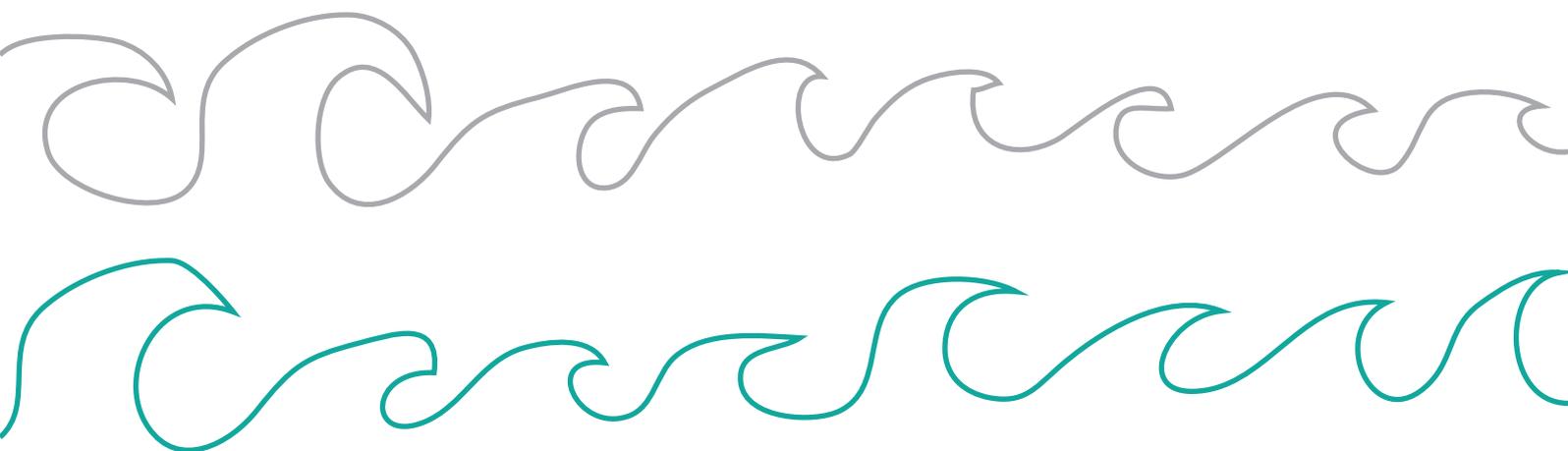


# Mécanique des fluides : TD

M1 FONDA, MAG 1, ENS Physique, année 2023-2024

[wietze.herreman@universite-paris-saclay.fr](mailto:wietze.herreman@universite-paris-saclay.fr)





# 1. Analyse dimensionnelle & quiz fluide

*L'analyse dimensionnelle est un outil de base que tout physicien doit maîtriser. Elle permet de simplifier des relations fonctionnelles entre différentes grandeurs physiques et est à la base du principe de similitude. Nous profiterons également de ce premier TD pour mesurer votre intuition physique sur les fluides.*

## 1.1 Rappels sur l'analyse dimensionnelle

### 1.1.1 Comment conduire une analyse dimensionnelle

Selon le théorème de Buckingham, une relation fonctionnelle entre  $k$  grandeurs physiques, qui dépendent de  $r$  dimensions physiques ( $M$  pour masse,  $L$  pour longueur,  $T$  pour temps,  $Q$  pour charge électrique, ...) peut être réécrite comme une relation fonctionnelle qui relie  $k - r$  grandeurs adimensionnées. Toute méthode qui mène à  $k - r$  grandeurs adimensionnées indépendantes convient, mais trop d'improvisation fait courir le risque de rater des nombres.

Le plus simple et sûr est de suivre les étapes suivantes.

1. On énumère les grandeurs physiques dimensionnelles  $u_1, \dots, u_k$ . Souvent on démarre d'une phrase, "on admet que  $u_1$  dépend de  $u_2, \dots, u_k$ . Le point de départ est donc l'écriture de la relation

$$u_1 = f(u_2, u_3, \dots, u_k) \quad (1.1)$$

où la dépendance fonctionnelle  $f$  est totalement inconnue. Le but est de simplifier cette dépendance fonctionnelle.

