(R) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial r}(R) = 0 \quad , \quad f \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{Ur^2}{2} \quad (3.76)$$

Une équation différentielle pour  $f(r)$  est trouvée en prenant le rotationnel de l'équation de Stokes. Ceci donne

$$\vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{\nabla} \times \left( \frac{\psi}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \right) = 0 \quad (3.77)$$

Ici, il est nécessaire de déplier tous les termes de cette équation afin de trouver une équation différentielle d'ordre 4 pour  $f(r)$ . Ceci demande un sérieux travail manuel et il y a peu de propriétés qui simplifient les calculs. Seulement la dérivation de cette équation nous prendrait quelques pages.

Au lieu d'utiliser la fonction de courant de Stokes, on représente le champ de vitesse comme

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (u_p(r, \theta) \vec{r}) \quad (3.78)$$

Ici  $\vec{r} = r \vec{e}_r$  le vecteur position et  $u_p$  est un potentiel poloïdal. Avec la définition du rotationnel (appendice A) en coordonnées sphériques, on obtient

$$\vec{u} = \frac{1}{r} \left[ \underbrace{-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_p}{\partial \theta} \right)}_{\hat{L}^2 u_p} \right] \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) \vec{e}_\theta \quad (3.79)$$

explicitement. Cette représentation différente semble plus complexe, mais elle a quelques avantages. Dans la partie radiale de la vitesse, on retrouve l'opérateur du moment orbital  $\hat{L}^2$ , que vous avez rencontré en mécanique quantique lors du traitement de l'atome d'hydrogène. Cet opérateur admet les harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \phi)$  comme fonctions propres, avec  $\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$  et  $l \in \mathbb{N}$ . D'une manière générale pour une fonction  $g$  arbitraire, la précédente formule permet d'identifier que

$$\hat{L}^2 g = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (g \vec{r}) = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] g \quad (3.80)$$

L'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques est

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\widehat{L}^2}{r^2} \quad (3.81)$$

et il commute avec le rotationnel

$$\vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \quad (3.82)$$

Ceci se démontre facilement avec  $\nabla^2 \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ , grand classique du calcul vectoriel. Dans la même veine, une dernière propriété utile à mentionner est

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (u_p \vec{r}) &= -\nabla^2 (u_p \vec{r}) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot u_p \vec{r}) \\ &= -(\nabla^2 u_p) \vec{r} + \vec{\nabla}(-2u_p + \vec{\nabla} \cdot (u_p \vec{r})) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dans la deuxième relation on réussit à séparer une partie proportionnelle à  $\vec{r}$  d'un gradient  $\vec{\nabla}(\dots)$ .

Après cette série de propriétés utiles, on se lance dans le calcul de  $u_p$ . On trouve d'abord la forme du potentiel  $u_p$  désirée lorsque  $r \rightarrow +\infty$  loin de la sphère. Si on souhaite l'écoulement uniforme selon  $z$  (3.71), alors le choix

$$u_{p,\infty} = \frac{Ur \cos \theta}{2} \quad (3.84)$$

s'impose. Cette forme du potentiel à l'infini nous motive pour proposer

$$u_p = f(r) \cos \theta \quad (3.85)$$

Avec la définition donnée de l'opérateur  $\widehat{L}^2$ , on peut calculer

$$\widehat{L}^2 u_p = 2u_p \quad (3.86)$$

Ceci n'est pas un hasard car  $\cos \theta \sim Y_1^0$ , une harmonique sphérique avec  $l = 1$  et  $m = 0$ . Le Laplacien de  $u_p$  sera ainsi

$$\nabla^2 u_p = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \right] f(r) \cos \theta \quad (3.87)$$

Ces deux résultats nous serviront. On trouve maintenant l'équation différentielle qui fixe le potentiel  $u_p$  et celle-ci est trouvée en appliquant l'opérateur  $(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times)$  sur l'équation de Stokes. Attention, car ceci donne une équation différentielle avec pas moins de 6 rotationnels consécutifs :

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times (u_p \vec{r}) = 0 \quad (3.88)$$

et c'est normal que ça vous fait très peur. Malgré ce qui peut sembler, cette équation est bien plus simple à manipuler que (3.77) de l'approche classique. Utilisant les propriétés mentionnées plus haut, on simplifie ces 6 rotationnels par pair :

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left( -(\nabla^2 u_p) \vec{r} + \vec{\nabla}(\dots) \right) \\ &= \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left( (-\nabla^2 u_p) \vec{r} \right) \\ &= \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left( \nabla^2 \left( (\nabla^2 u_p) \vec{r} + \vec{\nabla}(\dots) \right) \right) \\ &= \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left( (\nabla^2 \nabla^2 u_p) \vec{r} \right) \\ &= \widehat{L}^2 \nabla^2 \nabla^2 u_p \end{aligned} \quad (3.89)$$

On utilise ici l'identité vectorielle  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(\dots) = \vec{0}$ . Avec les résultats donnés plus haut pour  $u_p = f(r) \cos \theta$ , on obtient

$$\widehat{L}^2 \nabla^2 \nabla^2 u_p = 2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \right] \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \right] f(r) \cos \theta = 0. \quad (3.90)$$

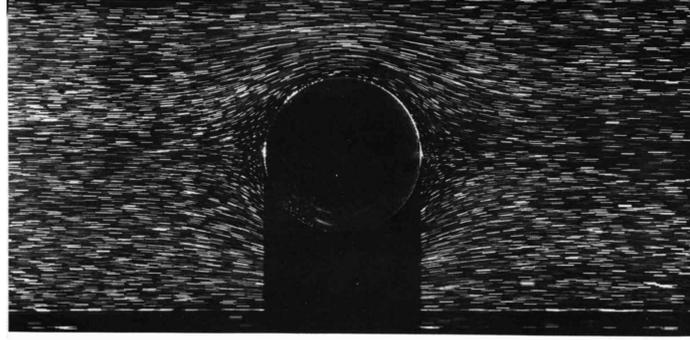


FIGURE 3.12 – Écoulement autour d'une sphère dans le régime de Stokes (repris de Album of fluid motion, M. Van Dyke)

soit

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \right] \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \right] f(r) = 0 \quad (3.91)$$

comme équation différentielle pour  $f(r)$ . Si on propose  $r^\alpha$  comme solution candidat, on trouve qu'il y a quatre possibilités  $\alpha = 3, 1, 0, -2$ . Cela implique la forme générale suivante pour  $f(r)$  :

$$f(r) = C_1 r^3 + C_2 r + C_3 + C_4 r^{-2} \quad (3.92)$$

Ici  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sont 4 constantes arbitraires à fixer. Le comportement désiré pour  $u_p$  à  $r \rightarrow \infty$  impose  $C_1 = 0$  et  $C_2 = U/2$ . Les deux autres constantes,  $C_3$  et  $C_4$  sont fixées en imposant les conditions de non-glissement sur la sphère,  $u_r|_{r=R} = 0$  et  $u_\theta|_{r=R} = 0$ . Avec (3.79), on voit que

$$f|_{r=R} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.93)$$

sera suffisant, ce qui fixe

$$\begin{cases} \frac{UR}{2} + C_3 + C_4 R^{-2} = 0 \\ \frac{U}{2} - 2C_4 R^{-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C_3 = -\frac{3UR}{4} \quad , \quad C_4 = \frac{UR^3}{4} \quad (3.94)$$

Le potentiel poloïdal  $u_p$  vaut finalement

$$u_p = \frac{UR}{2} \left( \frac{r}{R} - \frac{3}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (3.95)$$

Enfin, utilisant (3.79), nous évaluons la vitesse autour de la sphère à

$$\begin{cases} u_r = \frac{\hat{L}^2 u_p}{r} = \frac{2u_p}{r} = U \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_p)}{\partial r \partial \theta} = -U \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \sin \theta \end{cases}$$

Ici, on teste facilement que  $\vec{u}|_{r=R} = \vec{0}$  en effet. Pour vous donner une idée de ce champ de vitesse, on montre sur la figure 3.12 un cliché expérimental de l'écoulement autour d'une sphère à bas nombre de Reynolds.

### Force de surface sur la sphère

Pour calculer la force que l'écoulement exerce sur la surface  $S$  de la sphère, on a besoin de calculer l'intégrale

$$\vec{F}_{sur\ sphere} = - \iint_S \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} = \iint_S p d\vec{S} - \eta \iint_S \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T \right) \cdot d\vec{S} \quad (3.96)$$

avec par définition  $d\vec{S} = -R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r$  vers l'extérieur du fluide = l'intérieur de la sphère. La force est en partie causée par la pression et en partie par les contraintes visqueuses. Le champ de pression est pour l'instant inconnu et pour le calculer, on doit revenir sur l'équation de Stokes, que l'on multiplie par  $\vec{r}$ . Ceci donne

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p = \eta \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (u_p \vec{r}) \Leftrightarrow r \frac{\partial p}{\partial r} = \hat{L}^2 \nabla^2 u_p = 2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} \right] u_p \quad (3.97)$$

On injecte notre champ  $u_p$  dans le membre de droite, puis on intègre selon  $r$  pour trouver

$$p = -\frac{3\eta UR \cos \theta}{2r^2} \quad (3.98)$$

à une constante près. En utilisant la forme du tenseur de contraintes en coordonnées sphériques, on obtient enfin la formule

$$\begin{aligned} \vec{F}_{sur\ sphere} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[ \left( -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \vec{e}_r + \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R} \vec{e}_\theta \right] R^2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[ -p \Big|_{r=R} \vec{e}_r + \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Big|_{r=R} \vec{e}_\theta \right] R^2 \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.99)$$

Les simplifications sont le résultat de la condition de vitesse nulle à la paroi qui impliquent  $\partial_\theta u_r|_{r=R} = 0$ ,  $\partial_r u_r|_{r=R} = 0$  et  $u_\theta|_{r=R} = 0$ . On y injecte les profils de  $p$  et  $u_\theta$  et en remplace

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.100)$$

Quelques intégrations abordables plus tard, on aboutit sur le résultat bien connu de Stokes

$$\vec{F}_{sur\ sphere} = 6\pi\eta UR \vec{e}_z \quad (3.101)$$

Le détail de ce calcul montre que la pression cause 1/3 de cette force et que l'autre 2/3 est causé par les contraintes visqueuses. Contrairement à l'écoulement parfait, l'écoulement très visqueux exerce bien une force de frottement sur la sphère.

**R** En TD 1, on trouve que cette force de frottement visqueuse devait être proportionnel au produit  $\eta UR$  à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Ici, nos efforts ont permis de trouver que le coefficient de proportionnalité vaut  $6\pi$  pour une sphère solide.

#### Vitesse de sédimentation

La précédente formule peut être utilisée pour estimer la vitesse de sédimentation de particules solides isolées de densité  $\rho_{sol}$  qui tombent dans un fluide de densité  $\rho$ . Dans le régime permanent, il y a un équilibre entre le poids, la poussée d'Archimède et la force de frottement fluide :

$$\left( -\rho_{sol} g \frac{4\pi R^3}{3} + \rho g \frac{4\pi R^3}{3} + 6\pi\eta UR \right) \vec{e}_z = 0 \quad (3.102)$$

Ceci permet de déterminer

$$U = \frac{2(\rho_{sol} - \rho)gR^2}{9\eta} \quad (3.103)$$

la vitesse de sédimentation des particules.

#### 3.4.3 Ecoulement visqueux autour d'un cylindre : le paradoxe de Stokes

Tout comme d'Alembert, Stokes s'est confronté à un paradoxe. Si on fait le même type de calcul pour trouver l'écoulement visqueux autour d'un cylindre, on est confronté à une surprise. L'équation de Stokes n'a pas de solution ! Pour s'en convaincre, on peut chercher l'écoulement incompressible sous la forme

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \psi \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta \quad (3.104)$$

La fonction de courant  $\psi(r, \theta)$ , dépend du rayon cylindrique  $r$  et de l'angle azimutal  $\theta$ . On applique l'opérateur  $\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} \times$  à l'équation de Stokes et ceci mène à

$$\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{\nabla} \times \psi \vec{e}_z = 0 \quad , \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (3.105)$$

A l'infini l'écoulement est supposé uniforme et selon  $x$ , soit

$$\vec{U} = U \vec{e}_x = U \cos \theta \vec{e}_r - U \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \psi \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} U r \sin \theta \quad (3.106)$$

Ceci inspire le choix

$$\psi = f(r) \sin \theta \quad (3.107)$$

partout dans le domaine et l'équation (3.105) donne alors

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] f(r) = 0 \quad (3.108)$$

ce qui se réécrit comme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rf)}{\partial r} \right) \right] \right\} = 0 \quad (3.109)$$

Cette dernière forme est la plus adaptée et permet de trouver, après quatre intégrations, que

$$f(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} + C_3 r^3 + C_4 r \ln r \quad (3.110)$$

est la solution admissible pour  $f(r)$ . Les termes  $C_3$  et  $C_4$  doivent s'annuler si on veut vraiment raccorder cette solution à celle qu'on trouve à l'infini et  $C_1 = U$ . Mais avec seulement  $C_2$  qui reste, on n'a pas suffisamment de constantes pour imposer les conditions de non-glissement  $u_r|_{r=R} = 0$  et  $u_\theta|_{r=R} = 0$ . L'équation de Stokes n'admet donc pas de solution qui représente l'écoulement autour d'un cylindre, un sérieux problème pour l'équation de Stokes, connu sous le nom du paradoxe de Stokes.

### Résoudre le paradoxe de Stokes avec Navier-Stokes

En réalité, un fluide très visqueux envoyé sur un cylindre va bien le contourner et il existe donc bien un écoulement solution de ... Navier-Stokes. En effet, pour résoudre ce paradoxe il faut se convaincre du fait que l'hypothèse

$$\|\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}\| \ll \|\eta \nabla^2 \vec{u}\| \quad (3.111)$$

ne se maintient pas à tous les endroits de l'espace. Suffisamment loin de l'obstacle, le Laplacien du champ de vitesse peut devenir tout aussi faible que le terme non-linéaire et il n'est plus correct d'ignorer l'inertie, le terme non-linéaire. On n'a donc pas le droit de supposer que l'équation de Stokes est satisfaite partout. C'est une bonne approximation proche du cylindre, mais certainement pas loin de ce dernier.

En utilisant la technique mathématique avancée des "solutions asymptotiques raccordées", il est possible de trouver une solution à ce problème de l'écoulement visqueux autour du cylindre qui, malgré son apparence plus simple, est donc bien plus compliqué que le problème de l'écoulement visqueux autour d'une sphère.

## 3.5 Écoulements dominés par la viscosité : régime de lubrification

Un autre régime dans lequel les écoulements sont dominés par la viscosité est le régime de lubrification. On simplifie les équations de Navier-Stokes en utilisant l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est fortement contraint dans une ou plusieurs directions. Les équations qui en résultent ressemblent à celles du régime de Stokes, mais elles sont très différentes tout de même. Le régime de lubrification est très adapté pour décrire le mouvement de fins films de liquide, tels qu'on les trouve sous des patins hydrauliques.

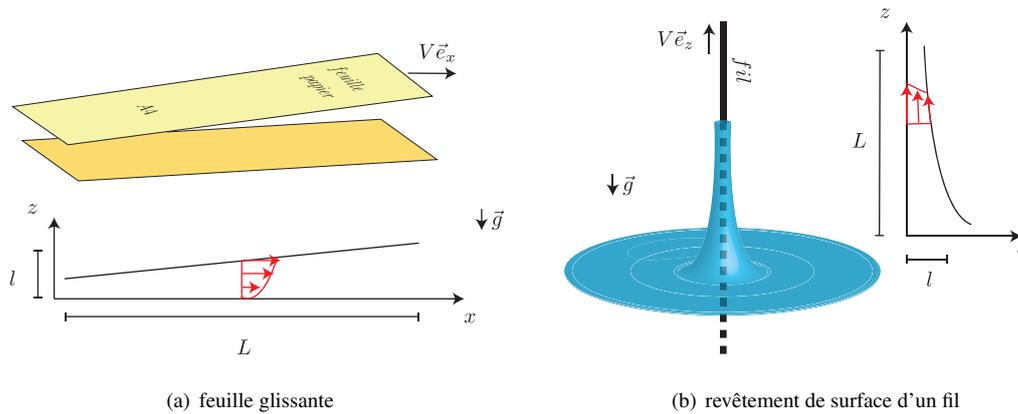


FIGURE 3.13 – Lorsque les écoulements sont géométriquement contraints en une ou deux dimensions, l’approximation de lubrification peut convenir pour décrire l’écoulement dans le régime dominé par la viscosité.

### 3.5.1 Écoulements géométriquement contraints

Ce régime peut se réaliser dans des conditions géométriques particulières, schématisées sur la figure 3.13. Dans le panneau (a), on imagine l’écoulement qui se réalise entre un sol horizontal et une feuille légèrement inclinée qui glisse à la vitesse  $V \vec{e}_x$  sur une fine couche d’air. Dans le panneau (b), on illustre l’écoulement contraint dans deux directions d’espace si on tire un fil à travers un substrat liquide pour réaliser un fin revêtement de sa surface, l’écoulement aura lieu dans une zone très proche du fil.

Dans ces deux exemples, l’écoulement est donc fortement contraint dans l’espace dans une ou deux directions. Afin de mieux caractériser cela, on introduit deux échelles typiques de longueur

$$\begin{aligned} l &: \text{longueur typique dans la direction courte} \\ L &: \text{longueur typique dans la direction longue} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Pour appliquer l’approximation de lubrification, on doit supposer qu’il existe cette séparation d’échelle spatiale.

★ **Hypothèse 1 : séparation d’échelle spatiale.** Il doit exister une séparation spatiale

$$\frac{l}{L} \ll 1 \quad (3.113)$$

entre la courte et la longue échelle spatiale typiques du système fluide,  $l$  et  $L$ . ■

Si on combine cette hypothèse avec les équations de Navier-Stokes, on peut montrer qu’avec quelques hypothèses supplémentaires, celles-ci se réduisent à un modèle simplifié, le modèle de lubrification.

### 3.5.2 Le modèle de lubrification

Pour rendre plus concret les opérations de simplification des équations de Navier-Stokes, on a besoin d’introduire quelques autres échelles typiques à côté de  $l$  et  $L$  déjà introduites. On note

$$\begin{aligned} u &: \text{vitesse typique dans la direction courte} \\ U &: \text{vitesse typique dans la direction longue} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Une échelle de temps typique qui caractérise l’instationnarité de l’écoulement est

$$T : \text{temps typique sur laquelle l’écoulement varie dans le temps} \quad (3.115)$$

et pour la pression on utilise

$$P : \text{pression typique, encore inconnue mais liée à } u, U \quad (3.116)$$

On étudie également un cas particulier d'un écoulement contraint dans la direction  $z$  et étendu dans la direction  $x, y$ , où la seule force extérieure est la gravité orienté vers le bas. Utilisant des crochets pour noter "ordre de grandeur de", on a donc

$$[t] = T, \quad [x], [y] = L, \quad [z] = l, \quad [u_x], [u_y] = U, \quad [u_z] = u, \quad [p] = P \quad (3.117)$$

On adopte seulement l'hypothèse géométrique  $l/L \ll 1$  pour l'instant.

### Information issue de l'incompressibilité

Regardons ce qu'on peut déduire de la relation qui exprime l'incompressibilité. Par définition

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{U/L} + \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{u/l} \quad (3.118)$$

En dessous des différents termes, on a ajouté leurs ordres de grandeurs. Une balance des trois termes requiert que

$$\frac{U}{L} \sim \frac{u}{l} \Leftrightarrow \frac{u}{U} \sim \frac{l}{L} \quad (3.119)$$

Le rapport des deux vitesses typiques est donc similaire au rapport des deux échelles spatiales introduites. Combinant avec (3.113), on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{u}{U} \ll 1 \quad (3.120)$$

L'écoulement sera donc principalement horizontal s'il est fortement contraint dans la direction verticale.

### Du modèle de Navier-Stokes au modèle de lubrification

On écrit les équations de Navier-Stokes et on estime l'ordre de grandeur de chacun des termes

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u_x}{\partial t}}_{\rho U/T} + \underbrace{\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}}_{\rho U^2/L} + \underbrace{\rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}}_{\rho u U/l} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{P/L} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}_{\eta U/L^2} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}_{\eta U/l^2} \quad (3.121a)$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u_y}{\partial t}}_{\rho U/T} + \underbrace{\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\rho U^2/L} + \underbrace{\rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}}_{\rho u U/l} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{P/L} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{\eta U/L^2} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}}_{\eta U/l^2} \quad (3.121b)$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\rho u/T} + \underbrace{\rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y}}_{\rho u U/L} + \underbrace{\rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\rho u^2/l} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial z}}_{P/l} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}}_{\eta u/L^2} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{\eta u/l^2} - \rho g \quad (3.121c)$$

On cherche à simplifier ces équations à l'aide des inégalités  $l/L \ll 1$ ,  $u/U \ll 1$  et la balance  $u/U \sim l/L$ . Simplifions d'abord le terme visqueux. Si on compare l'ordre de grandeur des différents termes visqueux, on voit qu'on pourra ignorer les termes avec les dérivées horizontales devant ceux avec la dérivée verticale. Par exemple,

$$\left[ \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \right] \ll \left[ \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \Leftrightarrow \eta U/L^2 \ll \eta U/l^2 \Leftrightarrow \frac{l^2}{L^2} \ll 1 \quad (3.122)$$

et similaire pour les termes visqueux dans les composantes  $y$  et  $z$  de l'équation de Navier-Stokes. La simplification

$$\eta \nabla^2 \vec{u} \approx \eta \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \quad (3.123)$$

du terme visqueux est donc justifiée par l'inégalité  $l/L \ll 1$ . Comme  $u/l \sim U/L$ , les trois termes non-linéaires d'inertie ont toujours le même ordre de grandeur, soit

$$\left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_x \right] = \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_y \right] = \frac{\rho U^2}{L}, \quad \left[ \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_z \right] = \frac{\rho U u}{L}$$

On souhaite savoir sous quelle hypothèse ces termes non-linéaires sont négligeables devant le terme visqueux, sous quelles hypothèses la viscosité domine. Il suffit d'exprimer l'inégalité voulue

$$\left[ \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u_x \right] \ll \left[ \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \Leftrightarrow \frac{\rho U^2}{L} \ll \frac{\eta U}{l^2} \Leftrightarrow \frac{Ul}{\nu} \ll \frac{L}{l} \quad (3.124)$$

similaire selon  $y$  et  $z$ . Ici  $\nu = \eta/\rho$  est la viscosité cinématique et on identifie donc une hypothèse nécessaire qui permet, si elle est satisfaite, d'ignorer les termes non-linéaires.

★ **Hypothèse 2 : viscosité domine inertie.** Le terme non-linéaire a un poids négligeable devant le terme visqueux tant que

$$Re = \frac{Ul}{\nu} \ll \frac{L}{l} \quad (3.125)$$

Ce nombre de Reynolds doit donc rester faible devant le rapport d'aspect  $L/l \gg 1$ . ■

Cette condition semble différente de celle formulé pour définir le régime de Stokes, où il fallait  $Re \ll 1$ , mais ceci dépend forcément de la définition de ce nombre de Reynolds. On peut par contre remarquer qu'avec  $U \sim uL/l$  on peut réécrire la condition (3.125) comme

$$Re_* = \frac{ul}{\nu} \ll 1 \quad (3.126)$$

Ce nombre de Reynolds alternatif, basé sur la vitesse lente et l'échelle spatiale courte, doit être inférieur à 1 comme dans la condition nécessaire du régime de Stokes.

Il reste le terme d'accélération qui sera non-nul lorsque l'écoulement est instationnaire. Celui-ci s'ignore également devant le terme visqueux si

$$\left[ \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} \right] \ll \left[ \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \Leftrightarrow \frac{\rho U}{T} \ll \frac{\eta U}{l^2} \Leftrightarrow \frac{l^2}{\nu T} \ll 1 \quad (3.127)$$

similaire pour les autres composantes  $y, z$ . L'hypothèse nécessaire pour ignorer le terme instationnaire est la suivante.

★ **Hypothèse 3 : viscosité domine accélération.** Le terme d'accélération a un poids négligeable devant le terme visqueux tant que

$$N = \frac{l^2}{\nu T} \ll 1 \quad (3.128)$$

Physiquement, cette inégalité exprime que la longueur  $l$  courte est bien plus courte que  $\sqrt{\nu T}$  la longueur diffusive.

Regardons un instant ce qui reste de nos équations avec ces 3 hypothèses :

$$0 \approx \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{P/L} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}_{\eta U/l^2}, \quad 0 \approx \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{P/L} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}}_{\eta U/l^2}, \quad 0 \approx \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial z}}_{P/l} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{\eta u/l^2} - \rho g \quad (3.129)$$

Le terme visqueux n'a finalement pas d'importance dans la projection selon  $z$  et pour le comprendre, il suffit d'estimer  $P$ , en égalisant l'ordre de grandeur

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \left[ \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \Leftrightarrow \frac{P}{L} = \frac{\eta U}{l^2} \quad \text{soit donc} \quad P = \frac{\eta U L}{l^2} \quad (3.130)$$

Si on utilise cette échelle dans la projection selon  $z$  alors on voit que

$$\left[ \eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \ll \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \right] \Leftrightarrow \frac{\eta u}{l^2} \ll \frac{\eta UL}{l^3} \Leftrightarrow \frac{\eta U}{lL} \ll \frac{\eta UL}{l^3} \Leftrightarrow \frac{l^2}{L^2} \ll 1 \quad (3.131)$$

Le terme visqueux joue donc un rôle négligeable dans la projection selon  $z$  sous l'hypothèse 1, que  $l \ll L$ . Ceci nous a conduit au modèle de lubrification recherché.

★ **Modèle de lubrification.** Sous les hypothèses

$$\frac{l}{L} \ll 1, \quad \frac{Ul}{\nu} \ll \frac{L}{l}, \quad \frac{l^2}{\nu T} \ll 1 \quad (3.132)$$

le système fluide qui est spatialement contraint dans la direction  $z$  et soumis à la gravité est bien décrit par le modèle de lubrification

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}_{\perp} p + \eta \frac{\partial^2 \vec{u}_{\perp}}{\partial z^2} \quad (3.133a)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (3.133b)$$

Ici  $\vec{\nabla}_{\perp}$  est le gradient dans la direction horizontale et  $\vec{u}_{\perp}$  la vitesse horizontale. ■

Les équations obtenues ici suggèrent que la pression est dans un équilibre hydrostatique. L'écoulement horizontal semble contrôlé par un problème de Stokes. Dans les TD 5 et 6 on étudiera plusieurs écoulements de lubrification dans des situations géométriquement un peu différentes.

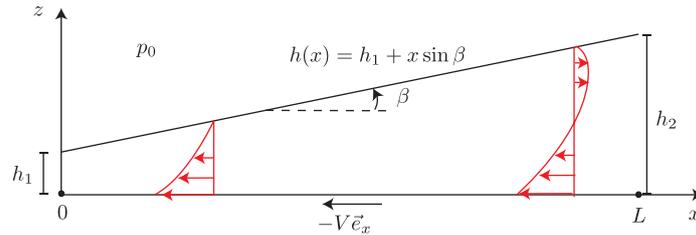


FIGURE 3.14 – On cherche à calculer la force de sustentation que l'écoulement exerce sur une feuille qui glisse sur une fine couche d'air selon un angle  $\beta$  supposé faible.

### 3.5.3 Force de sustentation d'une feuille

Comme application, on calcule la force de sustentation qui s'exerce sur une feuille qui glisse sur une fine couche d'air (exemple tiré du livre "Hydrodynamique physique"). On ignore la gravité et on suppose une invariance selon  $y$ . On se place dans le repère attaché à la feuille qui se déplace à la vitesse  $V$  constante dans la direction  $x$ . La feuille est assimilée à un plan incliné qui fait un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale. Coté droite, la feuille atteint la hauteur  $h_2$  et coté gauche,  $h_1 < h_2$ . On note

$$h(x) = h_1 + x\beta \quad (3.134)$$

la hauteur partout et avec  $x \in [0, L]$ ,  $h_2 = h_1 + \beta L$ . Le modèle de lubrification adapté à la situation est

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (3.135a)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.135b)$$

La deuxième équation indique que la pression  $p = p(x)$  ne varie que selon  $x$  au premier ordre. Ainsi, nous pouvons intégrer la première équation selon  $z$  et obtenir

$$u_x = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} z^2 + Az + B \quad (3.136)$$

Les constantes d'intégration  $A = A(x)$ ,  $B = B(x)$  peuvent encore dépendre de  $x$  et on les fixe en imposant les conditions aux limites en haut et en bas.

$$u_x|_{z=0} = -V \quad , \quad u_x|_{z=h} = 0 \quad (3.137)$$

On obtient finalement

$$u_x = \left( \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \right) z^2 + \left( \frac{V}{h} - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} h \right) z - V. \quad (3.138)$$

Remarquons que ce profil de vitesse correspond à la somme d'un écoulement de Poiseuille et de Couette. Le débit volumique à travers une section transverse se conserve, c'est-à-dire

$$Q = \int_0^{h(x)} u_x dz = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx} - \frac{Vh}{2} \quad (3.139)$$

est indépendant de  $x$ . Ceci donne l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta \left( \frac{2Q}{h^3} + \frac{V}{h^2} \right) \quad (3.140)$$

qui s'intègre assez facilement si on remarque que  $dh/dx = \beta$ , soit  $dx = \beta^{-1}dh$ . En effet, on en déduit que

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\eta}{\beta} \left( \frac{2Q}{h^3} + \frac{V}{h^2} \right) \quad (3.141)$$

dont la solution est

$$p = \frac{6\eta}{\beta} \left( \frac{Q}{h^2} + \frac{V}{h} \right) + C \quad (3.142)$$

La constante  $C$  ainsi que le débit  $Q$  se calculent en exprimant que la pression vaut la pression atmosphérique,  $p = p_0$ , des deux cotés de la feuille, pour  $h = h_1$  ( $x = 0$ ) et  $h = h_2$  ( $x = L$ ). On trouve

$$Q = -V \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad , \quad C = p_0 - \frac{6\eta V}{\beta(h_1 + h_2)} \quad (3.143)$$

La pression sous la feuille vaut

$$p = p_0 + \frac{6\eta V}{\beta} \left( -\frac{1}{(h_1 + h_2)} + \frac{1}{h} - \frac{h_1 h_2}{h^2(h_1 + h_2)} \right) \quad (3.144)$$

et dépasse donc la pression atmosphérique sous la feuille, si  $\beta > 0$ . Cette surpression est l'origine de la force de sustentation dirigée vers le haut. On calcule cette force comme

$$\begin{aligned} \vec{F}_{sus} &= \vec{e}_z L_* \int_0^L (p - p_0) dx = -\frac{L_*}{\beta} \int_{h_1}^{h_2} (p - p_0) dh \\ &= \frac{6\eta V L_*}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right) - 2 \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2} \right] \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.145)$$

où  $L_*$  est la largeur transverse (selon  $y$ ). Il est possible de calculer la force de friction exercée par les contraintes visqueuses à l'aide de la formule

$$\vec{F}_{fric} \approx \int_0^L \eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=h} dx \vec{e}_x \quad (3.146)$$

Dans la même limite  $\beta \rightarrow 0$  petit mais  $h_2/h_1$  pas forcément très petit, cette force de friction croit seulement comme  $\beta^{-1}$  et elle sera donc bien moins importante que la force de sustentation. Ceci explique pourquoi la feuille glisse avec très peu de friction sur la couche d'air.

Le principe de la force de sustentation visqueuse est utilisée dans de nombreuses applications. Les coussins d'air, cf. figure 3.15-(a) permettent de transporter des charges très lourdes. Dans ces systèmes, un gaz est envoyé à haute pression sous le cousin d'air sous laquelle il se réalise un écoulement de lubrification qui cause une force de sustentation. Très probablement vous avez un jour joué au jeu de "air hockey", cf. figure 3.15-(b). De l'air est ventilé par des petits trous dans la table et ceci crée le cousin d'air sous le palet, qui peut alors se déplacer très facilement car il y a très peu de friction.

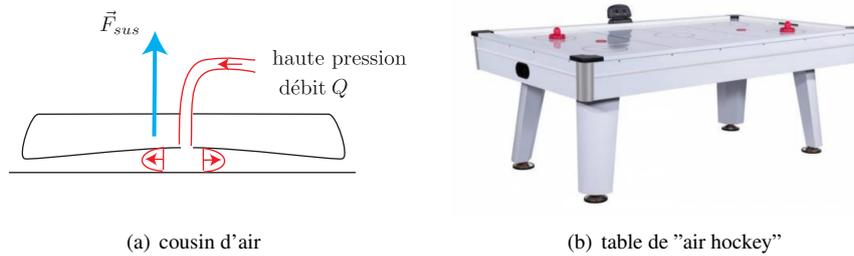


FIGURE 3.15 – Les écoulements dans le régime de lubrification et la force de sustentation est utile dans de nombreuses applications. En (a) on schématise un cousin d'air capable de faciliter le transport de charges très lourdes. En (b) on voit une table de air hockey, en vente libre chez Jeux Michel JEBY.

## 3.6 Écoulement à grand $Re$ : couches limites

### 3.6.1 Phénoménologie

Dans la plupart des écoulements macroscopiques, le nombre de Reynolds est grand, facilement au delà de  $Re \gg 10^5$ . A grand nombre de Reynolds, les forces visqueuses vont uniquement pouvoir peser dans la balance des forces si l'écoulement varie rapidement, sur des échelles spatiales fines où il est possible d'avoir

$$\text{termes d'inertie} \sim \text{termes visqueux} \quad (3.147)$$

Dans un régime turbulent, de forts gradients de vitesse se forment spontanément et c'est bien la viscosité qui dissipe l'énergie de cet écoulement turbulent.

Une situation plus simple dans laquelle un fort gradient de vitesse se développe est celle des couches limites. On imagine un objet solide en contact avec un fluide en mouvement, typiquement un vélo, voiture ou avion qui se déplacent dans l'air, ou un bateau dans l'eau. Le fluide va avant tout chercher à contourner l'obstacle, un peu comme un fluide parfait sans viscosité le ferait. Par contre, là où l'écoulement parfait pouvait glisser sur la surface de l'obstacle, cela n'est plus possible avec un fluide visqueux. Le fluide visqueux doit adhérer. En pratique, on observe que l'adaptation de la vitesse tangentielle du fluide à celle de la paroi se fait sur une fine couche au voisinage immédiat de la surface, la couche limite. Ces situations de couches limites arrivent tellement fréquemment dans les écoulements que leur étude définit un pan entier de la mécanique des fluides. Quelques exemples :

- Couche de Stokes : Un écoulement de faible amplitude (onde) oscillant à fréquence  $\omega$  proche d'une paroi développe une couche limite linéaire d'épaisseur  $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$ .
- Couche d'Ekman : Couche limite linéaire sous l'influence de force de Coriolis, sous l'influence d'une rotation rapide globale  $\Omega$ .
- Couche de Stewartson : Couche limite linéaire qui se forme entre deux anneaux de liquide qui tournent à des vitesses légèrement différentes.
- Couche de Blasius : Couche limite non-linéaire qui se forme au dessus d'une plaque plane semi-infinie au repos. L'épaisseur varie de manière auto-similaire le long de la plaque
- Couche de Karman : Couche limite non-linéaire auto-similaire qui se forme au dessus d'une plaque plane semi-infinie en rotation.

Les couches limites ne sont pas uniquement présentes dans les fluides, on les trouve aussi dans des applications électromagnétique ou thermique ou ... A chaque fois, il s'agit d'une zone fine où le champ varie brusquement. Dans cette section, on discute brièvement la couche limite de Stokes et la couche limite de Blasius. Cette dernière fera l'objet du TD6.

### 3.6.2 Couche limite de Stokes

La couche limite de Stokes est une couche limite purement diffusive qui se forme proche lorsqu'un écoulement oscillatoire dans le volume du fluide glisse sur une paroi solide au repos. On imagine une zone liquide entre  $z \in [0 + \infty[$ . On place le mur solide en  $z = 0$  et ce mur est au repos. Sur la paroi, on veut donc

$$\vec{u}|_{z=0} = \vec{0} \quad (3.148)$$

Loin au dessus de la plaque, on imagine l'écoulement oscillant (une onde)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \vec{u} = (Ue^{i\omega t} + c.c.) \vec{e}_x \quad (3.149)$$

Ici  $\omega$  est la fréquence d'oscillation et *c.c.* signifie complexe conjugué.

#### Exercice Couche limite de Stokes.

1. Le problème admet une solution  $\vec{u} = u_x(z, t) \vec{e}_x$ . Donner l'équation satisfaite par  $u_x$ .
2. Trouver la solution du problème.
3. Donner l'échelle spatiale typique sur laquelle une couche de Stokes s'établit.
4. En électromagnétisme, on rencontre une couche similaire à la couche de Stokes? Dans quelle situation?

### 3.6.3 Couche limite de Blasius

La couche limite de Blasius (1907) est une couche limite non-linéaire qui se développe au dessus d'une plaque plane semi-infinie au repos. On imagine la situation idéalisée de la figure (a) ci-dessous :

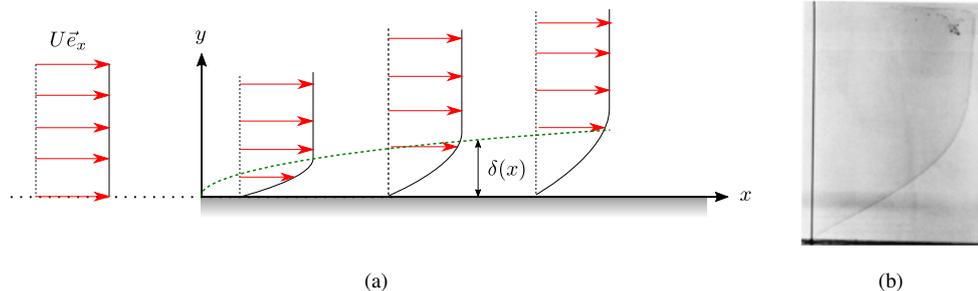


FIGURE 3.16 – Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane. (a) schéma. (b) Visualisation expérimentale (Album of fluid motion, p. 22, van Dyke (1982))

Un écoulement incident uniforme  $U\vec{e}_x$ , rencontre soudainement, en  $x = 0$ , le bord d'une plaque au repos auquel le fluide doit adhérer. Cette plaque est située en  $y = 0$  et s'étend sur l'intervalle  $x \in [0, +\infty[$ . En s'éloignant vers les  $x$  croissants, la couche devient de plus en plus épaisse. On note  $\delta(x)$  cette épaisseur. Pour  $y \rightarrow +\infty$  l'écoulement tend vers l'écoulement uniforme  $U\vec{e}_x$ . On supposera que l'écoulement dans la couche est bidimensionnel et stationnaire. La gravité n'a aucune influence dans ce problème (il ne modifie que la pression), on ne le considère donc pas.

Sous l'hypothèse supplémentaire que la couche limite est fine, on peut dériver le modèle réduit de Prandtl (1904) des équations de Navier-Stokes. Ici, nous mettons en place ce modèle de Prandtl. Mathématiquement, ces réductions ressemblent fortement à ce qu'on a fait pour trouver les modèles de lubrification, sauf que cette fois-ci, on gardera des termes non-linéaires. En TD6, nous allons trouver la couche limite de Blasius qui est une solution auto-similaire de ce modèle. Avec la couche limite de Blasius, nous pouvons calculer une approximation de la force de traînée qu'un liquide peut exercer sur une plaque.

#### Modèle de Prandtl

Nous partons des équations de Navier-Stokes auquel on ajoute l'hypothèse que la hauteur  $\delta$  de la couche limite est toujours petite devant la longueur  $L$  de la plaque, de l'objet avec lequel l'écoulement interagit

$$\text{Hypothèse : } \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (3.150)$$

Comme dans les modèles de lubrification, cela impacte l'ordre de grandeur des différents termes dans les équations et on peut en ignorer quelques uns. Dans le modèle de Prandtl, c'est le système d'équations suivant qui survit cette étape :

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx -\frac{\partial q}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (3.151a)$$

$$0 \approx -\frac{\partial q}{\partial y} \quad (3.151b)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \approx 0 \quad (3.151c)$$

Pour comprendre ces simplifications on estime l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier-Stokes et on compare leurs ordres de grandeur. On utilise

$$\partial_x \sim L^{-1}, \quad \partial_y \sim \delta^{-1}, \quad u_x \sim U, \quad u_y \sim V, \quad p/\rho = q \sim Q \quad (3.152)$$

pour estimer les ordres de grandeur. Ci dessous, la procédure de mise en place du modèle réduit de Prandtl, pas par pas.

1. On commence par exprimer les composantes selon  $x$  et  $y$  des équations de Navier-Stokes stationnaire ainsi que l'incompressibilité. On utilisera la pression réduite  $q = p/\rho$  comme variable et la viscosité cinématique  $\nu$  afin de faire disparaître le paramètre  $\rho$  des équations. On note l'ordre de grandeurs des différents termes en dessous.

$$\underbrace{u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}}_{U^2 L^{-1}} + \underbrace{u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}}_{UV \delta^{-1}} = -\underbrace{\frac{\partial q}{\partial x}}_{QL^{-1}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{\nu UL^{-2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}_{\nu U \delta^{-2}} \quad (3.153a)$$

$$\underbrace{u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}}_{UV L^{-1}} + \underbrace{u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{V^2 \delta^{-1}} = -\underbrace{\frac{\partial q}{\partial y}}_{Q \delta^{-1}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}}_{\nu V L^{-2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{\nu V \delta^{-2}} \quad (3.153b)$$

$$\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{UL^{-1}} + \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{V \delta^{-1}} = 0 \quad (3.153c)$$

2. Dans l'équation qui exprime l'incompressibilité du fluide on a deux termes qui doivent être du même ordre :

$$\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{UL^{-1}} \sim \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{V \delta^{-1}} \Rightarrow V \sim U \frac{\delta}{L} \quad (3.154)$$

Avec notre hypothèse  $\delta/L \ll 1$ , on en déduit donc que la vitesse verticale est bien plus petite que la vitesse horizontale, que  $V \ll U$ .

3. Les termes non-linéaires  $u_x \partial_x u_x$  et  $u_y \partial_y u_x$  sont du même ordre. En effet,

$$U^2 L^{-1} \sim U(UL^{-1}) \sim U(V \delta^{-1}) \Rightarrow \underbrace{u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}}_{U^2 L^{-1}} \sim \underbrace{u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}}_{UV \delta^{-1}} \quad (3.155)$$

Pareil pour  $u_x \partial_x u_y$  et  $u_y \partial_y u_y$  qui sont tous les deux d'ordre  $UV L^{-1}$ .

4. Dans les termes visqueux, les dérivées selon  $x$  sont petites devant les dérivées selon  $y$ . En effet

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{\nu U L^{-2}} \ll \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}_{\nu U \delta^{-2}} \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{L^2} \ll 1 \quad (3.156)$$

Pareil dans la composante  $y$  de l'équation. Dans le modèle de Prandtl, on ne garde que les termes  $\nu \partial^2 u_x / \partial y^2$  et terme  $\nu \partial^2 u_y / \partial y^2$ .

5. Dans l'équation selon  $x$ , on peut imaginer que le terme de pression  $\partial_x q$  est du même ordre de grandeur que les termes d'inertie et visqueux. Alors on a

$$Q L^{-1} \sim U^2 L^{-1} \sim \nu U \delta^{-2} \Rightarrow Q \sim U^2 \sim \nu U \delta^{-2} L \quad (3.157)$$

6. Avec de telles pressions, on montre que le terme dominant dans la composante  $y$  sera toujours  $\partial_y p$ . Vérifions d'abord que les termes non-linéaires sont négligeables, c.a.d. est-ce qu'on a

$$\underbrace{u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}}_{U V L^{-1}} \ll \underbrace{\frac{\partial q}{\partial y}}_{Q \delta^{-1}} ? \quad (3.158a)$$

Avec l'estimation pour  $Q \sim U^2$  et puis  $V \sim U \delta L^{-1}$ , on simplifie cela à

$$U V L^{-1} \ll U^2 \delta^{-1} \Rightarrow U^2 \delta L^{-2} \ll U^2 \delta^{-1} \Rightarrow \delta^2 L^{-2} \ll 1 \quad (3.158b)$$

Selon hypothèse  $\delta/L \ll 1$ , (3.158a) est donc bien satisfaite. Testons ensuite si le terme visqueux est négligeable.

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{\nu V \delta^{-2}} \ll \underbrace{\frac{\partial q}{\partial y}}_{Q \delta^{-1}} ? \quad (3.158c)$$

Avec l'estimation pour  $Q \sim \nu U \delta^{-2} L$  et puis  $V \sim U \delta L^{-1}$ , on simplifie cela à

$$\nu V \delta^{-2} \ll \nu U \delta^{-3} L \Rightarrow \nu U \delta^{-1} L^{-1} \ll \nu U \delta^{-3} L \Rightarrow \delta^2 L^{-2} \ll 1 \quad (3.158d)$$

Selon hypothèse  $\delta/L \ll 1$ , (3.158c) est donc aussi satisfaite. Dans le modèle de Prandtl, on ne garde que le terme  $\partial q / \partial y$  dominant.

Si on revient sur le modèle de Prandtl, alors l'équation  $\partial q / \partial y \approx 0$  nous informe que  $q$  ne dépend pas beaucoup de  $y$ , que la pression est constante dans la direction normale à la plaque. Ainsi la pression dans la couche limite doit être égale à celle qui existe au loin pour  $y \rightarrow +\infty$ . On note

$$q(x) = Q(x) \quad (3.159)$$

Cette pression au loin  $Q(x)$  peut éventuellement varier lentement dans la direction  $x$ . On peut également supposer que loin de la paroi, la loi de Bernoulli s'applique, que l'écoulement se comporte comme un écoulement parfait au loin. Alors on a

$$Q(x) + \frac{U(x)^2}{2} = C \quad (3.160)$$

et ainsi il est possible d'exprimer le gradient de pression selon  $x$  comme

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.161)$$

Il suffit donc de connaître l'écoulement non-visqueux loin de la plaque pour connaître la pression dans la couche. Le modèle de Prandtl vient avec trois conditions aux limites. Sur la paroi en  $y = 0$  la vitesse est nulle et au loin, pour  $y \rightarrow +\infty$  la vitesse horizontale doit tendre vers  $U$ . Tout ceci nous amène au final au modèle de Prandtl.

★ **Modèle de Prandtl.** L'écoulement de couche limite au dessus d'une plaque au repos peut être décrit avec le modèle de Prandtl. Dans le fluide situé en  $y \in [0, +\infty]$  on résout

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (3.162a)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \approx 0 \quad (3.162b)$$

et il faut satisfaire les conditions aux limites

$$u_x|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad u_x|_{y \rightarrow +\infty} = U(x) \quad (3.162c)$$

Le champ  $U(x)$  correspond à la vitesse de l'écoulement parfait, loin au dessus de la plaque. ■

### Solution de Blasius (TD6)

Lorsque  $U(x) = U$  uniforme, le système admet une solution auto-similaire. En TD6, nous montrons que cette solution de Blasius dérive d'une fonction de courant, c.a.d.

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.163)$$

avec

$$\psi = \sqrt{U\nu x} \Psi \left( y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) \quad (3.164)$$

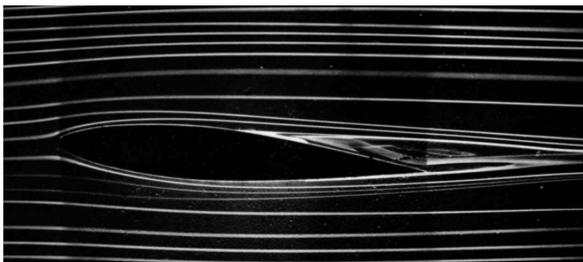
La fonction  $\Psi$  est une fonction qu'on doit calculer numériquement comme la solution du problème

$$2\Psi''' + \Psi\Psi'' = 0 \quad (3.165)$$

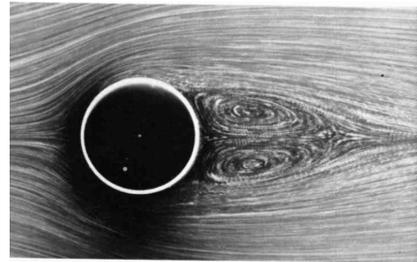
avec les 3 conditions aux limites

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = 0, \quad \Psi'(+\infty) = 1 \quad (3.166)$$

Nous fournissons un notebook Jupyter `Blasius.ipynb` qui explique comment obtenir cette solution numérique par une méthode de shooting. La couche limite est bien de la forme suggérée dans la figure 3.16.