2. On exprime la dimension physique des différentes variables à l'aide de puissances rationnelles de  $M, L, T, Q$  qui représentent les dimensions indépendantes. Par exemple, si  $u_1 = U$  est une vitesse,  $u_2 = F$  une force,  $u_3 = m$  une masse,  $u_4 = \nu$  une viscosité cinématique

$$[U] = LT^{-1} \quad , \quad [F] = MLT^{-2} \quad , \quad [m] = M \quad , \quad [\nu] = L^2T^{-1} \quad (1.2)$$

On mesure ici le nombre  $r$  de dimensions physiques indépendantes. En mécanique des fluides,  $r = 2$  ou 3 le plus souvent. Dans les plasmas,  $r = 2, 3, 4$ .

3. On choisit  $r$  grandeurs dans la liste  $u_1, \dots, u_k$  pour construire  $r$  échelles typiques pour  $M, L, T$  (et  $Q$ ). Par exemple, avec notre vitesse  $u_1 = U$ , force  $u_2 = F$  et masse  $u_3 = m$ , on peut construire

$$M = m, \quad T = \frac{Um}{F}, \quad L = \frac{U^2m}{F} \quad (1.3)$$

4. Avec les  $k - r$  grandeurs restantes, on construit  $k - r$  nombres sans dimension, souvent notés  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{k-r}$ . On divise tout simplement ces grandeurs restantes par leur dimension physique et on remplace  $M, L, T, Q$  par les expressions obtenues à l'étape précédente. Dans notre exemple, seul  $u_4 = \nu$  reste inutilisé. On a donc un seul nombre sans dimension qui sera

$$\Pi_1 = \frac{\nu}{[L]} = \frac{\nu}{L^2 T^{-1}} = \frac{\nu}{\frac{U^4 m^2}{F^2} \frac{F}{Um}} = \frac{F\nu}{mU^3} \quad (1.4)$$

5. C'est la fin de l'analyse. La relation fonctionnelle initialement supposée se simplifie en

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \dots, \Pi_{k-r}) \quad (1.5)$$

avec  $\Phi$  une dépendance fonctionnelle inconnue. Ceci est une simplification considérable par rapport au point de départ car il ne reste que  $k - r$  variables. S'il y a un seul nombre sans dimension, si  $k - r = 1$  alors nous sommes à l'apothéose de l'analyse dimensionnelle car alors on a

$$\Pi_1 = Cst \quad (1.6)$$

Ceci est le cas de l'exemple donné. Si les variables  $U, F, m, \nu$  sont liées alors cela nécessite que

$$\frac{F\nu}{mU^3} = Cst \Rightarrow F = Cst \times \frac{mU^3}{\nu} \quad (1.7)$$

La constante dépend de considérations géométriques, mais la dépendance fonctionnelle de, par exemple, la force  $F$  vis-à-vis de  $m, U, \nu$  est intégralement fixée. La simplification est donc très grande car on a réussi à passer de  $F = f(U, m, \nu)$  à  $F = Cst \times \frac{mU^3}{\nu}$ .

Les nombres sans dimension trouvés en suivant cette (ou tout autre) procédure ne sont **jamais uniques**. On peut construire d'autres nombres alternatifs en les multipliant/divisant entre eux où en prenant des puissances. En réalité, certains choix conviennent mieux que d'autres, mais pour comprendre pourquoi il faut prendre en considération les lois physiques qui gouvernent le problème.

### 1.1.2 Principe de similitude

En mécanique des fluides et plus spécifiquement en aéronautique, le principe de similitude a été d'une importance cruciale.

#### ★ Le principe de similitude. Le principe de similitude

Un modèle (ou maquette) est une représentation d'un système physique que l'on peut utiliser pour prévoir le comportement d'un prototype dans certaines conditions. Le prototype vérifie une relation donnée entre les valeurs adimensionnées,

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \pi_3, \dots, \Pi_n). \quad (1.8)$$

Pour que les phénomènes physiques présents sur le modèle soient identiques à ceux du prototype, les nombres sans dimensionnés du modèle et du prototype doivent être égaux :

$$\Pi_{1m} = \Pi_1, \dots, \Pi_{nm} = \Pi_n, \Pi_{2m} = \Pi_2, \dots, \Pi_{nm} = \Pi_n, \quad (1.9)$$

c'est la condition de similitude (similitude géométrique, dynamique, cinématique..). ■

Avant les années 70, et l'essor de la simulation numérique, tous les avions ont été dimensionnés à partir de petites maquettes placées dans des souffleries. Le principe de similitude permet de dimensionner ces maquettes et d'extrapoler les résultats des mesures vers la situation du prototype de taille réelle.