(a)



(b)

FIGURE 3.17 – Décollement de la couche limite sur les faces arrières (a) d'un profil d'aile, (b) d'un cylindre. (ONERA, Album of Fluid Motion)

### 3.6.4 Décollement de la couche limite

Le modèle de Prandtl reste un bon modèle pour décrire des couches limites qui se forment sur des obstacles qui ne sont pas plates. Il suffit que le rayon de courbure de la surface de l'obstacle reste grand devant l'épaisseur de la couche limite. Par contre, sur ces objets réels à la forme courbée, la vitesse  $U(x)$  tangentielle loin au dessus de la couche limite n'est plus toujours constante. Comme l'écoulement doit contourner la structure, il sera décéléré à des endroits et accéléré ailleurs, cf. ce que nous avons vu dans la

théorie des ailes. Ainsi, dans le modèle de Prandtl, il faut admettre que des gradients de la vitesse tangentielle soient présents, qui causent des gradients de pression

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.167)$$

agissent dans la couche limite, modifient la structure de cette couche. On peut étudier numériquement comment ces forces de pression changent localement la forme de la couche limite. Si  $U(x)$  diminue avec  $x$ , le long de la paroi, la force  $-\frac{\partial q}{\partial x}$  sera négative et s'oppose donc à l'écoulement incident. Imaginez-vous un instant ce qui se passe si vous soufflez en direction d'un vent incident. Il suffit de souffler suffisamment fort, pour que le vent incident soit fortement dévié. C'est exactement ce qui se passe lors d'un décollement de la couche limite. Dans la couche limite et les zones où  $U(x)$  décroît selon  $x$ , un écoulement opposé à l'écoulement incident se met en place. Parfois cet écoulement opposé est suffisamment fort pour faire décoller les lignes de courant de l'écoulement incident. Techniquement parlant, on peut trouver que la couche limite voit son épaisseur diverger  $\delta \rightarrow +\infty$  à un endroit particulier  $x$ , le point de détachement. Le modèle de Prandtl cesse alors d'être valide. En pratique, il n'est pas si simple de prédire le point exact où la couche limite décolle, car une fois la couche limite décollée, c'est tout l'écoulement et tout le champ de pression qui est modifié, même loin de l'obstacle.

En figure 3.17, nous montrons deux clichés expérimentaux qui montrent des couches limites décollées sont ici visibles. Sur les faces arrière d'un profil d'aile ou d'un cylindre, on voit que les lignes de courants ne restent plus attachés. Une bulle de recirculation s'est formée.

Dans des applications réelles, le décollement des couches limites cause toujours une augmentation brutale de la force de traînée. Le liquide avançant moins vite sur la face arrière, dans la bulle de recirculation, la pression y sera plus grande et c'est ça qui fait augmenter la force de traînée. Le phénomène de décollement de la couche limite peut aussi se produire sur la surface d'une aile d'avion. Dans ce cas, le décollement est rapidement suivi d'une transition à la turbulence. Nous avons non-seulement une forte augmentation de la force de traînée, mais aussi une nette diminution de la force de portance. Ainsi, le décollement de la couche limite sur les ailes d'avions est responsable du phénomène de décrochage, une cause notoire d'accidents aériens.

### 3.7 Ecoulements à grand Re : instabilités et turbulence

Dans les précédentes sections, nous nous sommes amusés à trouver des solutions du modèle de Navier-Stokes ou de modèles réduits. Dans le meilleur des cas, on trouve un bon modèle physique qui décrit bien l'écoulement réel. Par contre, il n'est pas exclu que l'écoulement qui se réalise dans une expérience sera totalement différent de l'écoulement que nous avons pu calculer. Un milieu liquide est par définition très déformable et ça coûte très peu d'énergie au fluide de tester d'autres possibilités pour s'écouler. Le résultat est bien connu, la plupart des écoulements à grand Re ne va pas du tout couler la vie douce ! A grand Re, un écoulement laminaire à l'instant initial va très rapidement devenir instable et transitera à la turbulence. L'étude de cette transition et de cette turbulence a intrigué des générations de mécaniciens des fluides et ça continue toujours, car il s'agit d'une problématique assez complexe. Si vous décidez de continuer vos études dans les fluides, alors attendez-vous à trouver des cours sur les instabilités hydrodynamiques et sur la turbulence. Ici, on n'a plus l'espace-temps pour y consacrer de nombreuses pages.

#### 3.7.1 Les instabilités

Les instabilités ont beaucoup fasciné les physiciens pour une raison très simple. Un écoulement ou état parfaitement possible, devient tout d'un coup totalement différent. Souvent, ces changements d'états spontanés vont ensemble avec la création de très jolis motifs qui ne demandent qu'à être expliqués. Quelques exemples classiques.

##### Instabilité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille, expérience de Reynolds

L'expérience de Reynolds est peut-être l'expérience la plus classique sur les instabilités hydrodynamiques. Comme le montre la figure 3.18, un fluide est poussé à travers un tube cylindrique transparent. Grâce à un fin filet d'encre, Reynolds réussit à montrer qu'il existe un régime laminaire qui devient instable au-delà d'un certain nombre de  $Re = UR/\nu$  critique :  $Re > Re_c$ . Ce nombre portera par la suite son nom. Contrairement à ce qu'on peut croire, l'origine de cette instabilité n'a absolument rien d'évident et il a fallu attendre les années 2010, pour disposer d'outils théoriques quantitatives (stabilité non-linéaire, solutions non-linéaires

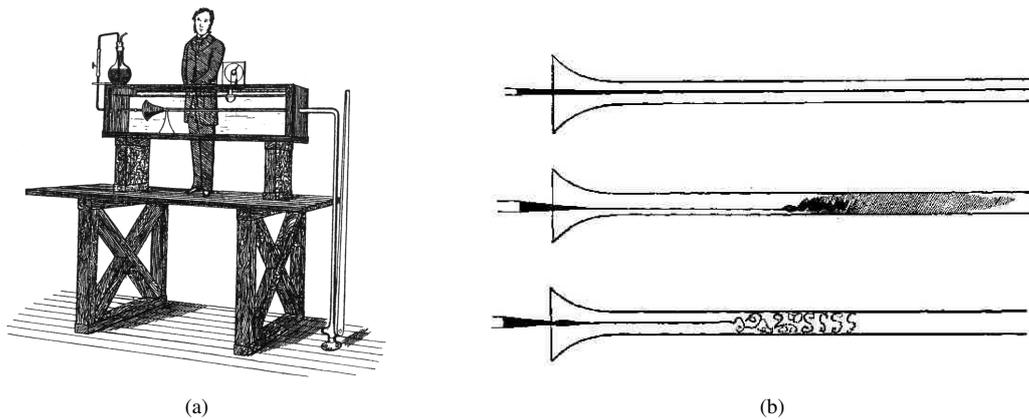


FIGURE 3.18 – Expérience de Reynolds (Source Wikipédia)

exactes) afin de caractériser ces instabilités sous-critiques. Le nombre  $Re_c$  n'est pas fixe, mais dépend du niveau de bruit dans l'expérience. La transition à la turbulence n'a pas toujours lieu au delà du même  $Re_c$ , cela dépend de la qualité de l'expérimentateur (et de l'atelier technique qui l'accompagne).

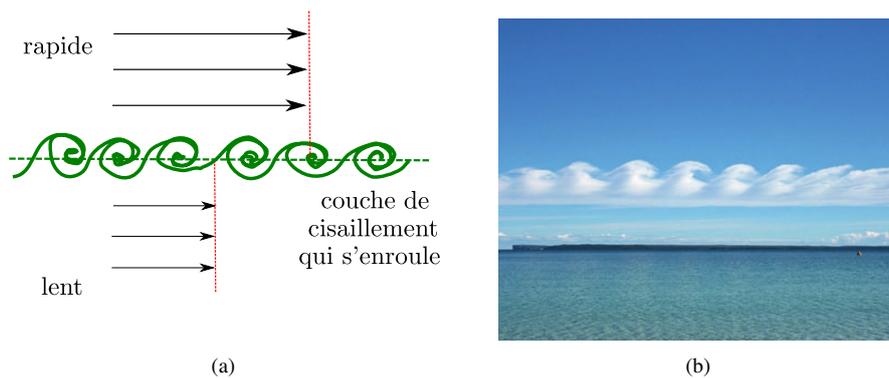


FIGURE 3.19 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz. (a) Lorsque un écoulement parallèle change brusquement de vitesse, il se forme une couche de cisaillement ou couche de vorticité. Cette couche peut perdre sa stabilité et forme une allée tourbillonnaire. (b) Parfois on peut apercevoir l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans l'atmosphère si des nuages sont advect s par les tourbillons.

### Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est un autre grand classique des instabilités hydrodynamiques. Cette instabilité se manifeste dans les écoulements parallèles qui présentent des couches de cisaillement. Comme le montre la figure 3.19, une couche de cisaillement est une région où la vitesse change brusquement d'intensité. Localement, dans la couche de cisaillement, on imagine assez facilement comment des parcelles de fluides tournent (ici sens horaire) et parfois on parle de couche de vorticité au lieu de couche de cisaillement. Dans tous cas, cette couche se déstabilise par la fameuse instabilité de Kelvin-Helmholtz pour créer une allée tourbillonnaire de vortex corotatifs. La vidéo [suivante](#)<sup>1</sup> par G. Worster (DAMTP, Cambridge University) montre un dispositif expérimental qui réalise l'instabilité avec une combinaison d'eau salée et d'eau normale. On y voit clairement l'apparition rapide et spontanée des tourbillons, suivie d'un mélange très rapide.

### Instabilité centrifuge

Lorsqu'on place un liquide entre deux cylindres co-axiaux qui tournent à des vitesses différentes, il se forme un écoulement de Taylor-Couette. Il existe toujours un état de base où l'écoulement est purement

1. Cliquer sur le lien dans la version pdf du cours

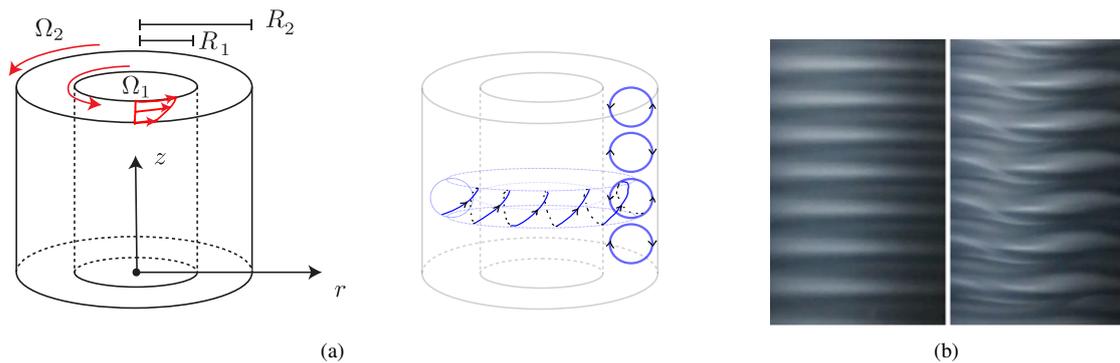


FIGURE 3.20 – Instabilité de Taylor-Couette. (a) L'écoulement azimutal entre deux cylindres co-axiaux en rotation différentielle est instable par l'instabilité centrifuge. Proche du seuil de l'instabilité, il se forme des cellules dans la direction verticale. (b) Vue expérimentale de côté (Advanced labs) à l'aide de particules réfléchissantes.

azimutal et on l'a calculé auparavant. Par contre, selon la direction et l'intensité des vitesses de rotation des cylindres, l'état de base peut être stable ou instable. Dans le cas instable, l'écoulement ne restera pas azimutal. Il se réorganisera spontanément pour former des rouleaux dans la direction verticale, comme le suggère la figure 3.20-(a). Ces rouleaux vont ensuite se déstabiliser eux mêmes pour donner lieu à des motifs de plus en plus complexes comme le montre le panneau (b).

La vidéo [suivante](#) montre comment l'instabilité centrifuge se manifeste et donne lieu à des écoulements divers lorsque le cylindre intérieur tourne de plus en plus vite avec un cylindre extérieur au repos. Aujourd'hui on peut également simuler numériquement cet écoulement afin de produire des visuels sympas, cf. la vidéo [suivante](#), d'Adrien Kummerländer (KIT, Karlsruhe).

### Etudier les instabilités hydrodynamiques

Pour étudier les instabilités hydrodynamiques, on dispose de plusieurs techniques. La méthode la plus classique est celle de l'analyse de stabilité linéaire. Cette méthode est enseignée dans le cours de physique non-linéaire du M1. On définit un état de base, un équilibre, puis on écrit les équations linéaires pour les perturbations de cet état. S'il existe des solutions qui croissent en temps ou en espace, l'état de base est linéairement instable et alors on peut s'attendre à que l'écoulement se reconfigure dans un autre état. En pratique, on s'intéressera alors à identifier des paramètres critiques au delà duquel le système devient instable, puis à identifier les structures qui vont apparaître.

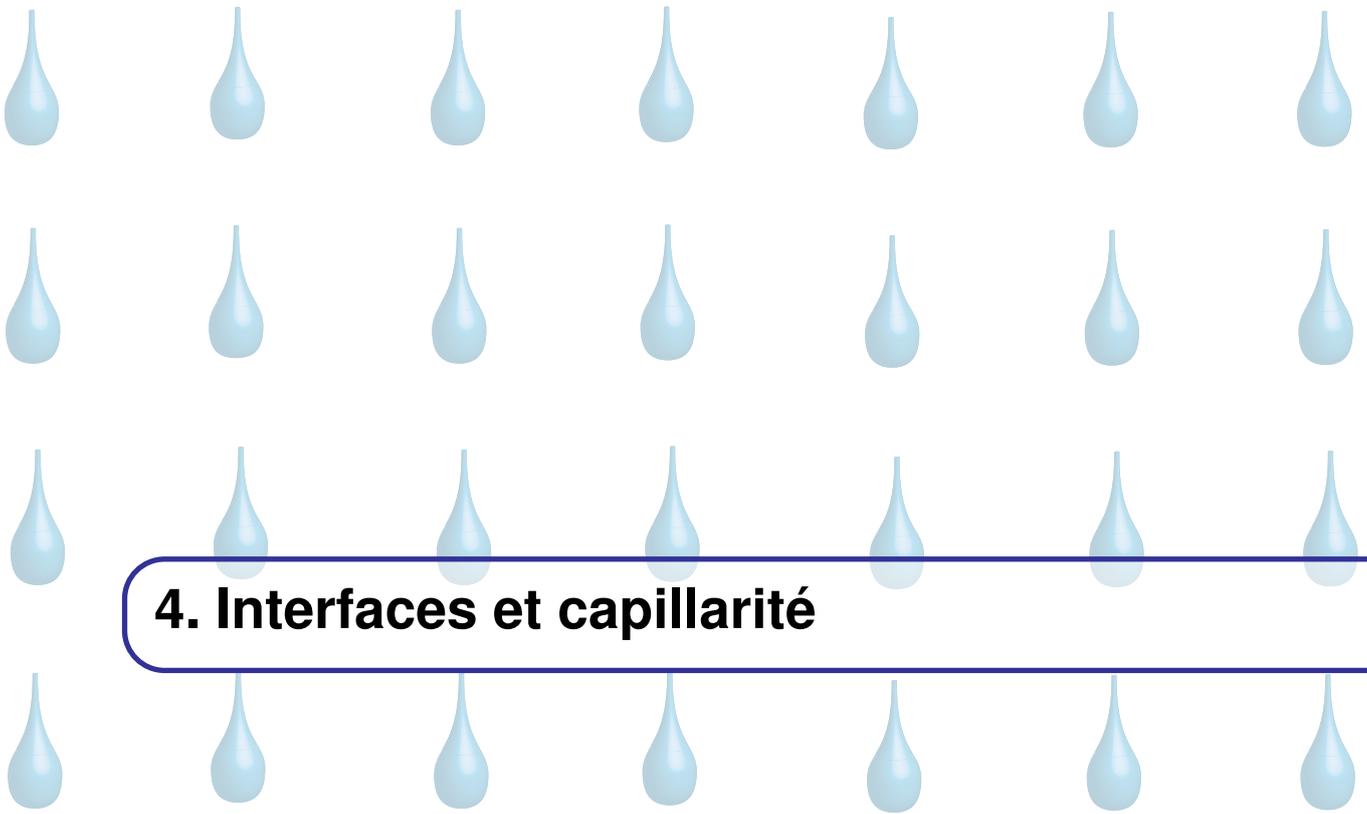
### 3.7.2 La turbulence

Quasiment tous les écoulements deviennent turbulents à grand Reynolds et la description de cet état désordonné du mouvement n'a évidemment rien de simple. Par contre, une bonne compréhension de la turbulence est certes désirable car elle affecte la plupart des écoulements réels.

Pour modéliser la turbulence, on doit changer radicalement d'approche. Face à la complexité immense de l'écoulement, on abandonne l'idée qu'on peut tout connaître sur celui-ci. On s'intéressera aux propriétés statistiques de ces écoulements, sous la forme de fonctions de corrélation, de distributions de probabilité, de spectres dans l'espace de Fourier, ... Le modèle de Navier-Stokes est toujours en arrière plan des théories de turbulence, mais trop détaillé pour permettre de grandes avancées exactes. Souvent les chercheurs en turbulence prennent la liberté de travailler sur des modèles simplifiés pour poser leur raisonnement physiques.

Dans les codes numériques qui sont utilisés pour simuler les écoulements industriels, on utilise des modèles de turbulence. Sans ces modèles, on est complètement incapable de prédire l'allure d'un écoulement autour d'un avion ou d'une voiture, simplement parce qu'on ne dispose pas de suffisamment de degrés de liberté pour représenter toute la complexité d'un écoulement turbulent. Le modèle le plus simple pour la turbulence va modéliser l'effet de la turbulence comme une viscosité turbulente. Un peu comme le mouvement Brownien arrive à expliquer la diffusion, on théorise ici comment les mouvements aléatoires (turbulents) à fine échelle induisent une diffusion effective de la quantité de mouvement moyenne.





## 4. Interfaces et capillarité

*Lorsque deux milieux fluides non miscibles sont en contact il se forme une interface entre eux. Dans ce chapitre on décrit les conditions spécifiques de saut qu'il faudra prendre en compte pour décrire cette situation. Ensuite on étudie quelques applications statiques et dynamiques.*

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Hypothèses simplificantes

Dans de nombreuses situations, plusieurs milieux continus peuvent être en contact. A l'endroit de ces interfaces, il peut y avoir des phénomènes d'échange complexes. Dans ce chapitre, on adopte plusieurs hypothèses

1. Il ne peut pas y avoir d'accumulation de masse à l'interface (pas d'inertie ou écoulement de surface).
2. Il n'y a pas de transferts de masse à travers l'interface (pas d'échange réactifs ou changement de phase).
3. Les deux milieux continus en contact sont non miscibles (pas de mélange binaire).

Si ces trois hypothèses sont satisfaites, l'interface se déforme sans inertie, comme une surface matérielle. Elle est alors imperméable et elle exerce une force sur le fluide à travers la tension de surface.

#### 4.1.2 Définition mathématique d'une surface

##### Surface paramétrisée

Mathématiquement on peut définir une surface de différentes manières. Un premier choix consiste à localiser la surface par un vecteur position qui dépend de deux paramètres, par exemple  $a$  et  $b$ , qui varient dans des intervalles  $I_a, I_b$  connues. Dans ce cas

$$\vec{r} \in S : \vec{r} = \vec{r}(a, b) = x(a, b)\vec{e}_x + y(a, b)\vec{e}_y + z(a, b)\vec{e}_z \quad , \quad (a, b) \in I_a \times I_b \quad (4.1)$$

localise l'interface  $S$ . Cette paramétrisation est utile car elle nous permet d'accéder à la différentielle de surface

$$d\vec{S} = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} da db, \quad (4.2)$$

utile pour le calcul d'intégrales de surface.

### Surface définie par une fonction

Une autre option que l'on préférera dans ce chapitre, consiste à définir la surface à l'aide d'une fonction scalaire  $f$  qui, par définition, doit s'annuler à l'endroit de la surface.

#### ★ Fonction qui fixe une surface.

$$\vec{r} \in S \quad \text{si} \quad f(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.3)$$

Deux exemples concrets de telles fonctions sont

$$\text{(hauteur d'un plan d'eau déformée)} \quad : \quad f(x, y, z, t) = -z + H(x, y, t) \quad (4.4a)$$

$$\text{(rayon sphérique d'une goutte d'eau déformée)} \quad : \quad f(r, \theta, \phi, t) = -r + R(\theta, \phi, t) \quad (4.4b)$$

Gardons à l'esprit cependant qu'un choix particulier de  $f$  limite les formes accessibles. Avec  $z = H(x, y, t)$  il est impossible de décrire les vagues déferlantes qui, pour une position donnée  $x$ , peut avoir plusieurs valeurs de  $H$  (creux et pointe de la vague).

### Normale unitaire

La fonction  $f$  permet de calculer une normale unitaire  $\vec{n}$  à la surface. Comme la surface  $S$  est une iso-surface ( $f = 0$ ) de la fonction  $f$ , le gradient  $\vec{\nabla}f$  est nécessairement perpendiculaire à  $S$ . En conséquence on a la formule suivante.

#### ★ Normale unitaire sur une surface.

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{\nabla}f}{\|\vec{\nabla}f\|} \quad (4.5)$$

Le signe doit être choisi astucieusement pour pointer dans le sens voulu. Pour les deux exemples donnés ci-dessus, les normales unitaires sont données par

$$\text{(plan d'eau déformée)} \quad : \quad \vec{n} = \frac{\vec{e}_z - \vec{\nabla}H}{\sqrt{1 + \|\vec{\nabla}H\|^2}} \quad (4.6a)$$

$$\text{(goutte d'eau déformée)} \quad : \quad \vec{n} = \frac{\vec{e}_r - \vec{\nabla}R}{\sqrt{1 + \|\vec{\nabla}R\|^2}} \quad (4.6b)$$

### Courbure

La connaissance de la normale unitaire donne accès à une grandeur importante dans la description des phénomènes capillaires : la courbure locale d'une surface.

#### ★ Courbure locale d'une surface.

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \quad (4.7)$$

Souvent on introduit la courbure d'une surface, pas par la formule précédente, mais plutôt par deux rayons de courbure principaux :

$$\kappa = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.8)$$

On imagine ces deux rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  comme les rayons de deux cercles tangents à la surface qui sont perpendiculaires à l'endroit (\*) où on souhaite connaître la courbure. Quelques exemples où cette formule peut servir sont donnés sur la figure 4.1. Le cas d'une sphère de rayon  $R$  (schéma (a)) est le plus

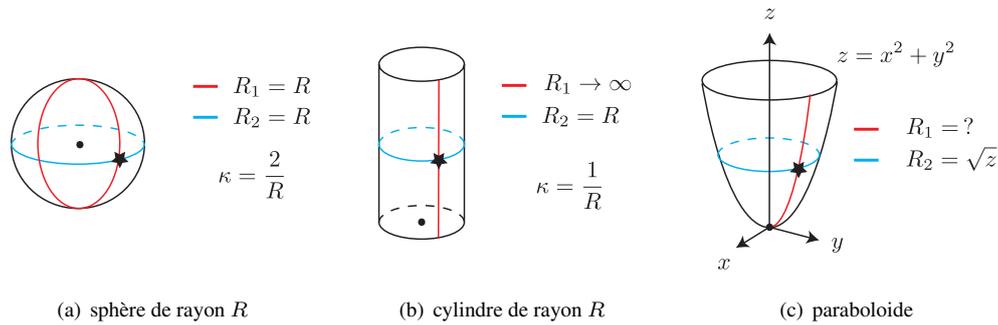


FIGURE 4.1 – Rayons de courbures principales  $R_1$  et  $R_2$  et courbure  $\kappa$  à l'endroit  $\star$  de plusieurs surfaces simples.

simple, car les deux rayons de courbure sont forcément identiques au rayon de la sphère,  $R_1 = R_2 = R$ . La courbure d'une sphère de rayon  $R$  vaut donc

$$(\text{sphère de rayon } R) : \kappa = \frac{2}{R} \quad (4.9)$$

et ce en tout point de la surface de la sphère. Dans le cas d'une surface cylindrique de rayon  $R$  (schéma (b)), le rayon de courbure  $R_1 \rightarrow +\infty$  car le cercle (rouge en version pdf) correspond à un cercle de rayon infini. Pour le deuxième rayon de courbure, on a  $R_2 = R$  simplement. La courbure d'une surface cylindrique de rayon  $R$  vaut donc

$$(\text{cylindre de rayon } R) : \kappa = \frac{1}{R} \quad (4.10)$$

et ce en tout point de la surface cylindrique. Le dernier cas du paraboloïde (schéma (c)), illustre que, mise à part ces deux premiers cas de la sphère et du cylindre, la formule classique (4.8) pour calculer  $\kappa$  n'est pas très pratique. De manière générale, il est préférable de savoir manier la formule (4.7), qui est bien plus explicite.