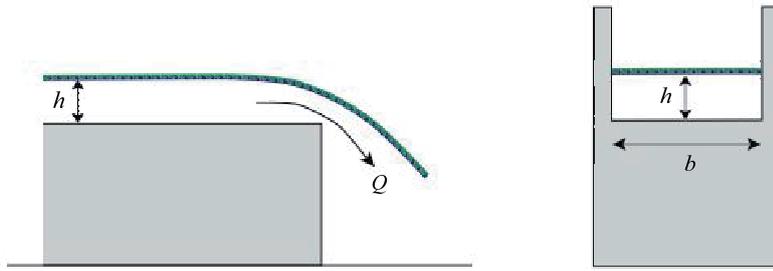


FIGURE 1.1 – Vue de côté et de face du déversoir.

## 1.2 Exercices

### 1.2.1 Force de frottement visqueuse sur une sphère

On admet que la force de frottement  $F$  agissant sur une particule sphérique se déplaçant très lentement dans un fluide visqueux est une fonction du rayon  $R$ , de la vitesse de la particule  $V$  et de la viscosité dynamique  $\eta$  (unité Pa.s). Montrer que l'analyse dimensionnelle suggère que

$$F = C\eta VR \quad (1.10)$$

La constante  $C$  dépend de la forme de l'objet et des conditions limites hydrodynamiques qui s'appliquent dessus. Pour une sphère solide, on calcule  $C = 6\pi$ , pas sans effort, comme on le verra en cours.

### 1.2.2 Débit d'un déversoir rectangulaire

On suppose que le débit volumique  $Q$  ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ) d'un écoulement permanent d'un fluide par un déversoir rectangulaire est une fonction de la hauteur  $h$  du fluide en amont du déversoir, de la largeur  $b$  du déversoir et de la gravité  $g$ . Déduire la relation adimensionnée

$$\frac{Q}{g^{1/2} h^{5/2}} = \Phi \left( \frac{h}{b} \right). \quad (1.11)$$

de l'analyse dimensionnelle.

### 1.2.3 Sillage oscillatoire et génération de tourbillons

On souhaite étudier la résistance aux oscillations d'une structure de pont soumise au vent. On considère un corps de section de largeur  $D$  et de longueur  $L$  placé dans un écoulement de fluide incompressible de vitesse uniforme  $V$ . On sait que, sous certaines conditions, il peut se développer dans le sillage de ce corps des tourbillons qui se détachent régulièrement à une fréquence  $\omega$  bien définie (allée de tourbillons de Bénard-von Kármán). Cet écoulement oscillatoire peut entrer en résonance avec des fréquences propres d'oscillations de la structure, et provoquer des vibrations nuisibles.

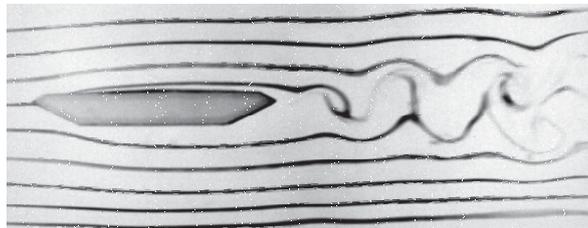


FIGURE 1.2 – Génération de tourbillons dans le sillage d'un obstacle de dimension  $L \times D$  (l'écoulement va de gauche à droite).

La structure de pont considérée est de dimension  $D = 1$  m et  $L = 3$  m et l'on veut connaître pour une vitesse du vent  $V = 50$  km/h la fréquence d'oscillation  $\omega$  pouvant être nuisible pour le pont. On prendra la

masse volumique et la viscosité dynamique de l'air  $\rho = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\eta = 1,79 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-2}$ . Pour cela, on réalise une maquette à échelle réduite de dimension  $D_m = 20 \text{ mm}$ , que l'on place dans un tunnel à eau. On prendra la masse volumique et la viscosité dynamique de l'eau :  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\eta = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-2}$ .

1. On admettra que la fréquence  $\omega$  est une fonction des dimensions  $D$  et  $L$  du corps, de la vitesse du fluide  $V$ , de la masse volumique  $\rho$  et de la viscosité dynamique  $\eta$  du fluide. Montrer que sous cette hypothèse, l'analyse dimensionnelle donne :

$$St = \Phi(D/L, Re) \quad (1.12)$$

où  $St = \omega D/V$  est le nombre de Strouhal et  $Re = \rho V D/\eta$  le nombre de Reynolds.

2. Déterminer la dimension  $L_m$  (similitude géométrique) ainsi que la vitesse de l'eau  $V_m$  pour le modèle (similitude du nombre de Reynolds).
3. On mesure sur la maquette une fréquence de détachement tourbillonnaire  $\omega_m = 50 \text{ Hz}$ . En déduire la fréquence des tourbillons  $\omega$  sur le prototype (similitude du nombre de Strouhal).

### 1.2.4 Spectre de turbulence de Kolmogorov

Le spectre de Kolmogorov (1941) est un monument de la théorie de la turbulence qui a été observé dans de très nombreuses expériences et situations naturelles. Dans cette théorie, le champ de vitesse  $\vec{u}$  est considéré comme un champ aléatoire en temps et en espace. La turbulence est dite homogène (partout semblable) et isotrope (aucune direction privilégiée). Afin de caractériser les propriétés statistiques, on se place le plus souvent dans l'espace de Fourier 3D. Suite à l'isotropie, ce n'est que  $k = \|\vec{k}\|$ , la norme du vecteur d'onde qui influence ces propriétés statistiques. Si  $V$  est le volume alors on définit une "énergie" cinétique moyenne sur le volume  $K$  comme

$$K = \frac{1}{2V} \iiint_V \|\vec{u}\|^2 dV = \int_0^{+\infty} E(k) dk, \quad (1.13)$$

où l'on a défini la densité spectrale d'énergie  $E(k)$ , qui mesure en quelque sorte l'énergie contenue dans les structures ayant des nombre d'ondes entre  $k$  et  $k + dk$ . La dissipation moyenne d'énergie est définie comme

$$\epsilon = \frac{1}{V} \iiint_V \nu (\overline{\nabla u} + \overline{\nabla u^T}) : \overline{\nabla u} dV = 2\nu \int_0^{+\infty} k^2 E(k) dk \quad (1.14)$$

Dans la théorie de Kolmogorov, on admet que la densité spectrale d'énergie  $E$  ne dépend que de  $k$  et de  $\epsilon$ , la dissipation moyenne :

$$E = f(\epsilon, k) \quad (1.15)$$

Montrer par analyse dimensionnelle que cela implique que

$$E = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.16)$$

avec  $C$  une constante inconnue. Une des raisons de la robustesse de cette loi en  $k^{-5/3}$  réside dans le fait qu'on puisse la retrouver par l'analyse dimensionnelle.

## 1.3 Quiz fluide

En M1, il est probable que vous ayez déjà quelques notions de mécanique des fluides. Ici nous proposons quelques questions qui testent votre intuition fluide.

1. Un physicien (donc) fainéant veut remplacer l'eau sale du bocal de son poisson rouge. Il place le bocal sous le robinet et laisse couler un débit d'eau  $Q$ . Le surplus déborde et part dans l'évier. Combien de temps faut-il attendre pour avoir une eau qui ne contient que 10 % des saletés précédemment présentes.
2. Formuler la loi de Bernoulli. Expliquer le fonctionnement d'un tube Venturi.

3. On remplit un tonneau de hauteur  $H$  avec de l'eau. Si on ouvre un robinet en bas du tonneau, l'eau s'échappe avec une certaine vitesse typique. Estimer cette vitesse. Cette vitesse, dépend-t-elle du diamètre  $D$  du robinet ?
4. Dans l'atmosphère de nombreux écoulements se mettent en place à cause de la convection thermique. La température induit des différences de densité  $\Delta\rho$  locales et cela crée des écoulements ascendants ou descendants suite à la poussée d'Archimède. Si on note  $H$  la hauteur de l'atmosphère et  $g$  la gravité, quelle peut être la vitesse  $U$  maximale qu'on peut produire par convection.
5. En figure 1.3, nous montrons un diagramme spectaculaire qui affiche le poids  $P$  de l'objet volant en fonction de sa vitesse typique  $U$  de vol en l'air. Ce diagramme va des plus petites mouchettes au Boeing 747. Pouvez-vous expliquer cette loi d'échelle qui suggère que  $P \sim U^6$  ?
6. On imagine une éolienne avec trois ailes de longueur  $L$ . La densité de l'air est  $\rho$  et  $U$  la vitesse du vent. Quelle est la puissance maximale que l'éolienne peut produire.
7. Deux avions ne peuvent pas voler directement l'un après l'autre. Pourquoi ?
8. Les gaz font partie des fluides et on peut donc utiliser les lois de la mécanique des fluides pour expliquer leur mouvement. En même temps, la thermodynamique et la physique statistique décrivent également les gaz. Sous quelle forme va-t-on trouver les lois thermodynamiques dans les modèles de mécanique des fluides ?