Illustrons donc la formule (4.7) sur les exemples précédents. Pour le plan d'eau déformé et localisé par  $f = -z + H(x, y, t) = 0$ , on obtient

$$(\text{plan d'eau déformée}) : \kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{\nabla} H}{\sqrt{1 + \|\vec{\nabla} H\|^2}} \right) \quad (4.11)$$

Si cette surface est invariante selon  $y$ , alors  $H = H(x, t)$ . La formule pour la courbure se simplifie à

$$(\text{plan d'eau déformée, invariant selon } y) : \kappa = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-\partial_x H}{\sqrt{1 + (\partial_x H)^2}} \right) = \frac{-\partial_{xx}^2 H}{(1 + (\partial_x H)^2)^{3/2}} \quad (4.12)$$

On termine cette discussion avec un point d'attention. Le signe de  $\kappa$  dépend toujours du signe de  $\vec{n}$  qui est à choisir par l'utilisateur. Il est important de vérifier que le signe choisi reproduit la bonne physique car ceci aura un impact sur l'écoulement à travers la loi de Young-Laplace.

**Exercice** Retrouver la formule pour la courbure  $\kappa$  de la sphère ( $\kappa = 2/R$ ) et de la goutte déformée en utilisant la formule

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 n_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta n_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial n_\phi}{\partial \phi}. \quad (4.13)$$

puis en remplaçant  $\vec{n} = \vec{e}_r$  pour la sphère et  $\vec{n} = \dots$  trouvé plus haut pour la goutte déformée. Une fois cette divergence calculée, n'oubliez pas d'exprimer la formule sur la surface, c'est-à-dire pour  $r = R$  ou  $r = R(\theta, \phi, t)$ , selon le cas étudié. ■

## 4.2 La tension de surface

### 4.2.1 Energie potentielle de surface

La création d'une interface entre deux milieux fluides immiscibles a un coût énergétique car les deux milieux préfèrent ne pas se rencontrer. Cette dépense énergétique peut être exprimée à l'aide de la tension de surface, notée  $\gamma$  que l'on suppose constante.

★ **Energie potentielle de surface.** La tension de surface  $\gamma$  multipliée par la superficie  $S$  de l'interface entre deux milieux immiscibles définit une énergie (potentielle) de surface

$$E_\gamma = \gamma S \quad (4.14)$$

L'unité pour la tension de surface est  $N/m$  et une valeur typique pour une interface eau-air à température ambiante est environ  $\gamma = 7 \times 10^{-2} N m^{-1}$ . Dans le cas d'un film de savon, on a deux interfaces air-liquide, des deux cotés du film. Dans ce cas, on aura  $E_\gamma = 2\gamma S$ .

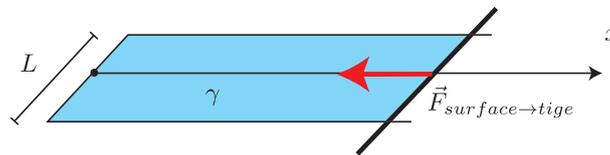


FIGURE 4.2 – On imagine une portion d'interface tenue par un rectangle dont un côté est une tige mobile. Pour maintenir ce système en équilibre, il faut appliquer une force sur la tige d'intensité  $\gamma L$  avec  $L$ , la longueur de la tige et  $\gamma$  la tension de surface.

### 4.2.2 Force capillaire

#### Force capillaire sur un segment droit

Pour mieux comprendre l'origine du vocabulaire *tension* de surface, on imagine le dispositif de la figure 4.2, dans lequel on imagine une surface tendue sur un dispositif rectangulaire avec d'un côté, une tige mobile de longueur  $L$ . La surface tendue à un coût énergétique que le système cherche naturellement à réduire ce qui génère une force de tension sur la tige. Dans ce dispositif, on peut paramétrer l'aire de la surface  $S(x) = xL$ . Avec l'énergie potentielle de surface, on peut définir une force conservative (on rappelle qu'une force conservative dérive d'un potentiel) telle que

$$\vec{F}_{surface \rightarrow tige} = -\vec{\nabla} E_\gamma = -\gamma L \vec{e}_x \quad (4.15)$$

On remarque immédiatement que cette force a la bonne direction selon  $-\vec{e}_x$ . On remarque aussi que contrairement à un ressort, il s'agit d'une force constante, indépendante de  $x$  : la force dépend uniquement de la tension  $\gamma$  et de la longueur du tige.

#### Force capillaire sur un contour arbitraire (intégrale curviligne)

On considère maintenant la situation plus générale, illustrée sur la figure 4.3. Sur une interface de forme quelconque, on délimite une portion  $S$  par un contour  $C$  fermée et on cherche à calculer la force capillaire que l'interface extérieure à  $S$  exerce sur ce contour  $C$ .

Comme le suggère le schéma, chaque bout infinitésimal du contour ajoute une contribution  $d\vec{F}_C$ , toujours tangentielle à la surface à l'endroit de  $C$  et toujours orienté vers l'extérieur de  $S$ . En intensité, cette force doit être égale à  $\gamma dl$  avec  $dl = \|d\vec{r}\|$  l'élément de longueur. Avec  $d\vec{r}$ , l'élément de ligne le long de  $C$  et  $\vec{n}$  la normale unitaire à  $S$  sur le contour, on écrit que  $d\vec{F}_C = \gamma d\vec{r} \times \vec{n}$ . Attention ici à bien corrélérer le sens de  $\vec{n}$  et  $d\vec{r}$  par le règle de la main droite. En intégrant sur tout le contour, on aboutit à la formule suivante.

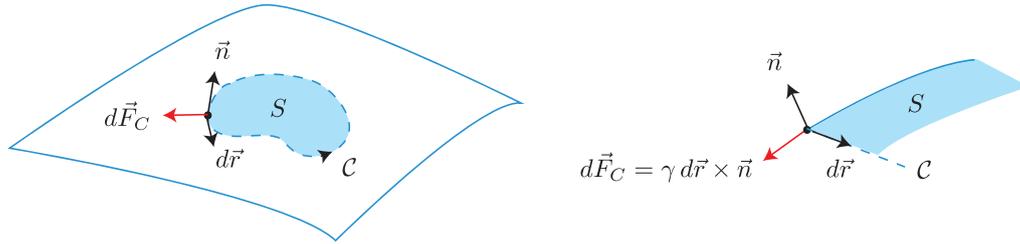


FIGURE 4.3 – La force capillaire que l'interface exerce sur le contour  $C$  de la portion d'interface  $S$  se calcule comme une intégrale curviligne qui somme des contributions infinitésimales  $\gamma d\vec{r} \times \vec{n}$  le long de  $C$ .

★ **Force capillaire sur contour général (intégrale curviligne).**

$$\vec{F}_C = \oint_C d\vec{F}_C = \gamma \oint_C d\vec{r} \times \vec{n} \quad (4.16)$$

**Force capillaire sur un contour arbitraire (intégrale de surface)**

L'intégrale curviligne (4.16) qui définit  $\vec{F}_C$  peut être transformée en une intégrale de surface par le théorème de Stokes et par une série de manipulations indicielles pas si communes. On commence par écrire la force  $\vec{F}_C$  sous une forme indicielle

$$\vec{F}_C = \gamma \oint_C d\vec{r} \times \vec{n} = \oint_C \gamma \vec{e}_i \epsilon_{ijk} dx_j n_k = \gamma \vec{e}_i \oint_C \underbrace{\epsilon_{jki} n_k}_{A_j^{(i)}} dx_j \quad (4.17)$$

On imagine maintenant  $A_j^{(i)} = \epsilon_{jki} n_k$  comme la composante  $j$  d'un champ vectoriel  $\vec{A}^{(i)}$ , auquel cas on obtient par le théorème de Stokes, en notation vectorielle ou indicielle

$$\oint_C \vec{A}^{(i)} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(i)} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow \oint_C A_j^{(i)} dx_j = \int_S \epsilon_{lmj} \frac{\partial A_j^{(i)}}{\partial x_m} dS_l \quad (4.18)$$

On injecte cette relation dans (4.17), afin de trouver

$$\vec{F}_C = \gamma \vec{e}_i \int_S \epsilon_{lmj} \frac{\partial A_j^{(i)}}{\partial x_m} dS_l = \gamma \vec{e}_i \int_S \epsilon_{lmj} \frac{\partial}{\partial x_m} (\epsilon_{jki} n_k) dS_l \quad (4.19)$$

Ensuite on simplifie en utilisant les propriétés de permutation ( $\epsilon_{lmj} = \epsilon_{jlm}$ ) et de multiplication ( $\epsilon_{jlm} \epsilon_{jki} = \dots$ ) du symbole d'anti-symétrie :

$$\begin{aligned} \vec{F}_C &= \gamma \vec{e}_i \int_S \epsilon_{jlm} \epsilon_{jki} \frac{\partial n_k}{\partial x_m} dS_l = \gamma \vec{e}_i \int_S (\delta_{lk} \delta_{mi} - \delta_{li} \delta_{mk}) \frac{\partial n_k}{\partial x_m} dS_l \\ &= \gamma \left( \int_S \vec{e}_i \frac{\partial n_l}{\partial x_i} dS_l - \int_S \vec{e}_l \frac{\partial n_k}{\partial x_k} dS_l \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Par définition  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , soit  $dS_l = n_l dS$  sous forme indicielle. Ceci permet de simplifier la première intégrale :

$$\int_S \vec{e}_i \frac{\partial n_l}{\partial x_i} dS_l = \int_S \vec{e}_i \frac{\partial n_l}{\partial x_i} n_l dS = \int_S \vec{e}_i \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial (n_l n_l)}{\partial x_i}}_{=0} dS = \vec{0} \quad (4.21)$$

car  $\|\vec{n}\|^2 = n_l n_l = 1$ .

★ **Force capillaire sur contour général (intégrale de surface).**

$$\vec{F}_C = -\gamma \iint_S \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})}_{\kappa} d\vec{S} \quad (4.22)$$

La force capillaire se calcule donc de manière équivalente comme l'intégrale de surface sur  $S$  de la courbure locale.

**R** Si la tension de surface varie sur la surface, on montre par la même approche que

$$\vec{F}_C = \int_S [\vec{\nabla}\gamma - \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \vec{n}] dS \quad (4.23)$$

où il y a un terme supplémentaire  $\vec{\nabla}\gamma$  qui apparaît. C'est ce terme qui cause les mouvements fluides qu'on voit si on met une goutte de savon dans l'eau de notre vaisselle. Suite à la présence de ces molécules tensioactives, la tension de surface baisse localement proche de la goutte de savon. Ceci cause un déséquilibre des forces qui provoque un écoulement qui diverge radialement de la goutte de savon.

## 4.3 Conditions aux limites sur une surface libre

### 4.3.1 Surface libre ?

Une surface libre est une idéalisation d'une interface, dans laquelle un des deux milieux est trop léger pour vraiment influencer le mouvement de l'autre. C'est une première approximation souvent utilisée pour décrire les interfaces entre une phase liquide (lourde) et une phase gazeuse (légère). Dans ce cas, seule la pression  $p_0$  du gaz intervient comme variable et sa vitesse est ignorée.

### 4.3.2 Condition aux limites cinématique

Selon les hypothèses formulées précédemment, une interface entre deux milieux non-réactifs et non miscibles doit suivre les mouvements du fluide. La fonction  $f$ , qui localise la surface à la valeur  $f = 0$ , est donc une surface matérielle. Avec les outils cinématiques du premier chapitre, il n'est pas difficile d'exprimer cette condition dite cinématique.

★ **Condition cinématique (surface libre).**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}|_{sur S} \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (4.24)$$

Cette relation n'est rien d'autre qu'une loi d'évolution pour la fonction  $f$ . Elle exprime que la fonction  $f$  varie dans le temps, uniquement sous l'influence de  $\vec{u}|_{sur S} \cdot \vec{\nabla} f$ , proportionnel à la vitesse normale du fluide à la surface. Ceci est en effet assez intuitif car on imagine bien que la vitesse tangentielle à la surface ne changera pas la forme de la surface. Pour les deux exemples de fonctions  $f$ , cités précédemment, cette condition cinématique s'écrit

$$\text{(plan d'eau déformée)} \quad : \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{u}|_{z=H} \cdot \vec{\nabla} H = u_z|_{z=H} \quad (4.25a)$$

$$\text{(goutte d'eau déformée)} \quad : \quad \frac{\partial R}{\partial t} + \vec{u}|_{r=R} \cdot \vec{\nabla} R = u_r|_{r=R} \quad (4.25b)$$

La condition cinématique est une condition limite essentielle qui s'impose dans tout type de fluide, visqueux ou parfait, et c'est une loi très non-linéaire qui n'a rien de simple. En TD7, on l'utilisera pour étudier les ondes de surface sur un plan d'eau faiblement déformée et invariant selon  $y$  où  $H = H(x, t)$ . Dans ce contexte, on supposera que  $\vec{u}$  et  $H$  sont tous les deux petits et ceci permet de dériver une version approchée (linéarisée) de cette condition.

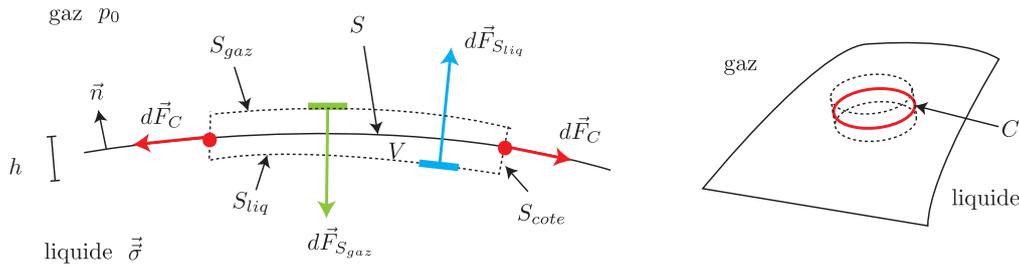


FIGURE 4.4 – Bilan de forces sur un volume de contrôle  $V$  très plat ( $h \rightarrow 0$ ) au voisinage de la surface libre  $S$ . La pression du gaz pousse sur toute la surface du haut  $S_{gaz}$  tandis que le liquide agit sur toute la surface du bas  $S_{liq}$

### 4.3.3 Condition aux limites dynamique

Le fait que la tension de surface est capable d'exercer des forces doit être prise en compte dans la balance.  $C$ 'est exactement ce que la *condition dynamique* exprime.

Pour identifier cette condition dynamique, on effectue un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle  $V$  matériel, très plat, schématisé sur la figure 4.4. On imagine ce volume localisé au voisinage immédiat de la surface libre (matérielle). Comme le montre le schéma, la surface  $\Sigma$  de ce volume de contrôle est délimité par trois faces

$$\Sigma = S_{gaz} \cup S_{liq} \cup S_{cote} \quad (4.26)$$

Dans la limite  $h \rightarrow 0$ , la superficie de la surface sur le coté  $S_{cote}$  tend vers zéro et  $S_{gaz}$  et  $S_{liq}$  tendent toutes les deux vers  $S$ , la portion de surface libre découpée par  $V$ . La frontière de  $S$  définit le contour  $C$  sur lequel s'appuient les forces capillaires. On choisit d'orienter la normale unitaire  $\vec{n}$  vers le gaz. Si on écrit le bilan des forces qui s'exercent sur ce volume alors

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{u} dV = \iiint_{V(t)} \vec{f} dV + \iint_{\Sigma} \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} + \oint_C d\vec{F}_C \quad (4.27)$$

avec la contribution de la force capillaire qui ne doit pas être oubliée. On remplace l'expression de cette force capillaire par la formule (4.22) et on prend la limite  $h \rightarrow 0$ . Les intégrales de volumes disparaissent et il ne reste plus que

$$\vec{0} = \iint_S \left( -p_0 \vec{n} - \vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \gamma \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \right) dS \quad (4.28)$$

Ensuite, on fait le même raisonnement que dans le premier chapitre. La portion  $S$  découpée par  $V$  est arbitraire et c'est donc l'intégrand qui doit s'annuler en chaque point de la surface. On arrive ainsi à la condition dynamique recherchée.

★ **Condition dynamique sur surface libre (général).** Sur tout point de la surface libre on a

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}|_S = -p_0 \vec{n} - \gamma \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \quad (4.29)$$

Ici  $\vec{n}$  est orienté vers l'extérieur de la phase liquide. ■

Dans ce cours, nous avons deux types de fluides, les fluides parfaits et les fluides visqueux incompressibles. Regardons ce qui se passe dans ces deux cas.

### Fluide parfait

Dans le cas particulier d'une surface libre d'un fluide parfait, il suffit de remplacer  $\vec{\sigma} = -p\vec{1}$  dans (4.29) afin d'obtenir la loi de Young-Laplace comme condition aux limites dynamique.

★ **Condition dynamique sur surface libre (fluide parfait) ou loi de Young-Laplace.**

$$p|_S = p_0 + \gamma \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})}_{\kappa} \quad (4.30)$$

A la surface libre d'un fluide parfait, la tension de surface génère un saut de pression qui dépend de la courbure locale. Ceci se laisse simplement imaginer en pensant à un ballon baudruche qui est en surpression à cause de la tension dans la membrane de latex.

Sur la figure 4.5 on considère les cas d'une surface libre concave et convexe. A gauche, la surface est supposée concave et la tension de surface ajoute une force qui pousse sur le fluide. La pression dans le fluide augmente donc par rapport à  $p_0$ . On remarque d'ailleurs que la normale unitaire sortante  $\vec{n}$  est divergente, ce qui signifie que  $\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} > 0$  et que  $p > p_0$  en effet. A droite, on voit le cas opposé. Dans des exercices sur la capillarité, on vous conseille de faire ce type de dessin pour vérifier que votre formule pour la courbure  $\kappa$  a bien le signe désiré.

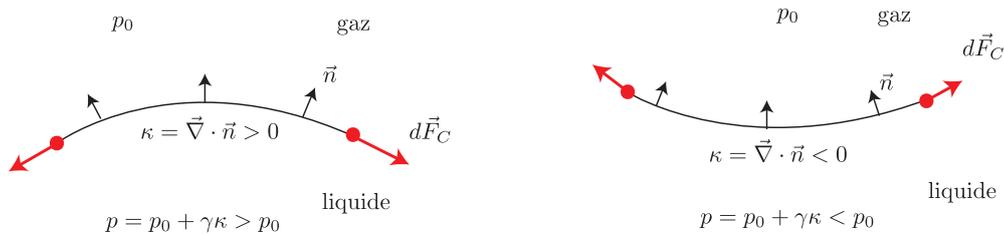


FIGURE 4.5 – Vérification de signe sur la loi de Young-Laplace retrouvée.

### Fluide visqueux incompressible

Dans un fluide visqueux (Newtonien) incompressible, on doit prendre en compte les contraintes visqueuses et on a donc

★ **Condition dynamique sur surface libre (fluide visqueux incompressible).**

$$p\vec{n} - \eta \left( \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}u^T \right) \cdot \vec{n} = \left[ p_0 + \gamma \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \right] \vec{n} \quad (4.31)$$

Il est intéressant de remarquer que seule la projection normale de cette relation est affectée par la tension de surface. La tension de surface (constante) n'affecte pas les contraintes tangentielles. La contrainte tangentielle reste alors nulle sur une surface libre, quelque-soit sa déformation :

$$\vec{t}_i \cdot \left( \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}u^T \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4.32)$$

avec  $\vec{t}_1, \vec{t}_2$  deux vecteurs tangentielles à l'interface.

## 4.4 Conditions aux limites sur une interface

### 4.4.1 Condition aux limites cinématique

Dans le cas plus général d'une interface entre deux milieux fluides, on doit imposer une condition cinématique des deux côtés de l'interface.

★ **Condition cinématique (interface).**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}^{(i)}|_{sur S} \cdot \vec{\nabla} f \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4.33)$$

avec  $\vec{u}^{(1)}$  et  $\vec{u}^{(2)}$  la vitesse du fluide des deux cotés. De façon équivalente, on peut imposer une condition cinématique d'un seul coté, puis exiger que la vitesse normale soit continue à l'interface.

#### 4.4.2 Condition aux limites dynamique

Le raisonnement sur la condition dynamique s'étend sans problème au cas d'une interface entre deux liquides. Si on oriente la normale unitaire sur l'interface du milieu 1 vers le milieu 2, c'est-à-dire  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ , alors

★ **Condition dynamique sur interface (général).**

$$\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}|_S = \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{n}|_S - \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (4.34)$$

avec  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  qui pointe vers le milieu 2.

et il suffit de remplacer par les lois de comportements des fluides des deux cotés.

##### Fluide parfait

Dans un fluide parfait on obtient la loi de Young-Laplace

★ **Condition dynamique sur interface (général).**

$$p^{(1)}|_S = p^{(2)}|_S + \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \quad (4.35)$$

avec  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  qui pointe vers le milieu 2.

##### Fluide visqueux incompressible

Dans un fluide visqueux incompressible, on a

★ **Condition dynamique sur surface libre (fluide newtonien incompressible).**

$$p^{(1)} \vec{n} - 2\eta^{(1)} \vec{\epsilon}^{(1)} \cdot \vec{n} = p^{(2)} \vec{n} - 2\eta^{(2)} \vec{\epsilon}^{(2)} \cdot \vec{n} + \gamma (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (4.36)$$

avec  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  qui pointe vers le milieu 2 et  $\vec{\epsilon} = (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T)/2$ .

La contrainte tangentielle entre deux phases liquides est continue

$$\vec{t}_i \cdot (\vec{\epsilon}^{(1)} - \vec{\epsilon}^{(2)}) \cdot \vec{n} = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4.37)$$

Pour le cas particulier d'une interface plane située en  $z = 0$  qui en plus est immobile  $u_z|_{z=0} = 0$  on a comme conditions dynamiques

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \eta_2 \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \eta_1 \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \eta_2 \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ p^{(1)} \Big|_{z=0} &= p^{(2)} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (4.38)$$

#### 4.4.3 Condition aux limites de continuité de la vitesse

Dans un fluide visqueux, les conditions cinématiques et dynamiques seules ne suffisent pas. Le plus souvent, on ajoute la condition phénoménologique qui exprime que le champ de vitesse tangentielle est continu à l'interface

★ **Condition de continuité de la vitesse tangentielle (interface).**

$$\vec{n} \times (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0} \quad (4.39)$$

Avec la condition cinématique, c'est tout le vecteur vitesse qui est alors continu à travers l'interface. En pratique cette condition semble bien vérifiée, mais elle peut être mise à défaut.

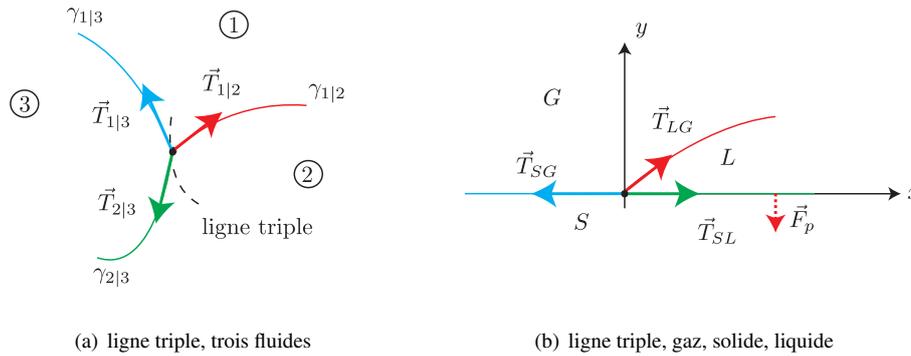


FIGURE 4.6 – Equilibre des forces capillaires sur une ligne triple. (a) entre trois liquides. (b) entre une phase liquide (L), gazeuse (G) et un substrat solide plan (S).

## 4.5 Lignes triples statiques

Lorsque trois matériaux différents rentrent en contact, il se forme une ligne commune ou ligne triple à l'intersection des trois interfaces. Dans le cas général, ces lignes triples peuvent bouger et leurs mouvements n'a rien de simple. On se limite ici à une description sommaire des lignes triples statiques.