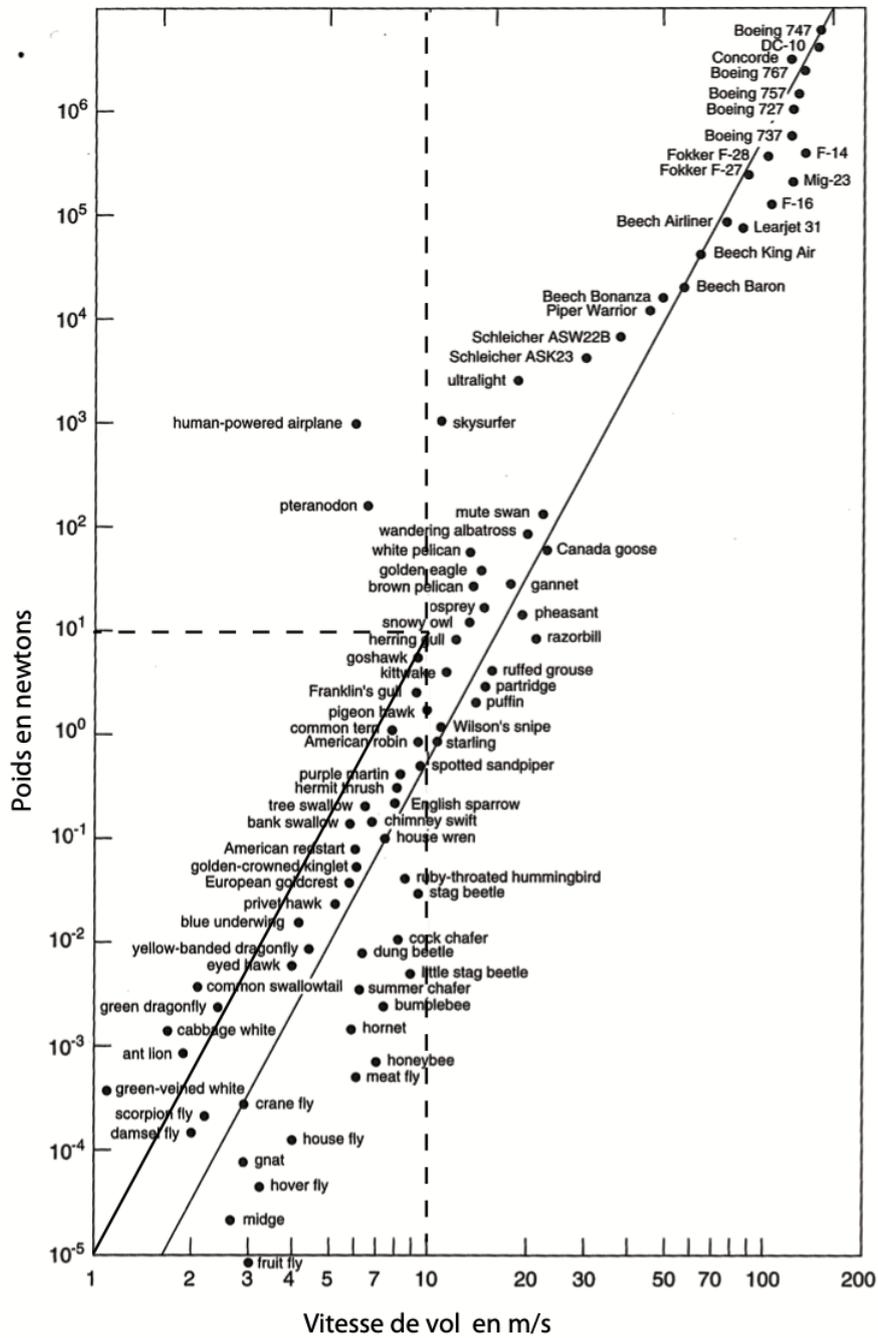


FIGURE 1.3 – Diagramme qui montre la vitesse du vol en fonction du poids. Ref?