### 4.5.1 Lignes triples entre trois phases liquides

Si les trois phases qui se rencontrent sont toutes liquides, on se trouve dans la situation schématisée sur la figure 4.6-(a). On note

$$\gamma_{1|2}, \gamma_{2|3}, \gamma_{1|3} \quad (4.40)$$

les tensions des interfaces entre les phases 1, 2 et 3 et

$$\vec{T}_{1|2}, \vec{T}_{2|3}, \vec{T}_{1|3} \quad (4.41)$$

les trois vecteurs unitaires perpendiculaires à la ligne commune, tangentiels aux interfaces respectives. Dans une situation statique, il faut sur chaque segment  $d\vec{r}$  de longueur  $dl$  de la ligne triple, qu'il y ait un équilibre des forces capillaires, soit

$$\left( \gamma_{1|2} \vec{T}_{1|2} + \gamma_{2|3} \vec{T}_{2|3} + \gamma_{1|3} \vec{T}_{1|3} \right) dl = \vec{0} \quad (4.42)$$

Si on manipule cette relation par des produits scalaires avec  $\vec{T}_{1|2}$  et  $\vec{T}_{2|3}$  on peut accéder à deux relations qui permettent de calculer les angles entre les différentes surfaces à la ligne triple. Pour donner un exemple simple, on imagine le cas où les trois tensions de surfaces sont identiques. Alors, on a nécessairement  $120^\circ$  entre chaque surface de séparation, par symétrie. Ceci est le cas pour les facettes de trois bulles de savon qui se touchent par exemple.

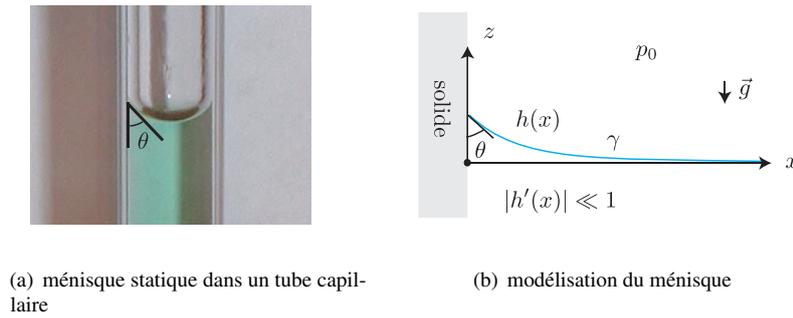


FIGURE 4.7 – Un ménisque statique peut se faire à proximité d'un substrat solide pour réaliser le bon angle de contact. Pour un angle de contact  $\theta \sim \pi/2$ , on peut trouver une forme simplifiée du ménisque.

#### 4.5.2 Angle de contact : loi de Young Dupré

Souvent une phase solide est présente à côté de deux phases liquides (fluide ou gaz). Imaginons le cas de la figure 4.6-(b), où un solide plat (S) est en contact avec un gaz (G) et un liquide (L). Dans cette situation, on doit distinguer les directions horizontale et verticale.

Dans la direction horizontale, on doit avoir un équilibre de forces capillaires sur chaque portion de  $C$ , car sinon la ligne se déplacerait dans la direction horizontale. Si on note  $\vec{e}_t$ , le vecteur tangentiel à la surface solide et normale à la ligne triple ( $\vec{e}_t = \vec{e}_x$  en figure 4.6-(b)) alors

$$(\gamma_{SG}\vec{T}_{SG} + \gamma_{LG}\vec{T}_{LG} + \gamma_{SL}\vec{T}_{SL}) \cdot \vec{e}_t dl = 0 \quad (4.43)$$

doit être vérifiée. Ceci donne la loi de Young-Dupré.

★ **Loi de Young-Dupré.** L'angle de contact statique entre une phase liquide et un substrat solide est fixé par la relation

$$\theta = \text{acos} \left( \frac{\gamma_{SL} - \gamma_{SG}}{\gamma_{LG}} \right) \quad (4.44)$$

Il n'est pas certain que cette relation ait une solution, car pour que cela soit le cas, il faut que  $|\gamma_{SL} - \gamma_{SG}| \leq \gamma_{LG}$ . Si cette condition n'est pas satisfaite, le liquide ne mouille pas la surface. Le liquide restera posée sur une fine couche de gaz dans laquelle un écoulement de lubrification prend place. Ceci est rien d'autre que l'effet déperlant (se dit d'une surface sur laquelle un fluide glisse sans pénétrer) qu'on retrouve sur certaines vestes, feuilles de plantes ou peintures.

Dans la projection verticale du bilan des forces, il n'y a rien de particulier, mais on peut se demander comment il est possible d'équilibrer la force  $\gamma_{LG}\vec{T}_{LG}$  qui tire toujours vers le haut. En fait, il est nécessaire de prendre en compte qu'il existe une force de sur-pression capillaire due à la loi de Young-Laplace. On peut montrer que cette force de pression sur la plaque ( $\vec{F}_p$  sur le schéma) équilibre exactement la force verticale dirigée vers le haut, exercée par la tension de surface  $\gamma_{LG}\vec{T}_{LG}$  à la ligne triple.

## 4.6 Quelques applications

### 4.6.1 Le ménisque statique

La loi de Young-Dupré permet de comprendre le phénomène du ménisque. Dans un tube capillaire, cf. photo de la figure 4.7-(a), on peut voir que l'eau remonte sur les bords pour assurer un angle de contact  $\theta < \pi/2$ . On appelle cette zone de la surface, le ménisque. Pour trouver sa forme, il suffit de résoudre un problème d'hydrostatique.

Comme schématisé sur la figure 4.7-(b), on étudie un cas 2D dans le plan  $x - z$ . Le liquide de densité  $\rho$  est soumis à son poids et mouille la surface solide en  $x = 0$  par un angle de contact  $\theta$ . Au loin, pour

$x \rightarrow +\infty$ , la surface est plane et tend vers  $z = 0$ . On cherche la forme  $h(x)$  de la surface libre définie par  $f = z - h(x)$ . Sous la surface, la pression est hydrostatique

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Leftrightarrow \quad p = C - \rho g z \quad (4.45)$$

La normale à la surface, sortant du fluide

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{\vec{e}_z - h' \vec{e}_x}{(1 + h'^2)^{1/2}} \quad (4.46)$$

où  $h' = dh/dx$  brièvement. La courbure vaut donc

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = -\frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \quad (4.47)$$

On exprime la loi de Young-Laplace en  $z = h$

$$C - \rho g h = p_0 - \gamma \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \quad (4.48)$$

Loin, pour  $x \rightarrow +\infty$  la relation doit être valable, mais à cet endroit  $h = 0$ ,  $h' = 0$  et  $h'' = 0$ . Ceci signifie que  $C = p_0$  et que l'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} - \left(\frac{\rho g}{\gamma}\right) h = 0 \quad (4.49)$$

Dans cette équation  $\rho g/\gamma$  à la dimension de l'inverse d'une longueur au carré, la longueur capillaire

★ **Longueur capillaire.**

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (4.50)$$

En dessous de cette longueur, les effets capillaires sont importantes. Même dans cet exemple simple de ménisque statique, l'équation différentielle (4.49) obtenue n'est pas si simple à résoudre. Si l'angle de contact  $\theta$  est inférieur à  $90^\circ$  mais pas proche, on a  $|h'| \ll 1$  et dans ce cas, une bonne approximation à l'équation différentielle est

$$h'' - \lambda_c^{-2} h \approx 0 \quad (4.51)$$

dont la solution compatible avec le domaine semi-infini est

$$h \approx h_0 e^{-x/\lambda_c} \quad (4.52)$$

On peut relier  $h_0$  à l'angle de contact  $\theta$ , qui a été supposé proche de  $\pi/2$  en exprimant

$$h'|_{x=0} = -\frac{1}{\tan \theta} \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{\lambda_c}{\tan \theta} \quad (4.53)$$

**Exercice** Inspirez vous de la méthode mathématique utilisée dans l'application suivante pour trouver une expression plus précise du ménisque, valable pour des angles de contacts pas forcément proches de  $\pi/2$ .

#### 4.6.2 Goutte plate sur une surface non-mouillante

On s'intéresse à la forme d'une flaque circulaire de Mercure de grand rayon  $R_*$ . Comme suggéré par la figure 4.8, on suppose que le Mercure ne mouille pas le substrat solide et qu'elle est très plate. On montre alors que la hauteur maximale de la flaque  $h$  loin des bords est fixée à  $2\lambda_c$ .

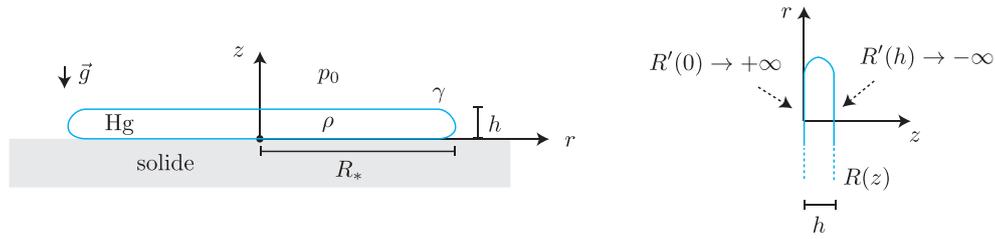


FIGURE 4.8 – Une flaque de mercure sur un substrat solide non-mouillante a une hauteur fixe  $h$ , si son étendue latérale est suffisamment grande. On calcule la forme d'équilibre de cette flaque.

Dans le fluide, la pression ne varie pas radialement  $\partial_r p = 0$ , mais on doit satisfaire l'équilibre hydrostatique  $-\partial_z p = \rho g$ . Après intégration on a

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \quad (4.54)$$

et la constante d'intégration a été choisie de manière à réaliser la pression  $p_0$  lorsqu'on atteint  $z = h$  sur la partie plane de la flaque. On paramétrise la surface de la flaque par la fonction

$$f = r - R(z) = 0 \quad (4.55)$$

pour laquelle on dispose des conditions aux limites

$$\lim_{z \rightarrow 0} R'(z) = +\infty \quad , \quad \lim_{z \rightarrow h} R'(z) = -\infty \quad (4.56)$$

avec  $R'(z) = dR/dz$  brièvement. On souhaite exprimer la loi de Laplace et pour cela, on a besoin de la courbure. Avec

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{\vec{e}_r - R'(z)\vec{e}_z}{\sqrt{1 + R'^2(z)}} \quad (4.57)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n}|_{r=R(z)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\sqrt{1 + R'^2(z)}} \right) \Big|_{r=R(z)} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{R'(z)}{\sqrt{1 + R'^2(z)}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2(z)}} \left( \underbrace{\frac{1}{R(z)}}_{\text{petit}} - \frac{R''(z)}{1 + R'^2(z)} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Sous la parenthèse, le premier terme sera petit devant le deuxième pour une grande flaque. On ignore donc ce terme par la suite. On exprime la loi de Laplace sur la surface de la goutte ce qui donne

$$\rho g(h - z) = -\gamma \frac{1}{\sqrt{1 + R'^2(z)}} \frac{R''(z)}{1 + R'^2(z)} \quad (4.59)$$

Ensuite il convient de changer de variable. On introduit l'angle  $\Theta(z)$  locale par la définition

$$R'(z) = \tan \Theta(z) \quad (4.60)$$

Cet angle est illustré sur le schéma de gauche de la figure 4.8. Les conditions aux limites (4.56) deviennent

$$\Theta(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \Theta(h) = -\frac{\pi}{2} \quad (4.61)$$

L'expression de la courbure se simplifie drastiquement car avec

$$\frac{1}{1+R'^2} = \frac{1}{1+\tan^2 \Theta} = \cos^2 \Theta \quad , \quad R'' = (\tan \Theta)' = \frac{1}{\cos^2 \Theta} \Theta' \quad (4.62)$$

on remplace (4.59) par

$$\frac{\rho g}{\gamma}(h-z) = -\cos \Theta (\Theta') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho g}{\gamma}(h-z) = -\frac{d}{dz}(\sin \Theta) \quad (4.63)$$

On intègre cette équation entre  $z \in [0, h]$  et on utilise les conditions aux limites (4.61) pour trouver

$$\frac{\rho g}{\gamma} \left[ -\frac{(h-z)^2}{2} \right]_0^h = [-\sin \Theta(z)]_0^h \quad (4.64)$$

soit

$$\frac{\rho g h^2}{2\gamma} = 2 \quad (4.65)$$

d'où le résultat que la hauteur de la flaque vaut

$$h = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 2\lambda_c \quad (4.66)$$

Ceci indique que le rayon de courbure petit, du bord de la flaque vaut environ  $\lambda_c$ . Avec quelques efforts en plus, on peut remonter à une expression intégrale qui donne accès à la forme de la goutte elle-même.

**Exercice** Trouver la hauteur de la flaque dans le cas où la goutte mouille le substrat solide avec un l'angle de contact  $\theta$ . Dans ce cas, il faut modifier la condition aux limites (4.61) en  $z = 0$  par

$$\Theta(0) = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (4.67)$$

### 4.6.3 Filet de fluide parfait tombant

On considère un filet de fluide tombant illustré en figure 4.9. Lorsque qu'on laisse tomber un fluide il se forme un fin filament. Dans le cas d'un fluide peu visqueux celui-ci va rapidement devenir se fragmenter en gouttes (instabilité de Rayleigh-Plateau) mais si le filament est suffisamment visqueux, il peut rester intact pendant longtemps.

Pour simplifier, on trouve la forme du filament d'un fluide parfait, supposant un écoulement stationnaire de profil bouchon dans le filet où la vitesse verticale ne dépend pas du rayon. On aura alors

$$\vec{u} = u_r(r, z) \vec{e}_r + u_z(z) \vec{e}_z \quad (4.68)$$

avec

$$u_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4.69)$$

comme conséquence de l'incompressibilité. Suite à la forme allongée du filet, la vitesse radiale est plutôt faible par rapport à la vitesse verticale et on pourra donc l'ignorer dans la suite. La surface du filet sera caractérisée par la fonction

$$f = r - R(z) = 0 \quad (4.70)$$

A l'endroit  $z = 0$  on suppose que

$$u_z(0) = U_0 \quad , \quad R(0) = R_0 \quad (4.71)$$

Suite à la conservation de masse, on doit avoir

$$u_z(z) = U_0 \frac{R_0^2}{R^2(z)} \quad (4.72)$$

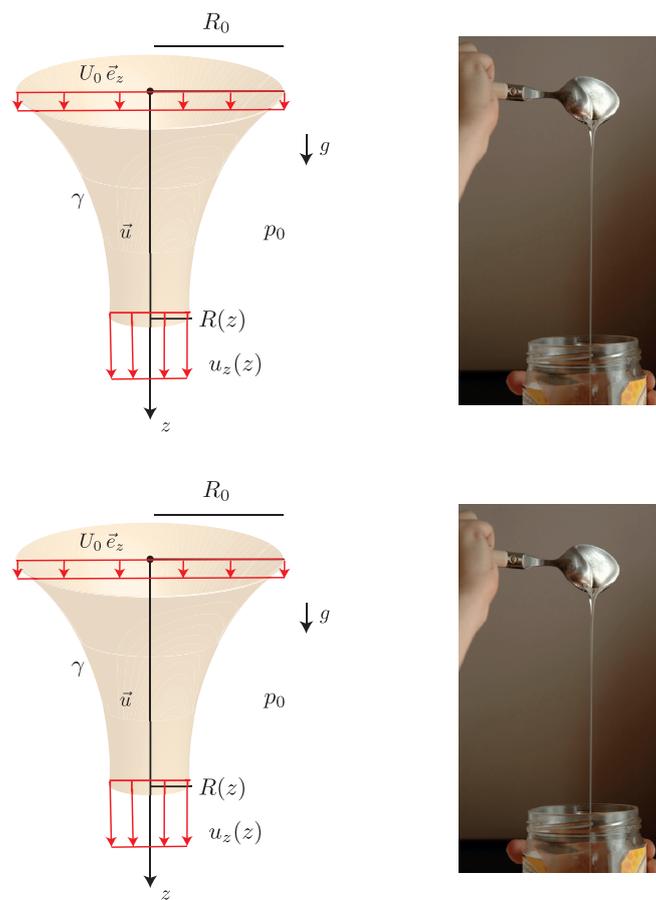


FIGURE 4.9 – Filet de fluide tombant

le rayon et la vitesse verticale sont donc toujours connectés. De l'équation d'Euler, il reste à l'ordre dominant

$$\begin{aligned} 0 &\approx -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \end{aligned} \quad (4.73)$$

Selon la première équation, la pression ne varie pas radialement,  $p = p(z)$  et prend donc la valeur qu'on a sur la surface libre, à hauteur  $z$ . Avec la loi de Laplace on a donc

$$p(z) = p_0 + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \underbrace{R'^2(z)}_{\text{petit}}}} \left( \frac{1}{R(z)} - \frac{R''(z)}{\underbrace{1 + R'^2(z)}_{\text{petit}}} \right) \quad (4.74)$$

Ici on a utilisé l'expression pour la courbure de l'application précédente. Cette fois, on peut prendre en considération que  $|R'|$  et  $|R''|$  sont plutôt faibles et ceci permet de simplifier

$$p(z) \approx p_0 + \frac{\gamma}{R(z)} \quad (4.75)$$

La composante selon  $z$  de l'équation d'Euler s'intègre

$$\partial_z \left( \frac{\rho u_z^2}{2} + p - \rho g z \right) = 0 \quad (4.76)$$

pour donner donc, la loi de Bernoulli. On intègre de  $z = 0$  à  $z$  et en remplaçant la pression par (4.75) et la vitesse verticale par (4.72), on trouve

$$\frac{\rho U_0^2}{2} \left( \frac{R_0^4}{R^4(z)} - 1 \right) + \frac{\gamma}{R(z)} + \rho g z = 0 \quad (4.77)$$

Cette loi permet de caractériser la forme du filet. Proche du point  $z = 0$ , la capillarité sera importante, mais moins au loin où la gravité l'emporte dans la balance des forces. Ceci résulte en une loi d'échelle  $R(z) \sim |z|^{-1/4}$  pour  $|z|$  grand.

#### 4.6.4 Ondes stationnaires sur filet tombant

Lorsqu'on déverse du thé ou du lait, on peut constater qu'il se forme une chaîne sur la surface libre du filet, comme le montre la figure 4.10-(a). On peut comprendre ces chaînes comme une onde de faible amplitude qui se forme à la surface du filet. Cette onde est stationnaire dans le référentiel de l'observateur.

A la fin de la section précédente, nous avons montré que la section du filet varie lentement avec  $z$ . Pour la description de l'onde stationnaire il est utile d'ignorer cette variation verticale lente dans un premier temps. Comme le suggère la figure 4.10-(b), on assimile le filet en absence d'onde à un cylindre de rayon  $R$  et l'écoulement  $y$  descend à vitesse  $-U \vec{e}_z$  constante. Si, à l'extérieur du filet la pression vaut  $p_0$  la pression atmosphérique, on aura  $p_0 + \gamma R^{-1}$  comme pression à l'intérieur du filament.

On perturbe cet état d'équilibre par une onde stationnaire. La surface est déformée en

$$r = R + \underbrace{A \cos 2\theta \cos kz}_{\zeta'(\theta, z)} \quad (4.78)$$

On appelle  $A$  l'amplitude de l'onde et  $k$  est le nombre d'onde et on suppose  $A \ll R$  pour pouvoir utiliser des approximations linéaires. La figure 4.10-(b) montre cette déformation qui ressemble bien à une chaîne. Cette perturbation de la forme vient avec une perturbation de la vitesse. Dans la chaîne, la vitesse du fluide sera

$$\vec{u} = -U \vec{e}_z + \vec{u}'(r, \theta, z) \quad (4.79)$$

et on cherchera l'écoulement  $\vec{u}' = \vec{\nabla} \phi'$  c'est à dire comme un écoulement potentiel et parfait. La pression dans le filet sera

$$p = p_0 + \gamma R^{-1} + p'(r, \theta, z) \quad (4.80)$$

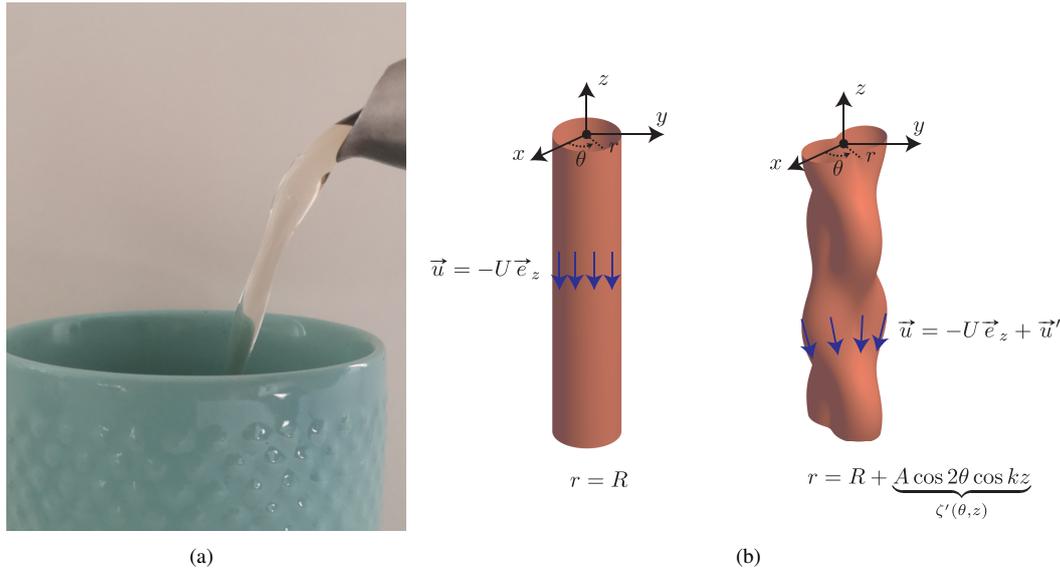


FIGURE 4.10 – (a) Lorsqu'on déverse du thé, on peut voir des chaînes sur la surface libre du filet tombant. Il s'agit d'une onde stationnaire. (b) Pour modéliser ce phénomène plus simplement, on suppose le filet de section  $r = R$  constant et ayant une vitesse  $U$  constante. On étudie sous quelles conditions il peut exister des ondes de faible amplitude sur la surface du filet.

Avant de se lancer dans les calculs de  $\phi'$  et  $p'$ , on étudie la condition cinématique. On doit imposer  $\partial_t f + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$  à l'endroit où  $f = 0$  ou pour  $r = R + \zeta'$ . Compte tenu de la stationnarité  $\partial_t \zeta' = 0$ , puis ignorant les termes non-linéaires et se servant d'un développement limité autour de  $r = R$ , on trouve la version linéarisé de cette condition

$$-U \partial_z \zeta' + \underbrace{\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \zeta'}_{NL \text{ ignore}} = u'_r|_{r=R} + \underbrace{\zeta' \partial_r u'_r|_{r=R}}_{NL \text{ ignore}} \quad (4.81)$$

Pour  $\zeta' = A \cos 2\theta \sin kz$  cela nous informe que  $u'_r = \partial_r \phi' \sim \cos 2\theta \sin kz$  et cela suggère que la forme de la solution pour le potentiel  $\phi'$  :

$$\phi' = \alpha(r) \cos 2\theta \sin kz \quad (4.82)$$

Ce potentiel doit être solution de  $\nabla^2 \phi' = 0$  et il en sort l'équation différentielle

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d\alpha}{dr} \right) - \frac{4\alpha}{r^2} - k^2 \alpha = 0 \quad (4.83)$$

pour la dépendance radiale  $\alpha(r)$ . Il s'agit ici d'une équation de Bessel modifiée dont la solution régulière sur le domaine  $r \in [0, R]$  est

$$\alpha(r) = B I_2(kr) \quad (4.84)$$

Ici  $I_m$  est une fonction de Bessel modifiée et  $B$  une constante. Si on impose la condition cinématique, on obtient une relation algébrique qui permet d'exprimer la constante  $B$  en fonction de l'amplitude  $A$  de la déformation :

$$B = \frac{U}{I'_2(kR)} A \quad (4.85)$$

La fonction  $I'_2$  est la dérivée de la fonction  $I_2$ , qu'on peut l'exprimer comme  $I'_2 = (I_1 + I_3)/2$  grâce aux relations de récurrence des fonctions de Bessel modifiées. Le potentiel est donc

$$\phi' = \frac{U A}{I'_2(kR)} I_2(kr) \cos 2\theta \sin kz \quad (4.86)$$

Pour exprimer la condition limite dynamique on a besoin de la pression et celle-ci peut être trouvée à l'aide de l'équation d'Euler ou celle de Bernoulli. D'Euler, on obtient

$$-\rho U \partial_z \vec{u}' + \underbrace{\rho(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}'}_{NL \text{ ignore}} = -\vec{\nabla} p' \quad (4.87)$$

On ignore, ici aussi, les termes non-linéaires plus petites. Comme  $\vec{u}' = \vec{\nabla} \phi'$ , on trouve la perturbation

$$p' = \rho U \partial_z \phi' = \frac{\rho U^2 k A}{I_2'(kR)} I_2(kr) \cos 2\theta \cos kz \quad (4.88)$$

Une constante d'intégration a été ignorée ici, mais sans conséquences pour la suite du problème.

On peut maintenant imposer la condition dynamique et cela doit être fait avec la pression totale  $p = p_0 + \gamma R^{-1} + p'$ . Cette condition s'écrit

$$p|_{r=R+\zeta'} = p_0 + \gamma \kappa \quad (4.89)$$

Ici aussi, il faut isoler la forme linéarisée de cette condition, valable dans la limite des petites déformations ( $|\zeta| \ll R$ ). Le terme de gauche se linéarise à

$$p|_{r=R+\zeta'} = p_0 + \gamma R^{-1} + p'|_{r=R} + \underbrace{\zeta' \partial_r p'}_{NL \text{ ignore}} \approx p_0 + \gamma R^{-1} + p'|_{r=R} \quad (4.90)$$

Le terme de droite fait apparaître la courbure  $\kappa$  que l'on peut calculer en évaluant  $\vec{\nabla} \cdot \vec{n}$  sur la surface  $r = R + \zeta'$ . Ici la normale à la surface est  $\vec{n} = \vec{\nabla} f / \|\vec{\nabla} f\|$  et on trouve

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{e}_r - \vec{\nabla} \zeta'}{\sqrt{1 + \|\vec{\nabla} \zeta'\|^2}} \right) \approx \left( \frac{1}{r} - \nabla^2 \zeta' \right) \left( 1 - \underbrace{\frac{\|\vec{\nabla} \zeta'\|^2}{2}}_{NL \text{ ignore}} \right) \approx \frac{1}{r} - \nabla^2 \zeta' \quad (4.91)$$

Ainsi la courbure vaut  $\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n}|_{r=R+\zeta'}$ . A l'aide d'un développement limité dans le premier terme, on trouve la version linéarisée :

$$\kappa = \frac{1}{R + \zeta'} - \nabla^2 \zeta' \approx \frac{1}{R} - \frac{\zeta'}{R^2} - \nabla^2 \zeta' \quad (4.92)$$

Utilisant ces réductions on peut enfin exprimer la condition dynamique linéarisée :

$$p'|_{r=R} = -\frac{\zeta'}{R^2} - \nabla^2 \zeta' \Leftrightarrow \frac{\rho U^2 k I_2(kR)}{I_2'(kR)} A = \gamma \left( \frac{3}{R^2} + k^2 \right) A \quad (4.93)$$

La constante  $A$  est non-nulle car sinon il n'y a pas d'onde. Cela signifie qu'il y a une condition d'existence pour notre onde stationnaire. Sous forme adimensionnée et notant  $K = kR$ , cette condition s'écrit

$$\frac{1}{3K^{-1} + K} \frac{I_2(K)}{I_2'(K)} = \frac{\gamma}{\rho U^2 R} \quad (4.94)$$

Cette équation doit être comprise comme une relation qui fixe le nombre d'onde  $k = K/R$  de la chaîne selon  $z$  en fonction de la vitesse  $U$ , la densité  $\rho$ , le rayon initial du filet  $R$  et  $\gamma$  la tension de surface. Dans la figure 4.11-(a), on affiche cette condition. Cette figure nous informe qu'une onde stationnaire de cette forme n'existe que lorsque

$$\frac{\gamma}{\rho U^2 R} < 0.2312 \quad (4.95)$$

Si cette condition est satisfaite, il existera deux nombres d'ondes  $K$  solution. Pour un filet d'eau avec  $\gamma = 0.07 \text{ N m}^{-1}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  et un jet de rayon  $R = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ , on trouve  $U > 0.24 \text{ m s}^{-1}$ . Cette vitesse est rapidement atteinte dans un jet d'eau qui tombe sous l'effet de la gravité.

Dans un vrai filet de liquide qui chute, la vitesse  $U(z)$  et le rayon  $R(z)$  varient selon  $z$  et on peut alors admettre à l'aide de la relation que le nombre d'onde  $K(z)$  varie également selon  $z$ . On note  $R_0$  le rayon initial et  $U_0$  la vitesse initiale en  $z = 0$  et le débit  $Q = \pi R_0^2 U_0$  est fixé. On calcule  $U(z) = \sqrt{U_0^2 - 2gz}$  et  $R(z) = \sqrt{Q/\pi U(z)}$  pour le filet tombant puis on utilise la relation (4.94) pour calculer  $K(z)$ . En figure 4.11-(b) on affiche la surface  $A \cos 2\theta \cos(K(z)z/R)$ , ce qui ressemble à ce qu'on peut observer en réalité : en même temps que le filet s'amincit, la longueur d'onde augmente ou  $K(z)$  diminue (selon les points en figure 4.11-(a)).

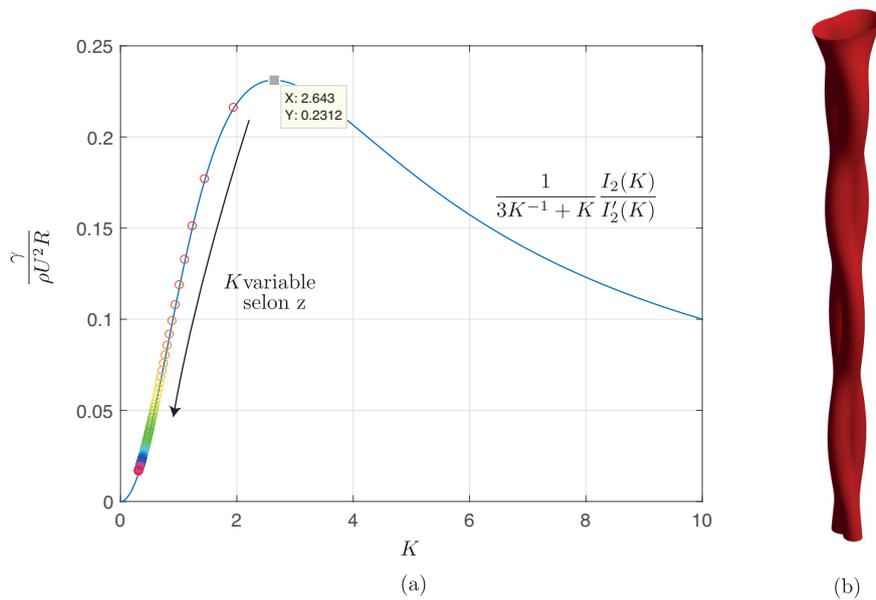
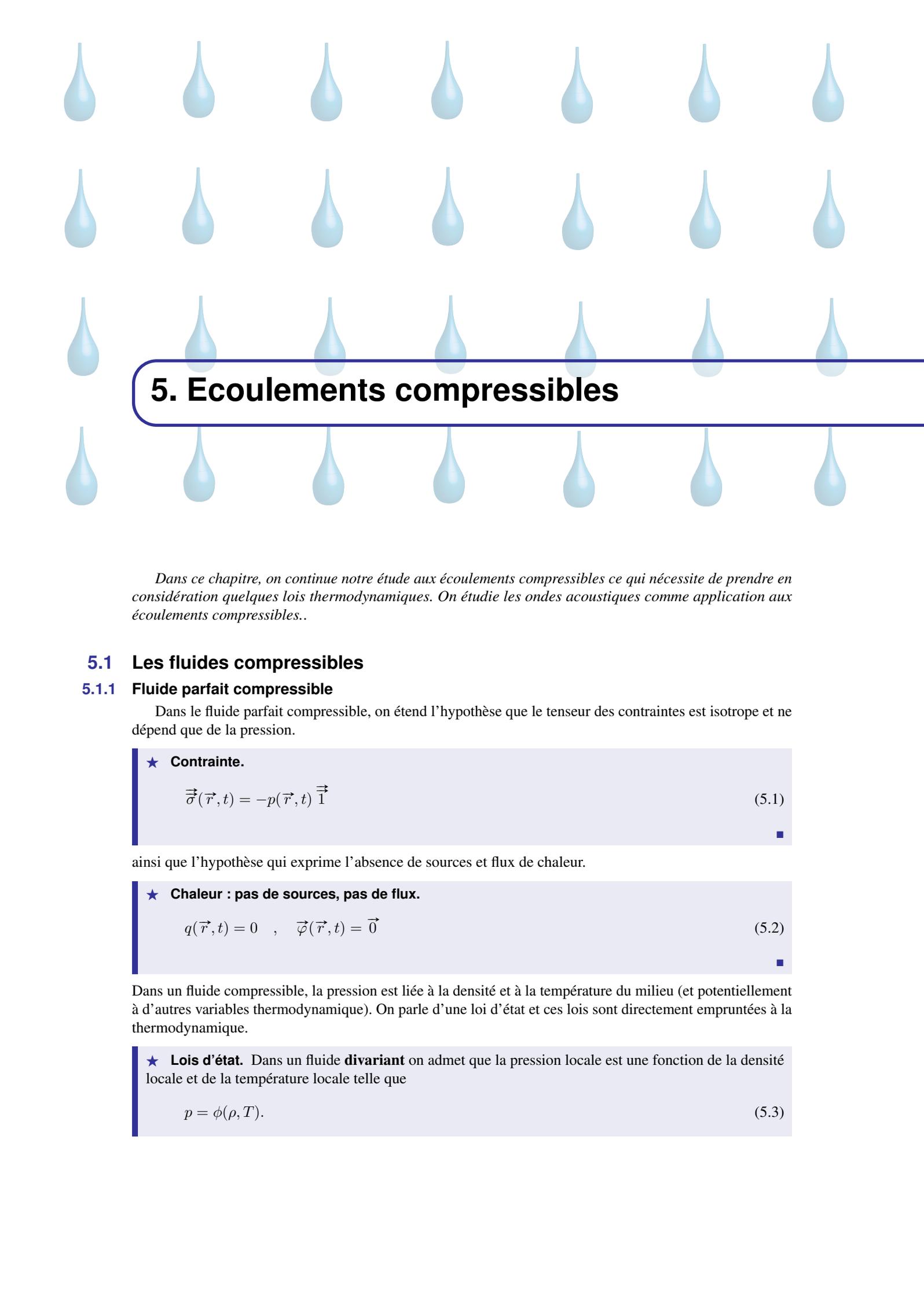


FIGURE 4.11 – (a) nombre d'onde adimensionné  $K$  de la chaîne en fonction du paramètre sans dimension  $\frac{\gamma}{\rho U^2 R}$ . (b) Forme du filet d'eau pour  $K(z)$  lentement variable et  $U(z)$  du filet tombant. Paramètres  $Q = 2 \times 10^{-4} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ,  $R_0 = 5 \times 10^{-3} \text{m}$ .





## 5. Écoulements compressibles

*Dans ce chapitre, on continue notre étude aux écoulements compressibles ce qui nécessite de prendre en considération quelques lois thermodynamiques. On étudie les ondes acoustiques comme application aux écoulements compressibles..*

### 5.1 Les fluides compressibles

#### 5.1.1 Fluide parfait compressible

Dans le fluide parfait compressible, on étend l'hypothèse que le tenseur des contraintes est isotrope et ne dépend que de la pression.

★ **Contrainte.**

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, t) = -p(\vec{r}, t) \vec{1} \quad (5.1)$$

ainsi que l'hypothèse qui exprime l'absence de sources et flux de chaleur.

★ **Chaleur : pas de sources, pas de flux.**

$$q(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \vec{\varphi}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (5.2)$$

Dans un fluide compressible, la pression est liée à la densité et à la température du milieu (et potentiellement à d'autres variables thermodynamique). On parle d'une loi d'état et ces lois sont directement empruntées à la thermodynamique.

★ **Lois d'état.** Dans un fluide **divariant** on admet que la pression locale est une fonction de la densité locale et de la température locale telle que

$$p = \phi(\rho, T). \quad (5.3)$$

Un exemple concret souvent utilisé est la loi du gaz parfait

$$p = \rho R_s T \quad (5.4)$$

Ici  $R_s = R/M_{mol}$  est la constante spécifique du gaz (souvent notée  $r$ ), défini comme le rapport de la constante universelle des gaz et la masse molaire du gaz. ■

Il est instructif de comprendre l'origine de cette loi du gaz parfait. La pression  $p$  d'un volume macroscopique  $V$  de gaz parfait contenant  $N$  particules de température  $T$  suit la loi du gaz parfait si

$$pV = Nk_B T \quad \Leftrightarrow \quad pV = N_{mol}RT \quad (5.5)$$

cf. vos cours de thermodynamique. Ici  $k_B$  est la constante de Boltzmann. La deuxième relation est peut être la plus connue mais le nombre d'atomes  $N_{mol}$  doit alors être exprimé en mole et  $R = k_B N_A = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits. Dans la modélisation continue de notre fluide, on fait l'hypothèse que cet équilibre thermodynamique est satisfait à l'échelle d'un volume mésoscopique  $\delta V$ , contenant alors  $\delta N = n\delta V$  particules. Cette loi, exprimée sur un amas mésoscopique devient donc

$$p\delta V = (n\delta V)k_B T \quad \Leftrightarrow \quad p = n k_B T = \rho \frac{k_B}{m} T = \rho R_s T \quad (5.6)$$

Ici on remplace  $n = \rho/m$  car le champ de densité  $\rho$  est préféré à  $n$ , la densité particulaire. On retrouve donc la constante spécifique du gaz comme

$$R_s = \frac{k_b}{m} = \frac{R}{mN_a} = \frac{R}{M_{mol}} \quad (5.7)$$

Cette dernière version de la formule avec la masse molaire  $M_{mol} = mN_a$  et la constante universelle du gaz est la plus souvent utilisée. On fera attention à *ne pas confondre le fluide parfait avec le gaz parfait*. Le fluide parfait est un modèle utilisé en mécanique des fluides alors que le gaz parfait est un milieu idéal théorique décrit par la physique statistique.

On peut relier l'énergie interne à la température par les lois de Joule. Ces lois sont exprimées par des relations différentielles valable uniquement sur des amas mésoscopiques matériels.

★ **Lois de Joule.** Avec  $c_v$  et  $c_p$  les chaleurs spécifiques massique à volume et pression constante exprimée en  $J/(kg.K)$  on relie

$$1^{\text{ère}} \text{ loi de Joule : } de = c_v dT \quad , \quad 2^{\text{ième}} \text{ loi de Joule : } dh = d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = c_p dT \quad (5.8)$$

Ces relations dérivent de leurs cousines macroscopiques et thermodynamiques. Les lois de Joule y prennent la forme

$$dU = C_v dT \quad \text{avec} \quad C_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (5.9a)$$

$$dH = C_p dT \quad \text{avec} \quad C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (5.9b)$$

où  $C_v$  et  $C_p$  sont les capacité calorifiques à volume et pression constante respectivement, exprimée en  $J/K$ . L'enthalpie est défini comme  $H = U + pV$  avec  $V$  le volume macroscopique du gaz et  $p$  sa pression. Dans notre milieu supposé continu, on exprime ces lois localement sur un volume mésoscopique  $\delta V$  qui est transporté matériellement. A l'aide de la densité massique d'énergie interne, ceci signifie

$$d\delta U = d(\rho e \delta V) = d(e \delta m) = \delta m de + e \underbrace{d(\delta m)}_{=0} \quad (5.10a)$$

$$d\delta H = d(\rho h \delta V) = d(h \delta m) = \delta m dh + h \underbrace{d(\delta m)}_{=0} \quad (5.10b)$$

Ici on utilise  $d(\delta m) = 0$  car la masse d'un volume matériel se conserve lors de son déplacement. La relation  $H = U + pV$  macroscopique devient  $h\rho\delta V = e\rho\delta V + p\delta V$ , soit  $h = e + (p/\rho)$ . Combiné aux équations (5.9) on obtient

$$de = c_v dT \quad , \quad dh = d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = c_p dT \quad (5.11)$$

Avec  $c_v = C_v/\delta m$  et  $c_p = C_p/\delta m$  les capacités thermiques massiques (chaleurs spécifiques) isochore et isobare, exprimées en  $J/(kg.K)$ .

L'utilisation de différentielles totales pour exprimer les lois de comportement est une première dans ce cours. Ceci est à interpréter comme valable uniquement pour un volume matériel mésoscopique et sert donc pour écrire

$$\frac{de}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e = c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) \quad (5.12)$$

dans la loi d'évolution pour l'énergie interne, par exemple.

Ci dessous, on donne la justification des deux lois de Joule ce qui relève uniquement de manipulations thermodynamiques. En peut en déduire que ces lois sont adéquates dans les situations suivantes. La première loi de Joule convient dans deux cas. Soit on a un changement isochorique ( $d(\delta V) = 0$ ) ce qui arrive dans les écoulements incompressibles, soit la pression est une fonction linéaire de la température à  $\delta V$  constant tel que

$$\frac{p}{T} = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\delta V} \quad (5.13)$$

La deuxième loi de Joule en revanche convient si le volume local est une fonction linéaire de la température à  $p$  constante, c'est-à-dire si

$$\frac{\delta V}{T} = \left( \frac{\partial \delta V}{\partial T} \right)_p \quad (5.14)$$

Le gaz parfait satisfait les deux lois de Joule et la relation de Mayer y dicte par ailleurs que  $c_p - c_v = R_s$ .

- R** Si on suppose des processus de conversion de chaleur réversibles, la thermodynamique fait le lien suivant entre l'énergie interne et la pression  $p$ , le volume  $V$ , la température  $T$  et l'entropie  $S$ .

$$dU = dW + dQ = -pdV + TdS \quad (5.15)$$

A coté de cette relation, on utilise l'enthalpie  $H = U + pV$ , l'énergie libre  $F = U - TS$ , l'enthalpie libre  $G = U + pV - TS$ . Une conséquence immédiate de (5.15) est

$$dH = Vdp + TdS, \quad dF = -pdV - SdT, \quad dG = Vdp - SdT \quad (5.16)$$

L'intérêt de ces quatre champs est qu'on peut définir  $p, V, T, S$  à chaque fois de deux manières par les relations de Maxwell

$$\begin{aligned} p &= -\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, & V &= \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_S = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T \\ T &= \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_p, & S &= -\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -\left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \end{aligned} \quad (5.17)$$

En faisant des dérivées croisées, on obtient des relations utiles telles que

$$\left( \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \right)_T = \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \right)_V \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (5.18)$$

Cette relation spécifique s'appelle relation de Clapeyron. Par définition la chaleur spécifique isochore est

$$C_v = T \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \quad (5.19)$$

et caractérise combien l'énergie interne varie relativement à une variation d'entropie. Une telle définition est compatible avec une loi

$$TdS = C_v dT + \pi dV \quad (5.20)$$

où  $\pi$  reste inconnue. En injectant cette loi dans l'énergie interne on obtient

$$dU = (\pi - p) dV + C_v dT = C_v dT ? \quad (5.21)$$

La première loi de Joule nécessite donc que  $(\pi - p) dV = 0$ , ce qui est le cas dans les fluides dans deux situations distinctes. Soit on a un changement isochorique ( $dV = 0$ ) comme pour les écoulements incompressibles dans lesquelles  $d(\delta V) = 0$  pour un volume matériel mésoscopique, soit l'identité  $\pi = p$  s'applique. Selon (5.20) on peut alors écrire

$$\pi = p = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_V \quad (5.22)$$

La relation de Clapeyron (5.18) nous permet alors d'écrire que

$$\frac{p}{T} = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (5.23)$$

comme condition. La pression est une fonction linéaire de la température si on transforme le gaz à volume constant. Par une approche similaire, on arrive à trouver des conditions qui justifient l'utilisation de la deuxième loi de Joule.

### 5.1.2 Fluide visqueux compressible

Dans un fluide Newtonien compressible on admet que la contrainte est de la forme

★ **Contrainte dans fluide Newtonien compressible.**

$$\vec{\sigma} = -p \vec{1} + \eta \underbrace{\left( \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right)}_{2\vec{\epsilon}} + \eta' \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \vec{1} \quad (5.24)$$

A coté de la viscosité dynamique  $\eta$  figure un second coefficient de viscosité dynamique  $\eta'$ . Le plus souvent on utilise la relation de Stokes, qui exprime que la partie isotrope du tenseur des contraintes reste égale à moins la pression. Ceci fixe un lien unique entre  $\eta$  et  $\eta'$  :

$$-p = -p + \frac{2}{3}\eta + \eta' \Leftrightarrow \eta' = -\frac{2}{3}\eta \quad (5.25)$$

mais aucun consensus n'existe sur la validité de cette relation. Le second coefficient de viscosité  $\eta'$  intervient dans l'atténuation des ondes acoustiques.

D'un point de vue thermique, on peut utiliser les mêmes loi d'état (loi du gaz parfait par exemple) et lois de Joule (au moins une des deux). La grande différence est que des sources de chaleur peuvent exister  $q \neq 0$  et elles seront toujours supposées connues. La loi de Fourier exprime la densité de flux de chaleur en fonction du gradient de la température

★ **Loi de Fourier.**

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T, \quad (5.26)$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique, exprimé en  $W m^{-1} K^{-1}$ . On exprime à l'aide de cette loi comment le champ de température diffuse dans un milieu.

## 5.2 Lois d'évolution pour un fluide parfait qui est un gaz parfait

On se concentre sur les modèles pour un fluide parfait qui satisfait la loi d'état du gaz parfait.

### 5.2.1 Version primitive

La combinaison des lois fondamentales de la MMC avec les lois de comportement du gaz parfait donne les lois d'évolution pour la densité, la vitesse et la température.

★ **Lois d'évolution du gaz parfait.** On doit satisfaire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (5.27a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (5.27b)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (5.27c)$$

avec la loi d'état du gaz parfait

$$p = \rho R_s T \quad (5.27d)$$

en tout point et à chaque instant. On rappelle que  $R_s = R/M_{mol}$  est la constante spécifique du gaz et  $c_v$  la chaleur spécifique isochore. ■

On dispose alors d'exactly 6 équations (1 pour  $\rho$ , 3 via l'équation pour  $\vec{u}$ , 1 pour  $T$ , 1 loi d'état) pour déterminer les champs inconnus  $\rho, \vec{u}, p, T$  caractérisant le fluide. Il s'agit donc d'un modèle fermé.

### 5.2.2 Version polytropique

Le système d'équation cité ci-dessus a quelque chose d'étonnant : il conserve l'entropie et se reformule en un jeu d'équations réduit. Retournons un peu en arrière et considérons donc les lois thermodynamiques fondamentales. Selon le premier principe de la thermodynamique, on a

$$dU = dW + dQ = -pdV + dQ \quad (5.28)$$

pour un volume macroscopique de gaz. En absence de conversion de chaleur irréversible (imaginez sources ou flux de chaleur), on peut remplacer le différentiel de chaleur par  $TdS$  soit

$$dU = -pdV + TdS. \quad (5.29)$$

On cherche maintenant à passer cette relation fondamentale à l'échelle mésoscopique de l'amas et on introduit donc

$$d(\delta U) = -pd(\delta V) + Td(\delta S) \quad (5.30)$$

Afin de passer vers une description continue, on remplace  $\delta U$  par  $\rho e \delta V$  et  $\delta S$  par  $\rho s \delta V$ , avec des champs de densité massiques d'énergie interne  $e$  et d'entropie  $s$ . La conservation de la masse, exprimée de manière condensée comme  $d(\rho \delta V) = 0$  sur un amas matériel, permet d'écrire que

$$\rho \delta V de = -pd(\delta V) + \rho \delta V T ds \quad (5.31)$$

Finalement, si on divise par  $\rho \delta V$  et utilisant la relation suivante

$$0 = d(\rho \delta V) = \rho d(\delta V) + \delta V d\rho \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d(\delta V)}{\delta V} \quad (5.32)$$

on arrive à une traduction de (5.29) dans le formalisme des milieux continus.