## 2. Bilans sur volumes de contrôle

Les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement, parfois en combinaison avec l'équation de Bernoulli permettent dans certaines situations d'obtenir des informations complexes d'un système hydrodynamique et cela sans avoir caractérisé l'écoulement ou la pression en tout son détail.

### 2.1 Force hydrodynamique sur plan incliné

Lorsqu'un jet impacte une plaque, il exerce une force dessus. L'objectif de l'exercice est de calculer cette force pour la situation particulière d'un système invariant en 2D de la figure 2.1 où la plaque est inclinée d'un angle  $\alpha$ .

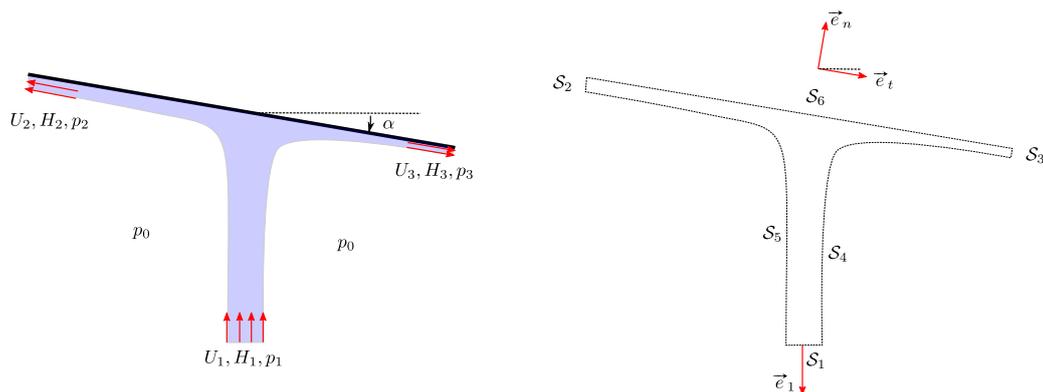


FIGURE 2.1 – Un jet de fluide parfait impacte une plaque inclinée. On calcule la force qui s'exerce sur la plaque et on identifie les vitesses et hauteurs de fluide de sortie.

Le fluide est supposé parfait et incompressible et de densité  $\rho$ . On ignore la gravité dans ce problème ainsi que la tension de surface. La pression du gaz à l'extérieur est  $p_0$ . Le jet arrive par en bas, à vitesse  $U_1$  connue. Sa section transverse vaut  $H_1$  et sa pression vaut  $p_1$ . Sur la plaque, le jet est scindé en deux. Au niveau des surfaces  $S_2$ ,  $S_3$  on cherche à connaître les vitesses  $U_2$  et  $U_3$  que l'on peut supposer uniformes. On veut

également connaître la hauteur des couches est  $H_2$  et  $H_3$ , ainsi que la pression  $p_2$  et  $p_3$ . On utilise un volume de contrôle (fixe) délimité par la surface  $\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_6$ .

1. Dans cet exercice, qu'est-ce qu'on pourrait apprendre de l'analyse dimensionnelle ?
2. Dans l'exercice, on utilise l'identité

$$\oiint_{\Sigma} d\vec{S} = \vec{0} \quad (2.1)$$

pour toute surface  $\Sigma$  fermée. Démontrer cette relation à l'aide du théorème de la divergence et utilisant un champ vectoriel bien choisi.

3. Exprimer le vecteur  $\vec{e}_1$  donnant la direction sortante en  $\mathcal{S}_1$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_t, \vec{e}_n$ .
4. Si le champ de vitesse est uniforme aux endroits  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ , que peut-on dire sur la pression à ces endroits ? (Ecrire l'équation d'Euler)
5. Que vaut la pression sur les surface libres,  $\mathcal{S}_4$  et  $\mathcal{S}_5$ . En déduire la pression sur les surfaces  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$ .
6. La loi de Bernoulli s'applique sur les lignes de courant qui se trouvent au niveau des surfaces libres  $\mathcal{S}_4$  et  $\mathcal{S}_5$ . Que peut on déduire sur les vitesses  $U_1, U_2, U_3$  ?
7. Exprimer la conservation de la masse dans ce système. En déduire un lien entre  $H_1, H_2$  et  $H_3$ .
8. Exprimer le bilan de quantité de mouvement. N'y faire apparaître que les vecteurs  $\vec{e}_t, \vec{e}_n$ .
9. La force de pression sur la plaque est nécessairement selon  $\vec{e}_n$ . Trouver à l'aide de la propriété (2.1) une formule pour la force de pression totale qui s'exerce sur la plaque.
10. La composante  $\vec{e}_t$  du bilan de quantité de mouvement suggère une nouvelle relation qui relie  $H_1, H_2$  et  $H_3$ . Combiner cette relation avec la première relation qui sortait de la conservation de masse, pour calculer  $H_2$  et  $H_3$  en fonction de  $H_1$  et  $\alpha$ .
11. Question ouverte : tentez de calculer le couple qui s'exerce sur la plaque ? On veut le couple par rapport à l'axe qui passe par l'intersection du milieu du jet entrant et la plaque.

## 2.2 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile, c'est-à-dire à un changement brutal de la profondeur de  $H_1$  en amont à  $H_2$  en aval, avec  $H_1 < H_2$  (cf. figure 2.2) dans un canal de largeur  $L$  (perpendiculaire au plan de la figure).

On choisit un volume de contrôle fixe  $\mathcal{V}$  ayant la forme d'un parallélépipède rectangle (schématisé avec des lignes interrompues dans la figure 2.2). On suppose le fluide parfait et incompressible de densité  $\rho$ . En amont comme en aval du ressaut, on suppose l'écoulement  $\vec{u} = U_1 \vec{e}_x$  et  $\vec{u} = U_2 \vec{e}_x$  uniforme et horizontale. On note  $p_0$  la pression atmosphérique de l'air au dessus du fluide.

1. Ecrire l'équation d'Euler et montrer que la répartition de la pression dans le fluide en amont et en aval du ressaut est hydrostatique.
2. Calculer la pression  $p_1(z)$  en amont et  $p_2(z)$  en aval du ressaut en fonction de  $\rho$ , la hauteur  $z$  et  $p_0$ .
3. Exprimer le bilan de masse  $dM/dt = 0$  dans le volume de contrôle stationnaire et montrer qu'elle permet de retrouver

$$U_1 H_1 = U_2 H_2 \quad (2.2)$$

4. Exprimer le bilan de quantité de mouvement  $d\vec{P}/dt = 0$  dans le volume de contrôle stationnaire et

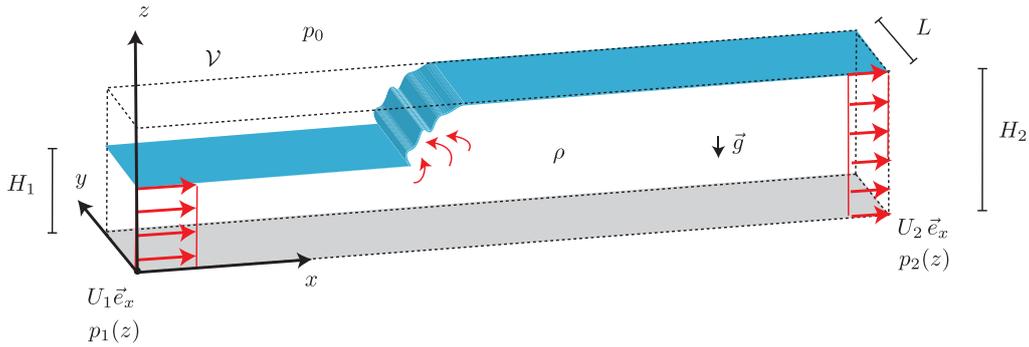


FIGURE 2.2 – Ressaut hydraulique.

montrer la composante selon  $x$  de ce bilan suggère une relation entre les grandeurs amont et aval :

$$\frac{1}{2} g H_1^2 + U_1^2 H_1 = \frac{1}{2} g H_2^2 + U_2^2 H_2, \quad (2.3)$$