★ **Différentiel d'énergie interne massique.**

$$de = \frac{p}{\rho^2} d\rho + T ds \quad (5.33)$$

La conservation de la masse permet d'écrire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.34)$$

Combinant (5.33) avec cette relation, on peut remplacer l'équation pour l'énergie interne

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho T \frac{ds}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \Leftrightarrow \rho T \frac{ds}{dt} = 0 \quad (5.35)$$

ce qui résulte en une loi de conservation pour la densité d'entropie  $s$ .

★ **Conservation de la densité massique d'entropie.**

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (5.36)$$

Dans un fluide parfait, la densité massique d'entropie  $s$  est un champ matériel, conservée par le mouvement. Cette information, nous permet de revenir sur le premier principe (5.33) car avec l'information obtenue que  $ds = 0$  sur un amas matériel on a

$$de = \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (5.37)$$

Combiné avec la première loi de Joule  $de = c_v dT$ , on aboutit sur

$$c_v dT = \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (5.38)$$

Prenant la différentielle de la loi d'état  $p = \rho R_s T$ , on peut exprimer la différentielle de température comme

$$dT = \frac{1}{R_s} d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{R_s} \left(\frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho\right) \quad (5.39)$$

Injecté dans l'équation (5.38) on trouve, après quelques réorganisations des termes que

$$\frac{dp}{p} = \underbrace{\left(1 + \frac{R_s}{c_v}\right)}_{c_p/c_v = \alpha} \frac{d\rho}{\rho} \quad (5.40)$$

après utilisation de la relation de Mayer  $c_p - c_r = R_s$  et de l'indice adiabatique  $\alpha = c_p/c_v$  du milieu. Cette dernière équation s'intègre et en supposant finalement qu'on connaît la pression  $p_0$  et la densité initiale  $\rho_0$  d'une configuration de référence du gaz, elle donne

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha \quad (5.41)$$

Cette loi peut donc remplacer la loi du gaz parfait  $p = \rho R_s T$  dans les équations d'évolution et on n'a alors plus besoin de considérer la variable température de manière explicite. Par définition, on appelle

★ **Vitesse du son.** Dans un gaz parfait à pression  $p_0$ , de température  $T_0$  et de densité  $\rho_0$ , la vitesse du son est définie par

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \alpha R_s T_0 = \alpha \frac{p_0}{\rho_0} \quad (5.42)$$

où  $\alpha = c_p/c_v$  est l'indice adiabatique. ■

La loi pour la pression (5.41) peut s'écrire sous la forme

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (5.43)$$

une loi connue sous le nom de loi de Tait. On peut donc proposer une version réduite des équations pour le gaz parfait compressible

★ **Lois d'évolution du gaz parfait (réduit).** On doit satisfaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (5.44a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (5.44b)$$

avec la loi polytropique

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (5.44c)$$

On dispose d'exactly 5 équations (1 pour  $\rho$ , 3 via l'équation pour  $\vec{u}$ , 1 loi d'état qui relie  $p$  à  $\rho$ ). La conservation de la densité massique d'entropie nous a permis d'éliminer l'équation de la température et la variable de la température, mais son influence est bien prise en compte à travers la loi polytropique qui remplace la loi d'état. La température locale du milieu peut toujours être calculée par  $T = p/(\rho R_s)$ .

### Généralisation

On peut étendre les idées précédentes pour construire des modèles de fluide parfaits compressibles qui ne reposent pas sur la loi d'état du gaz parfait. Pour avoir la conservation de l'entropie, il faut une absence de source et de flux de chaleur et la contrainte ne peut dépendre que de la pression. L'utilisation de la première ou deuxième loi de Joule combinée avec une loi d'état permet d'éliminer la variable  $T$  et on aboutit sur un nouveau modèle réduit. Ceci peut mener à des lois isentropiques et adiabatiques simplifiées.

★ **Fluide barotrope.** On appelle fluide barotrope tout fluide dans lequel la pression locale est une fonction de la densité seule

$$p = \psi(\rho) \quad (5.45)$$

★ **Fluide polytropique.**

$$p = \alpha \rho^\alpha \quad (5.46)$$

Ces modèles fluides sont très souvent utilisés dans les simulations astrophysiques et plus particulièrement lorsqu'on utilise la méthode SPH (smoothed particle hydrodynamics) pour discrétiser les équations.

### 5.2.3 Navier-Stokes compressible

En combinant les lois de conservation avec les lois de comportement (fluide Newtonien, relation de Stokes, loi d'état, première loi de Joule, loi de Fourier), on obtient le système d'équations du modèle de Navier-Stokes compressible.

★ **Modèle de de Navier-Stokes compressible.**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (5.47a)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{\epsilon}) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (5.47b)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + q - \left( p + \frac{2}{3} \mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + 2\mu \vec{\epsilon} : \vec{\epsilon} \quad (5.47c)$$

avec  $\vec{\epsilon} = (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T)/2$ , le tenseur du taux de déformation. On doit fournir la densité de force  $\vec{f}$  et la source de chaleur  $q$ , les paramètres constitutives

$$\mu, \lambda, c_v \quad (5.47d)$$

et une loi d'état

$$p = p(\rho, T) \quad (5.47e)$$

compatible avec la première loi de Joule. ■

Ce jeu d'équations est fermé, ce qui signifie qu'on dispose d'exactly 6 équations (1 pour  $\rho$ , 3 via l'équation pour  $\vec{u}$ , 1 pour  $T$ , 1 loi d'état) pour déterminer les 6 champs inconnus  $\rho, \vec{u}, p, T$  caractérisant le fluide.

### 5.3 Application : les ondes acoustiques

Dans un fluide compressible on peut avoir des ondes acoustiques. A faible intensité, ces ondes acoustiques sont solution d'une équation d'onde non-dispersive qu'on souhaite isoler ici des lois d'évolution fondamentales (5.27), plutôt que du modèle équivalent (5.44) où la température n'apparaît plus explicitement. Ceci permet justement de montrer que la définition donné pour  $c_0$  au dessus, tient la route.

On commence par caractériser un état d'équilibre d'un gaz (variables avec suffix 0) au repos et soumis à aucune force extérieure,  $\vec{f} = \vec{0}$ ,

$$\vec{u}_0 = \vec{0} \quad , \quad \rho = \rho_0 \quad , \quad T = T_0 \quad , \quad p = p_0 = \rho_0 R_s T_0 \quad (5.48)$$

Ensuite, on perturbe cet état d'équilibre avec des petites déviations (notation avec primes)

$$\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}' \quad , \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad , \quad T = T_0 + T' \quad , \quad p = p_0 + p' \quad (5.49)$$

Cette proposition de solution est injectée dans les lois d'évolution et ensuite on linéarise l'équation : tous les termes non-linéaires avec au moins deux champs primes, t. q.  $\rho_0 (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$  sont ignorées. On obtient ainsi le système d'équations

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad (5.50a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} p' \quad (5.50b)$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T'}{\partial t} = -p_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}' \quad (5.50c)$$

De la loi d'état linéarisée on sort

$$p' = R_s (\rho_0 T' + \rho' T_0). \quad (5.50d)$$

Découplons ce jeu d'équations dans la variable  $\rho'$ . On combine les équations (5.50a) et (5.50c) pour éliminer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}'$  pour obtenir finalement

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad T' = \frac{p_0}{\rho_0^2 c_v} \rho' \quad (5.51)$$

Dans (5.50b), on remplace  $p'$  par l'expression donnée en (5.50d) et on utilise la relation précédente pour éliminer la variable  $T'$ . On trouve que

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -R_s \left( T_0 + \frac{p_0}{\rho_0 c_v} \right) \vec{\nabla} \rho' \quad (5.52)$$

Le terme de droite constant se transforme ainsi

$$\left( T_0 + \frac{p_0}{\rho_0 c_v} \right) = \left( 1 + \frac{R_s}{c_v} \right) R_s T_0 = \frac{c_p}{c_v} R_s T_0 = \alpha R_s T_0 \quad (5.53)$$

après utilisation de la relation de Mayer  $R_s = c_p - c_v$ . Cette simplification faite, on dérive l'équation (5.50a) par rapport au temps et on remplace  $\rho_0 (\partial \vec{u}' / \partial t)$  par la formule précédente. Ceci donne l'équation d'onde pour les ondes acoustiques linéaires.

★ **Ondes acoustiques.** Les perturbations de densité dans un gaz parfait satisfont l'équation d'onde

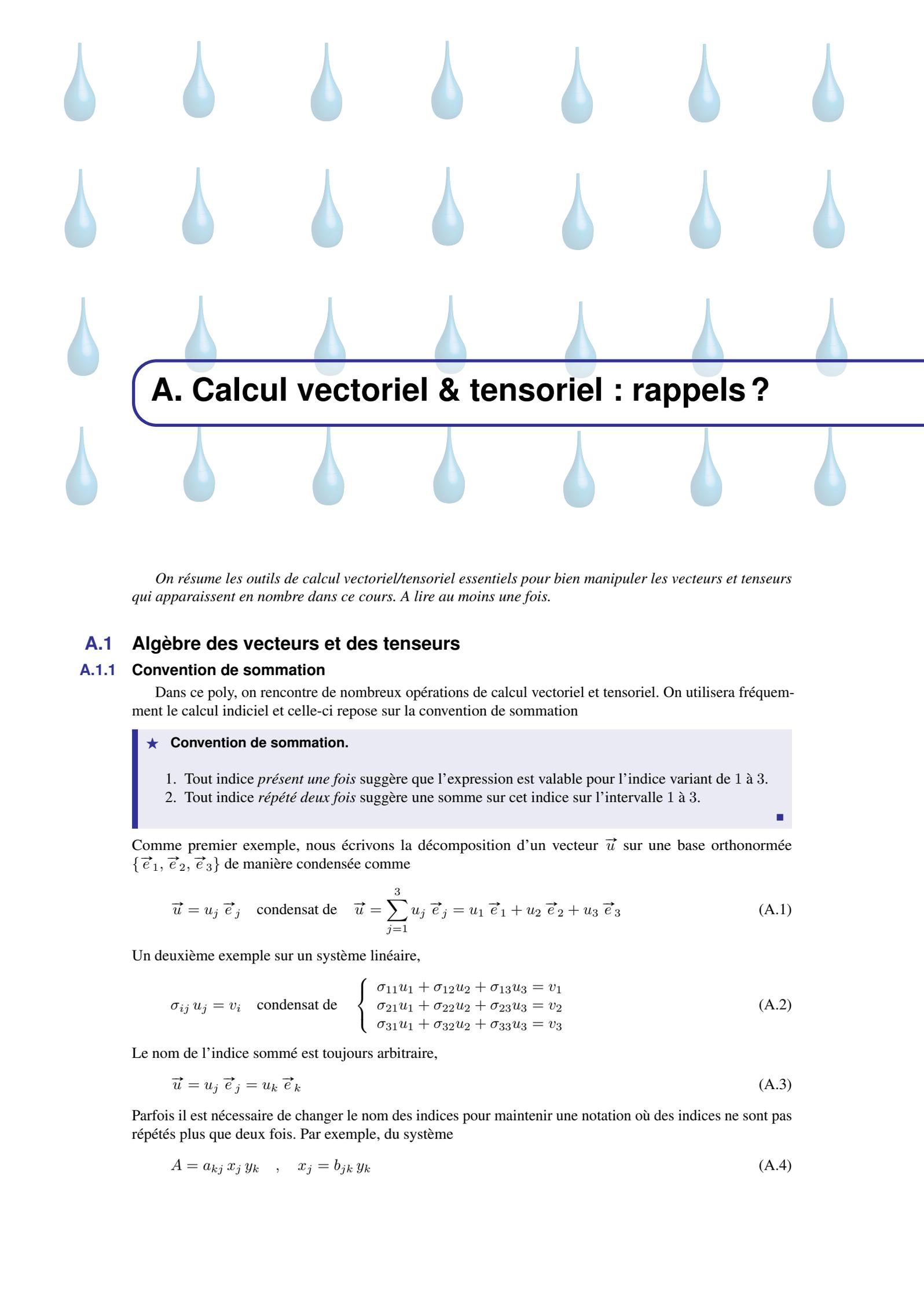
$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 \rho' \quad (5.54)$$

et la vitesse d'onde que l'on identifie est

$$c_0 = \sqrt{\alpha R_s T_0} = \sqrt{\frac{\alpha R T_0}{M_{mol}}} \quad (5.55)$$

où  $\alpha = c_p / c_v$  correspond à l'indice adiabatique du gaz,  $R$  la constante universelle du gaz,  $T_0$  la température du gaz et  $M_{mol}$  la masse molaire de l'élément constituant le gaz. ■





## A. Calcul vectoriel & tensoriel : rappels ?

On résume les outils de calcul vectoriel/tensoriel essentiels pour bien manipuler les vecteurs et tenseurs qui apparaissent en nombre dans ce cours. A lire au moins une fois.

### A.1 Algèbre des vecteurs et des tenseurs

#### A.1.1 Convention de sommation

Dans ce poly, on rencontre de nombreux opérations de calcul vectoriel et tensoriel. On utilisera fréquemment le calcul indiciel et celle-ci repose sur la convention de sommation

★ **Convention de sommation.**

1. Tout indice *présent une fois* suggère que l'expression est valable pour l'indice variant de 1 à 3.
2. Tout indice *répété deux fois* suggère une somme sur cet indice sur l'intervalle 1 à 3.

Comme premier exemple, nous écrivons la décomposition d'un vecteur  $\vec{u}$  sur une base orthonormée  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  de manière condensée comme

$$\vec{u} = u_j \vec{e}_j \quad \text{condensat de} \quad \vec{u} = \sum_{j=1}^3 u_j \vec{e}_j = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \quad (\text{A.1})$$

Un deuxième exemple sur un système linéaire,

$$\sigma_{ij} u_j = v_i \quad \text{condensat de} \quad \begin{cases} \sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3 = v_1 \\ \sigma_{21} u_1 + \sigma_{22} u_2 + \sigma_{23} u_3 = v_2 \\ \sigma_{31} u_1 + \sigma_{32} u_2 + \sigma_{33} u_3 = v_3 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Le nom de l'indice sommé est toujours arbitraire,

$$\vec{u} = u_j \vec{e}_j = u_k \vec{e}_k \quad (\text{A.3})$$

Parfois il est nécessaire de changer le nom des indices pour maintenir une notation où des indices ne sont pas répétés plus que deux fois. Par exemple, du système

$$A = a_{kj} x_j y_k \quad , \quad x_j = b_{jk} y_k \quad (\text{A.4})$$

on peut éliminer les variables  $x_j$  en substituant la deuxième expression dans la première. Mais attention ici, car

$$A = a_{kj} (b_{jk} y_k) y_k \quad \text{n'a pas de sens alors que} \quad A = a_{kj} (b_{jl} y_l) y_k \quad \text{est correcte} \quad (\text{A.5})$$

Il a donc été nécessaire de remplacer  $x_j = b_{jl} y_l$  plutôt que d'utiliser  $x_j = b_{jk} y_k$  afin d'obtenir une expression sans ambiguïté, où **aucun indice est répété plus que 2 fois**.

### A.1.2 Symboles de Kronecker & de Levi-Civita

Le symbole de Kronecker-delta est défini comme

#### ★ Kronecker-delta.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

avec  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . ■

et sert beaucoup dans le calcul indiciel. Dès qu'on repère un  $\delta_{ij}$  dans une somme sur l'un de ces indices ( $i$  ou  $j$ ) on peut simplifier l'expression car seul le terme où  $j = i$  contribuera à la somme. Par exemple

$$A_i \delta_{ij} = A_j \quad , \quad A_{ij} \delta_{jk} B_k = A_{ij} B_j = A_{ik} B_k \quad (\text{A.7})$$

Cette propriété permet de simplifier de nombreuses opérations de calcul indiciel.

Le symbole d'antisymétrie est un autre symbole souvent utilisé dans le calcul indiciel.

#### ★ Symbole d'antisymétrie (Levi-Civita).

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } ijk = 123, 231 \text{ ou } 312 \\ -1 & \text{si } ijk = 132, 213 \text{ ou } 321 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

On se souviendra de deux propriétés importantes :

##### 1. Permutation

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{jki} \quad (\text{A.9})$$

##### 2. Contraction (multiplication avec 1 indice en commun)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (\text{A.10})$$

Les deux propriétés découlent directement de la définition. On vous conseille de bien connaître ces propriétés car elle permettent de démontrer de très nombreuses relations du calcul vectoriel à l'aide du calcul indiciel.

### A.1.3 Algèbre des vecteurs

Un vecteur abstrait est un membre d'un espace vectoriel, souvenez vous de ces dix propriétés. Ici nous nous limitons à des espaces vectoriels Euclidiens, c'est à dire des espaces vectoriels munis d'un produit scalaire défini positif, noté  $\cdot$  et de dimension 3. On notera les vecteurs  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{g}, \dots$  et on pratique on rencontre les vecteurs position  $\vec{r}$ , vitesse  $\vec{v}$ , densité de force  $\vec{f}$  etc. .

Pour manipuler des vecteurs à l'aide du calcul indiciel, on les décomposera sur une base orthonormée notée  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ou  $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$  plus brièvement. En pratique, on rencontrera

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \quad (\text{A.11a})$$

$$\text{ou} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) \quad (\text{A.11b})$$

$$\text{ou} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi) \quad (\text{A.11c})$$

ce cours. Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et sphériques  $(r, \theta, \phi)$  sont discutées plus bas. Le caractère orthonormée de la base s'exprime de manière sommaire à l'aide de la relation

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.12})$$

utilisant le symbole de Kronecker delta. Son orientation positive permet d'écrire

$$\epsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k \quad \text{ou} \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (\text{A.13})$$

à l'aide du symbole d'antisymétrie.

Décomposer un vecteur sur la base orthonormée revient à écrire

$$\vec{u} = u_i \vec{e}_i \quad (\text{A.14})$$

On appelle  $u_i$  la composante du vecteur le long de  $\vec{e}_i$  et celle-ci se calcule par projection  $u_i = \vec{e}_i \cdot \vec{u}$ . Comme les bases utilisés dans ce poly sont toujours orthonormées, on n'a pas besoin de distinguer composantes co- et contravariantes (identiques), ni de considérer la base réciproque. Parfois, on représente un vecteur matriciellement par un vecteur colonne qui ne montre que les composantes. On écrira alors

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

et on souligne le symbole pour faire la différence avec le vecteur  $\vec{u}$ . La différence entre  $\vec{u}$  et  $\underline{u}$  est simple à voir :  $\vec{u}$  est indépendant de la base qu'on choisit, mais  $\underline{u}$  en dépend. La notation matricielle condensée n'est pas sans danger, surtout lors de l'utilisation de bases curvilignes : on oublie trop facilement, lors de la dérivation où l'intégration d'un vecteur décomposé sur une base curviligne, que les vecteurs de cette base  $\vec{e}_i$  peuvent varier dans l'espace. Ceci explique pourquoi on préférera les notations plus explicites avec les vecteurs de la base dans le poly.

Grâce aux propriétés de la base orthonormée ( (A.13) et (A.12)), on peut exprimer les opérations algébriques les plus courantes sur les vecteurs dans un format de calcul indiciel et matriciel.

#### ★ Produit scalaire.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i = \underline{u}^T \underline{v} \quad (\text{A.16a})$$

Démo :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_i \vec{e}_i) \cdot (v_j \vec{e}_j) = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i$

#### ★ Produit vectoriel.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i u_j v_k = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (\vec{u} \times \vec{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k \quad (\text{A.16b})$$

Démo :  $\vec{u} \times \vec{v} = (u_i \vec{e}_i) \times (v_j \vec{e}_j) = u_i v_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k = u_i v_j \epsilon_{kij} \vec{e}_k$  puis on renomme les indices sommés  $(k, i, j) \rightarrow (i, j, k)$  afin de retrouver la formule donné.

#### ★ Produit mixte.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.16c})$$

Démo :  $\vec{u} \times \vec{v} = ((u_i \vec{e}_i) \times (v_j \vec{e}_j)) \cdot (w_k \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k$

Le calcul indiciel permet de démontrer la plupart des relations usuelles du calcul vectoriel. Donnons un premier exemple. Pour démontrer la relation

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \quad (\text{A.17})$$

on considère la composante  $i$ , puis on utilise les définitions indicielles du produit scalaire et vectoriel. Démo :

$$\begin{aligned} [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}]_i &= \epsilon_{ijk} (\vec{A} \times \vec{B})_j C_k \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jmn} A_m B_n C_k \\ &= \epsilon_{jki} \epsilon_{jmn} A_m B_n C_k \\ &= (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) A_m B_n C_k \\ &= A_k C_k B_i - B_k C_k A_i \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_i - (\vec{B} \cdot \vec{C}) A_i \end{aligned}$$

Les simplifications mis en oeuvre ici sont basées sur les propriétés de multiplication et de permutation du symbole  $\epsilon_{ijk}$ . De nombreuses sommes figurant des  $\delta_{ij}$  se sont simplifiées. Remarque également que nous avons choisi des noms indices qui permettent d'éviter qu'un indice soit répété plus que deux fois.

**Exercice** Montrer de la même manière la relation

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \quad (\text{A.18})$$

#### A.1.4 Algèbre des tenseurs

Les tenseurs sont des objets qu'on utilise souvent en mécanique mais elles interviennent également en électromagnétisme et plus généralement dans la théorie des champs. On les rencontre également dans la théorie de la relativité. De manière générale, les tenseurs sont très peu maîtrisés par les étudiants et cela vient principalement de la définition abstraite d'un tenseur.

De manière abstraite, un tenseur d'ordre deux est défini comme une application bi-linéaire entre deux espaces vectoriels  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ . Cela signifie qu'il existe pour chaque vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{E}$  une image  $\vec{v} \in \mathcal{F}$ , que l'on trouve par l'application du tenseur  $\mathcal{T}$ .

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{E}, \exists \vec{v} \in \mathcal{F}, \mathcal{T} : \vec{u} \mapsto \vec{v} = \mathcal{T}\vec{u} \quad (\text{A.19a})$$

L'application doit être (bi-)linéaire ce qui signifie que  $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{E}$  et  $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{F}, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) :

$$\mathcal{T}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_1 \mathcal{T}\vec{u}_1 + \lambda_2 \mathcal{T}\vec{u}_2 \quad (\text{A.19b})$$

L'ensemble formé par toutes les possibles applications linéaires définit un espace produit tensoriel que l'on note  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$  alors on peut faire la confusion entre "opérateur linéaire" et "tenseur" dans cette vision des choses.

Dans ce cours, on aura rarement besoin de voir les tenseurs sous cet angle abstrait. On ne considèrera que des tenseurs construits sur un seul espace vectoriel Euclidien réel  $\mathbb{R}^3$  à trois dimensions. Les tenseurs deviennent concrets dès lors qu'on introduit des bases. Si  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ou  $\{\vec{e}_i, i = 1, 2, 3\}$  est une base orthonormée à orientation positive de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  alors on imagine une base de l'espace tensoriel  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  comme ceci

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2, \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, i, j = 1, 2, 3\} \quad (\text{A.20})$$

formé par produit direct  $\otimes$  ou **produit tensoriel** de la base avec elle-même. Ce produit direct n'est pas commutatif  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \neq \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$  si  $i \neq j$ . Un tenseur  $\mathcal{T}$  d'ordre 2 de  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ , sera plutôt noté  $\vec{\vec{T}}$  et on oubliera presque qu'il s'agit d'une application linéaire. Il est plus simple de considérer l'objet tenseur d'ordre en tant que nouveau objet mathématique qui se laisse décomposer à l'aide de **deux indices** sur la base comme

$$\vec{\vec{T}} = \mathcal{T}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{A.21})$$

On appelle  $\mathcal{T}_{ij}$  les composantes du tenseur  $\vec{\vec{T}}$  vis à vis de la base  $\{\vec{e}_i, i = 1, 2, 3\}$ . Un tel tenseur se laisse représenter matriciellement par une matrice carrée

$$\underline{\underline{\mathcal{T}}} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} & \mathcal{T}_{13} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} & \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{31} & \mathcal{T}_{32} & \mathcal{T}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Similaire aux vecteurs, on souligne le symbole  $\mathcal{T}$  deux fois pour faire la différence avec le tenseur  $\vec{\vec{T}}$ . Comme pour les vecteurs,  $\vec{\vec{T}}$  est indépendant de la base qu'on choisit, mais  $\underline{\underline{\mathcal{T}}}$  en dépend.

On définit une opération transposé de tenseur

★ **Transposé d'un tenseur d'ordre 2.** Le tenseur transposé de  $\vec{\vec{T}} = \mathcal{T}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  est

$$\vec{\vec{T}}^T = \mathcal{T}_{ji} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{A.23})$$

Ainsi la représentation matricielle de  $\vec{\vec{T}}^T$  sera la matrice transposée  $\underline{\underline{\mathcal{T}}}^T$ . Un tenseur est symétrique si  $\vec{\vec{T}}^T = \vec{\vec{T}}$  et anti-symétrique si  $\vec{\vec{T}}^T = -\vec{\vec{T}}$ . La plupart des tenseurs rencontrés en mécanique des fluides est symétrique. Chaque tenseur d'ordre 2 a une partie symétrique et anti-symétrique.

★ **Parties symétriques et anti-symétriques d'un tenseur d'ordre 2.** Le tenseur  $\vec{\vec{T}} = \mathcal{T}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  se sépare en deux parties

$$\begin{aligned} \vec{\vec{T}} &= \frac{1}{2} (\vec{\vec{T}} + \vec{\vec{T}}^T) + \frac{1}{2} (\vec{\vec{T}} - \vec{\vec{T}}^T) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\mathcal{T}_{ij} + \mathcal{T}_{ji}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}_{\text{partie symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathcal{T}_{ij} - \mathcal{T}_{ji}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}_{\text{partie anti-symétrique}} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Parfois on calcule la trace d'un tenseur d'ordre deux.

★ **Trace d'un tenseur.**

$$\text{tr}(\vec{\vec{T}}) = \mathcal{T}_{ii} \quad (\text{A.25})$$

Regardons maintenant les manipulations algébriques les plus courantes entre des tenseurs d'ordre deux et vecteurs. On commence par le produit tensoriel ou produit direct de deux vecteurs

★ **Produit tensoriel de deux vecteurs.**

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{A.26})$$

On postule l'associativité et la distributivité du produit  $\otimes$ . Par calcul indiciel on montre alors que  $\vec{u} \otimes \vec{v} = (u_i \vec{e}_i) \otimes (v_j \vec{e}_j) = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ . Les composantes sont des nombres et on peut donc les mettre où on veut dans ce produit, mais attention à bien préserver l'ordre  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ . Dans le cours, on rencontre notamment le tenseur

$$\vec{\vec{T}} = \rho \vec{u} \otimes \vec{u} = \rho u_i u_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{A.27})$$

qui se laisse représenter par la matrice

$$\underline{\underline{\mathcal{T}}} = \begin{bmatrix} \rho u_1 u_1 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2 u_2 & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3 u_3 \end{bmatrix} = \rho \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}}^T \quad (\text{A.28})$$

Dans les produits contractés on combine tenseurs et vecteurs entre eux à l'aide de produits scalaires. Il faut pour cela accepter deux règles de calcul. Le produit tensoriel d'un vecteur et d'un scalaire correspond à un produit normal du vecteur avec le nombre

$$\vec{a} \otimes \alpha = \alpha \otimes \vec{a} = \alpha \vec{a} \quad (\text{A.29a})$$

Puis on postule également l'associativité du produits tensoriel et du produit scalaire. Avec ces deux propriétés, on arrive sur les résultats élémentaires suivants

$$(\vec{u} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \otimes (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad (\text{A.29b})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \otimes \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (\text{A.29c})$$

$$(\vec{u} \otimes \vec{v}) \cdot (\vec{w} \otimes \vec{a}) = \vec{u} \otimes (\vec{v} \cdot \vec{w}) \otimes \vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} \otimes \vec{a} \quad (\text{A.29d})$$

Ainsi on peut ramener le produit contracté (à droite) d'un tenseur d'ordre deux avec un vecteur aux composantes par l'opération suivante.

★ **Produit contracté d'un tenseur avec un vecteur (contraction à droite).**

$$\vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{u} = \mathcal{T}_{ij} u_j \vec{e}_i \quad (\text{A.30})$$

Démo :

$$\vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{u} = (\mathcal{T}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (u_k \vec{e}_k) = \mathcal{T}_{ij} u_k \vec{e}_i \underbrace{(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)}_{\delta_{jk}} = \mathcal{T}_{ij} u_j \vec{e}_i \quad (\text{A.31})$$

La contraction d'un tenseur avec un vecteur donne un vecteur. Il est utile de remarquer qu'à travers ce produit contracté, on retrouve l'idée derrière la définition plus abstraite du tenseur :

$$\vec{v} = \vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{u} \quad \xrightarrow{\text{équivalent de}} \quad \vec{v} = \mathcal{T} \vec{u} \quad (\text{A.32})$$

Le produit contracté permet de voir comment le tenseur  $\vec{\mathcal{T}}$  peut effectivement être compris comme une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Si on décompose  $\vec{v} = v_i \vec{e}_i = \mathcal{T}_{ij} u_j \vec{e}_i$  on trouve le format indiciel de l'opération, qui lui suggère un format matriciel :

$$\vec{v} = \vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{u} \quad \xrightarrow{\text{indiciel}} \quad v_i = \mathcal{T}_{ij} u_j \quad \xrightarrow{\text{matriciel}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} & \mathcal{T}_{13} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} & \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{31} & \mathcal{T}_{32} & \mathcal{T}_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} \quad (\text{A.33})$$

Evaluer un produit contracté, revient en pratique à calculer le produit d'une matrice avec un vecteur colonne. De la même manière on introduit la contraction à gauche

★ **Produit contracté d'un vecteur avec un tenseur (contraction à gauche).**

$$\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{T}} = u_i \mathcal{T}_{ij} \vec{e}_j \quad (\text{A.34})$$

Si on appelle le vecteur  $\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{T}}$  alors on aura

$$\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{T}} \quad \xrightarrow{\text{indiciel}} \quad v_j = u_i \mathcal{T}_{ij} \quad \text{ou} \quad v_j = \mathcal{T}_{ji}^T u_i$$

$$\xrightarrow{\text{matriciel}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{31} \\ \mathcal{T}_{12} & \mathcal{T}_{22} & \mathcal{T}_{32} \\ \mathcal{T}_{13} & \mathcal{T}_{23} & \mathcal{T}_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathcal{T}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} \quad (\text{A.35})$$

Il est également possible de faire des produits contractés de tenseurs.

★ **Produit contracté d'un tenseur avec un tenseur.**

$$\vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{ij} \mathcal{S}_{jk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k \quad (\text{A.36})$$

Montrons cette relation par calcul indiciel

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathcal{S}} &= (\mathcal{T}_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\mathcal{S}_{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \\ &= \mathcal{T}_{ij} \mathcal{S}_{kl} \underbrace{\vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)}_{\delta_{jk}} \otimes \vec{e}_l \\ &= \mathcal{T}_{ij} \mathcal{S}_{jl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Il suffit de renommer l'indice  $l \rightarrow k$  pour trouver la formule. Le plus souvent, on utilisera la représentation matricielle pour évaluer ce produit contracté de deux tenseurs :

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\text{indiciel}} & \mathcal{T}_{ij} \mathcal{S}_{jk} \\ & \xrightarrow{\text{matriciel}} & \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} & \mathcal{T}_{13} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} & \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{31} & \mathcal{T}_{32} & \mathcal{T}_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} \\ \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathcal{S}}} \end{array} \quad (\text{A.38})$$

Une opération utilisée à quelques endroits dans le poly est le produit doublement contracté entre deux tenseurs d'ordre 2. On note cette opération à l'aide de  $\cdot$ . On définit l'opération par l'égalité suivante

$$(\vec{u} \otimes \vec{v}) : (\vec{w} \otimes \vec{a}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{a}) \quad (\text{A.39})$$

La logique est de combiner par deux produit scalaires les premiers vecteurs et les deuxièmes vecteurs. Le double contraction de deux tenseurs d'ordre 2 donne un scalaire, un nombre. Parfois on parle également du produit scalaire de deux tenseurs. Appliqué sur nos tenseurs représentés sur une base orthonormée, ça donne

★ **Produit doublement contracté de deux tenseurs.**

$$\vec{\mathcal{T}} : \vec{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{ij} \mathcal{S}_{ij} \quad (\text{A.40})$$

En pratique, il suffit de prendre le produit élément par élément des deux matrices  $\underline{\mathcal{T}}$  et  $\underline{\mathcal{S}}$  et de sommer tous les termes.

## A.2 Analyse des vecteurs & des tenseurs

### A.2.1 Champs scalaires, vectoriels et tensoriels

La mécanique des milieux continus s'exprime à l'aide de champs scalaires

$$\rho(\vec{r}, t) : \text{densité} \quad (\text{A.41a})$$

$$p(\vec{r}, t) : \text{pression} \quad (\text{A.41b})$$

$$e(\vec{r}, t) : \text{densité d'énergie interne} \quad (\text{A.41c})$$

de champs vectoriels

$$\vec{u}(\vec{r}, t) : \text{champ de vitesse} \quad (\text{A.41d})$$

$$f(\vec{r}, t) : \text{densité de force} \quad (\text{A.41e})$$

et de champs tensoriels (d'ordre 2)

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, t) : \text{tenseur des contraintes} \quad (\text{A.41f})$$

$$\vec{\varepsilon}(\vec{r}, t) : \text{tenseur des taux de déformations} \quad (\text{A.41g})$$

qu'on rencontrera dans la suite. A chaque endroit  $\vec{r}$  de l'espace et pour chaque instant  $t$  on associe un scalaire, un vecteur ou un tenseur d'ordre deux. En pratique, on exprime la dépendance spatiale à l'aide d'un système de coordonnées, parfois rectiligne, parfois curviligne. On agit sur les champs avec des opérateurs différentiels et on les intègre. Comment ?

### A.2.2 Systèmes de coordonnées

Dans le point de vue Eulérien, un observateur  $O$  (observateur) décrit ce qui se passe en  $M$  à l'aide d'un vecteur position que l'on notera  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Ce vecteur position dépend de 3 coordonnées.

#### Coordonnées Cartésiennes

On introduit 3 directions privilégiées orthogonales dans l'espace et on aligne celles-ci avec les vecteurs d'une base orthonormée  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Le vecteur position se décompose comme

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = x_i \vec{e}_i \quad (\text{A.42})$$

Les composantes Cartésiennes  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  du vecteur position  $\vec{r}$ , sont les coordonnées Cartésiennes du point  $M$  vis à vis du repère  $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ .

#### Coordonnées curvilignes orthogonales

Un système de coordonnées générales se définit le plus simplement par son lien aux coordonnées Cartésiennes. Ceci signifie qu'on donne

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_x + y(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_y + z(q_1, q_2, q_3) \vec{e}_z \quad (\text{A.43})$$

et aussi les relations inverses  $q_i = q_i(x, y, z)$ . On appelle

$$\vec{e}_j(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.44})$$

les trois vecteurs du repère naturel (co-variant). Certains systèmes de coordonnées curvilignes ont la propriété que  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  forme un trièdre orthogonal à chaque endroit de l'espace et dans ce cas, on parle de *coordonnées curvilignes orthogonales*. Ceci est le cas des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Dans ces cas, on introduit

$$h_j(q_1, q_2, q_3) = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right\| \quad (\text{A.45})$$

appelés facteurs d'échelle du système de coordonnées, ainsi qu'une base orthonormée naturelle

$$\vec{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.46})$$

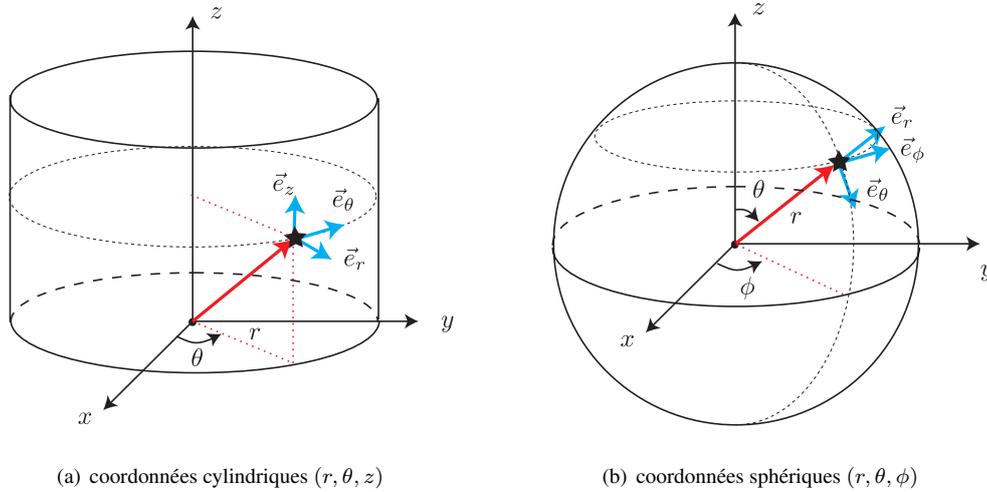


FIGURE A.1 – Système de coordonnées cylindriques et sphériques

Ces vecteurs définissent une base orthonormée locale et cette base locale change lorsqu'on se déplace dans l'espace. Les pavés de surfaces sur les surfaces coordonnées sont

$$d\vec{S}|_{q_1=Q_1} = \pm h_2(Q_1, q_2, q_3) h_3(Q_1, q_2, q_3) \vec{e}_1 \quad (\text{A.47a})$$

$$d\vec{S}|_{q_2=Q_2} = \pm h_3(q_1, Q_2, q_3) h_1(q_1, Q_2, q_3) \vec{e}_2 \quad (\text{A.47b})$$

$$d\vec{S}|_{q_3=Q_3} = \pm h_1(q_1, q_2, Q_3) h_2(q_1, q_2, Q_3) \vec{e}_3 \quad (\text{A.47c})$$

similaire pour les autres surfaces coordonnées. L'élément de volume

$$dV = |J| dq_1 dq_2 dq_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (\text{A.48})$$

avec  $J = h_1 h_2 h_3$  le Jacobien. Les facteurs d'échelles interviennent également dans les formules pour les opérateurs différentiels. Dans ce cours, on se limite aux coordonnées cylindriques et sphériques et on résume l'essentiel sur ces systèmes de coordonnées curvilignes.

### Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont habituellement notées  $(r, \theta, z)$  avec  $r \in [0, +\infty[$  le rayon cylindrique,  $\theta \in [0, 2\pi[$  l'angle azimutal et  $z \in ]-\infty, +\infty[$  la hauteur. Le vecteur position est

$$\vec{r}(r, \theta, z) = r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (\text{A.49})$$

Il s'agit d'un système de coordonnées orthogonal et les facteurs d'échelles sont trouvés comme  $(h_1, h_2, h_3) = (h_r, h_\theta, h_z) = (1, r, 1)$ . Le repère naturel orthonormé

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{A.50a})$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (\text{A.50b})$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (\text{A.50c})$$

On remarque

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad (\text{A.51})$$

Sur des surfaces coordonnées de  $r, \theta, z$  on a respectivement les éléments de surface

$$d\vec{S}|_{r=R} = \pm R d\theta dz \vec{e}_r, \quad d\vec{S}|_{\theta=\Theta} = \pm r dr dz \vec{e}_\theta, \quad d\vec{S}|_{z=Z} = \pm r dr d\theta \vec{e}_z \quad (\text{A.52})$$

L'élément de volume est

$$dV = r dr d\theta dz \quad (\text{A.53})$$

**Coordonnées sphériques**

Les coordonnées sphériques sont habituellement notées  $(r, \theta, \phi)$  avec  $r \in [0, +\infty[$  le rayon sphérique,  $\theta \in [0, \pi]$  la co-latitude et  $\phi \in [0, 2\pi]$  l'angle azimutal. Le vecteur position est

$$\vec{r}(r, \theta, z) = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{A.54})$$

Il s'agit d'un système de coordonnées orthogonal et les facteurs d'échelles sont trouvés comme  $(h_1, h_2, h_3) = (h_r, h_\theta, h_\phi) = (1, r, r \sin \theta)$ . Le repère naturel orthonormé est

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (\text{A.55a})$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \quad (\text{A.55b})$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \quad (\text{A.55c})$$

et on remarque

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta, & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} &= \sin \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{e}_r, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} &= \cos \theta \vec{e}_\phi, \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Sur des surfaces coordonnées de  $r, \theta, z$  on a respectivement les éléments de surface

$$d\vec{S}|_{r=R} = \pm R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r, \quad d\vec{S}|_{\theta=\Theta} = \pm r^2 \sin \Theta dr d\phi \vec{e}_\theta, \quad d\vec{S}|_{\phi=\Phi} = \pm r^2 dr d\theta \vec{e}_\phi \quad (\text{A.57})$$

L'élément de volume est

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{A.58})$$

**A.2.3 Opérateurs différentiels**

Les opérateurs différentiels prennent leur forme la plus simple dans un système de coordonnées Cartésien. On utilisera la convention de sommation. Ces expressions sont très utiles pour faire du calcul indiciel.

**★ Opérateurs différentiels (Cartésien).**

Opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.59a})$$

Opérateur advectif

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.59b})$$

Gradient de champ scalaire

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad (\text{A.59c})$$

Gradient de champ vectoriel

$$\overleftrightarrow{\nabla} u = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{A.59d})$$

Divergence d'un champ vectoriel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.59e})$$

Divergence d'un champ tensoriel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i \quad (\text{A.59f})$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \vec{e}_i \quad (\text{A.59g})$$

Laplacien d'un champ scalaire

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{A.59h})$$

Laplacien d'un champ vectoriel

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \vec{e}_i \quad (\text{A.59i})$$

Si on utilise un système de coordonnées curvilignes, les opérateurs différentiels sont plus compliqués. Cela vient principalement du fait que la base locale varie dans l'espace. Ci dessous, on donne les formules pour un système de coordonnées curviligne orthogonale  $(q_1, q_2, q_3)$ . Il suffit de remplacer

$$(\text{Cylindrique}) : \begin{cases} (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, z) \\ (h_1, h_2, h_3) = (1, r, 1) \end{cases} \quad (\text{A.60a})$$

$$(\text{Sphérique}) : \begin{cases} (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi) \\ (h_1, h_2, h_3) = (1, r, r \sin \theta) \end{cases} \quad (\text{A.60b})$$

pour retrouver les formules en coordonnées cylindriques et sphériques. Certaines formules impliquent des dérivées partielles des vecteurs  $\vec{e}_i$  du repère naturel orthonormé et il faut alors utiliser des relations telles que (A.51) et (A.56).

#### ★ Opérateurs différentiels (curviligne orthogonal).

Opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (\text{A.61a})$$

Opérateur advectif

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (\text{A.61b})$$

Gradient de champ scalaire

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \vec{e}_i \quad (\text{A.61c})$$

Gradient de champ vectoriel

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_j} \otimes \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{h_j} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \frac{u_i}{h_j} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} \otimes \vec{e}_j \right) \quad (\text{A.61d})$$

Divergence d'un champ vectoriel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(u_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right) \quad (\text{A.61e})$$

Divergence d'un champ tensoriel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (\sigma_{i1} h_2 h_3 \vec{e}_i) + \frac{\partial}{\partial u_2} (\sigma_{i2} h_3 h_1 \vec{e}_i) + \frac{\partial}{\partial u_3} (\sigma_{i3} h_1 h_2 \vec{e}_i) \right] \quad (\text{A.61f})$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 u_1 & h_2 u_2 & h_3 u_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.61g})$$

Laplacien d'un champ scalaire

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \quad (\text{A.61h})$$

On ne donne pas de formule générale pour le Laplacien d'un champ vectoriel, qui s'obtient comme la divergence du gradient d'un champ vectoriel. Cette formule n'a rien de simple.

**Exercice** Retrouver toutes les formules en coordonnées cylindriques et sphériques en tant qu'exercice. ■

Ci-dessous un ensemble d'identités vectorielles

★ **Identités vectorielles.**

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = \nabla^2 U \quad (\text{A.62a})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{A.62b})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = \vec{0} \quad (\text{A.62c})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{A.62d})$$

$$\vec{\nabla}(UW) = U \vec{\nabla} W + W \vec{\nabla} U \quad (\text{A.62e})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (U \vec{A}) = U \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U \quad (\text{A.62f})$$

$$\vec{\nabla} \times (U \vec{A}) = \vec{\nabla} U \times \vec{A} + U \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A.62g})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (\text{A.62h})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (\text{A.62i})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{B} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (\text{A.62j})$$

Chacune de ces identités vectorielles peut être démontrée utilisant l'expression des opérateurs en coordonnées Cartésiennes et les propriétés du symbole d'anti-symétrie (permutation & multiplication).

**Exercice** Démontrer quelques uns les formules à l'aide du calcul indiciel. ■

Donnons un exemple :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \epsilon_{klm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right) \\
 &= \vec{e}_i \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} \\
 &= \vec{e}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j \partial x_l} \\
 &= \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right) - \vec{e}_i \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
 \end{aligned} \tag{A.63}$$

## A.2.4 Théorèmes d'intégration

### Théorème de la divergence

Le théorème d'intégration d'Ostrogradsky sera utilisé de nombreuses fois dans ce cours. Il est important de bien le maîtriser.

★ **Théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky).** Le flux sortant du champ vectoriel  $\vec{u}$  ou tensoriel  $\vec{\sigma}$  à travers une surface fermée  $\Sigma$  équivaut à l'intégrale de la divergence sur le volume  $\mathcal{V}$  entouré par  $\Sigma$ . Soit

$$\oiint_{\Sigma} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV \tag{A.64}$$

et

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} dV \tag{A.65}$$

Il faut prendre soin d'orienter  $d\vec{S}$  vers l'extérieur. ■

Dans les manipulations des formules il est utile de savoir reconnaître la version indicielle de ce théorème

$$\oiint_{\Sigma} (\dots)_i dS_i = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\dots)_i dV \tag{A.66}$$

et

$$\vec{e}_i \oiint_{\Sigma} (\dots)_{ij} dS_j = \vec{e}_i \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\dots)_{ij} dV \tag{A.67}$$

avec entre les parenthèses (...) des quantités diverses.

**Exercice** Montrer par calcul indiciel et utilisant le théorème de la divergence que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \vec{A} dV = \oiint_{\Sigma} (\vec{n} \times \vec{A}) dS \tag{A.68}$$

Ici  $\vec{n}$  est la normale unitaire sortante et  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  ou  $dS_i = n_i dS$  en format indiciel. ■

On donne la solution

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \vec{A} dV &= \iiint_{\mathcal{V}} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} dV \\
 &= \vec{e}_i \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{ijk} A_k) dV \\
 &= \vec{e}_i \oiint_{\Sigma} \epsilon_{ijk} A_k dS_j \\
 &= \oiint_{\Sigma} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} n_j A_k dS \\
 &= \oiint_{\Sigma} (\vec{n} \times \vec{A}) dS
 \end{aligned} \tag{A.69}$$

**Exercice** Montrer par calcul indiciel et utilisant le théorème de la divergence que

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \, dV = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \, dV + \oiint_{\Sigma} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.70})$$

### Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes est également utilisé à plusieurs endroits (théorème de circulation de Kelvin, vortex de Lamb-Oseen).

★ **Théorème de Stokes.** La circulation du champ vectoriel  $\vec{u}$  le long d'un contour  $\mathcal{C}$  fermée équivaut à l'intégrale du rotationnel sur toutes les surfaces volume  $S$  ayant  $\mathcal{C}$  comme bord.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.71})$$

Ici aussi, il faut faire attention avec les signes de  $d\vec{r}$  et  $d\vec{S}$ . Si on aligne la main droite avec la direction dans laquelle on parcourt le contour, le petit doigt indique la direction dans laquelle on doit orienter  $d\vec{S}$ .

La version indicielle de cette formule est

$$\oint_{\Sigma} (\dots)_i \, dx_i = \iint_S \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\dots)_k \, dS_i \quad (\text{A.72})$$

## B. Formulaire

On exprime l'incompressibilité, l'équation de Navier-Stokes et le tenseur des contraintes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \eta \nabla^2 \vec{u}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}} + \eta (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{u}^T)$$

dans plusieurs systèmes de coordonnées.

### En coordonnées Cartésiennes

Incompressibilité

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \eta \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \eta \left[ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Matrice des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}} + \eta \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

**En coordonnées cylindriques**

Incompressibilité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Matrice des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \eta \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

**En coordonnées sphériques**

Incompressibilité

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r \\ &+ \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_r)}{\partial r^2} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta \\ &+ \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + f_\phi \\ &+ \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_\phi)}{\partial r^2} - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

Matrice des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$$

$$+ \eta \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) \\ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) \\ \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) & \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) & 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \end{bmatrix}$$