5. A l'aide des deux relations trouvées, exprimer  $U_1$  et  $U_2$  en fonction de  $H_1$ ,  $H_2$  et  $g$ .
6. Mettre ce résultat sous forme adimensionné, en exprimant les nombres de Froude amont et aval :

$$Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gH_1}}, \quad Fr_2 = \frac{U_2}{\sqrt{gH_2}} \quad (2.4)$$

en fonction du rapport d'aspect

$$\alpha = H_2/H_1 \quad (2.5)$$

7. Faire un schéma qui montre  $Fr_1$  et  $Fr_2$  en fonction de  $\alpha$ . Montrer que pour  $\alpha > 1$  on a  $Fr_1 > 1$  et  $Fr_2 < 1$ . Un écoulement pour lequel on a  $Fr > 1$  est dit *super-critique*, ou *torrentiel*; lorsque  $Fr < 1$ , l'écoulement est dit *sous-critique*, ou *fluvial*.
8. On admet que  $\sqrt{gH}$  représente la vitesse de propagation des ondes à la surface d'un fluide de faible profondeur  $H$ . En raisonnant sur la direction de propagation de perturbations à la surface en amont et en aval du ressaut, proposez une interprétation physique pour la formation du ressaut.
9. Avec un débit volumique par unité de largeur de  $0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  et une profondeur d'approche de  $0.2 \text{ m}$ , calculer  $Fr_1$  puis  $H_2$ .

### Mascaret

Un mascaret est une discontinuité de hauteur d'eau, qui peut survenir lorsque le courant d'un fleuve rencontre la marée montante (figure 2.3). Devant le mascaret, la hauteur est  $H_1$  ( $H_1 < H_2$ ) et l'eau est quasiment immobile.

10. Par un changement de référentiel Galiléen adéquat le problème du mascaret est équivalent à celui du ressaut hydraulique. Trouver la vitesse de propagation  $c$  du mascaret en fonction de  $H_1$ ,  $H_2$  et  $g$ .

### Bilan d'énergie

Malgré le fait qu'on utilise ici un modèle de fluide parfait, le passage par ressaut provoque un saut d'énergie interne. De l'énergie est dissipée et on peut évaluer combien à l'aide d'un bilan énergétique. On suppose la densité massique d'énergie interne  $e_1$  et  $e_2$  constants à l'entrée et à la sortie et on note  $\Delta e = e_2 - e_1$

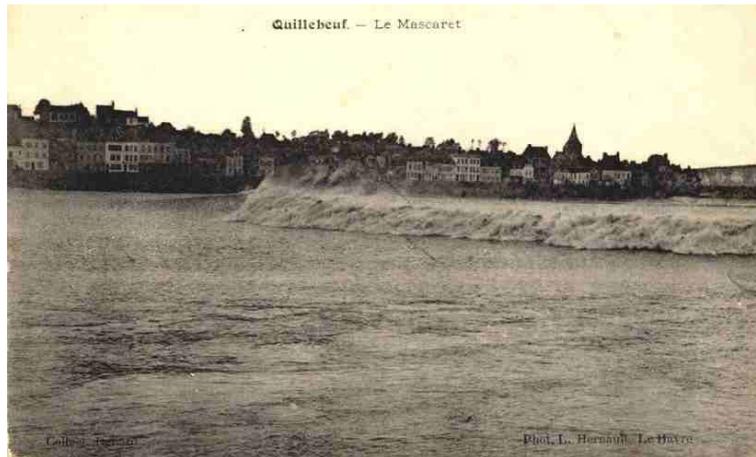


FIGURE 2.3 – Mascaret de la Seine au niveau de Quillebeuf en 1920.

11. Exprimer le bilan d'énergie totale,  $dE/dt = 0$ .
12. Utiliser ce bilan ainsi que les relations de saut pour calculer le taux de production de chaleur

$$\Delta\dot{Q} = (e_2 - e_1)Q_m \quad (2.6)$$

du ressaut. Ici  $Q_m$  est le débit massique passant dans le système.

13. Malgré le fait que nous avons utilisée un fluide parfait, la loi de Bernoulli ne s'applique pas. Pourquoi ?

## 3. Ecoulements potentiels

*Parmi les écoulements parfaits, les écoulements potentiels jouent un rôle particulier. On les rencontre dans la théorie des ailes et sous des ondes de gravité. Le calcul des écoulements potentiels est assez structuré et suit toujours plus ou moins les mêmes étapes qu'il convient de bien connaître.*

### 3.1 Ecoulement parfait autour d'un cylindre

#### 3.1.1 Circulation nulle

Un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur infinie ( $H \rightarrow +\infty$ ), se trouve comme obstacle dans un écoulement  $\vec{u}$  d'un fluide parfait de densité  $\rho$ . Le cylindre étant imperméable, le fluide le contournera, comme schématisé sur la figure 3.1. Loin en amont et en aval du cylindre, l'écoulement tend vers un écoulement uniforme  $U \vec{e}_x$  et la pression y vaut  $p_\infty$ . On ignore la gravité.

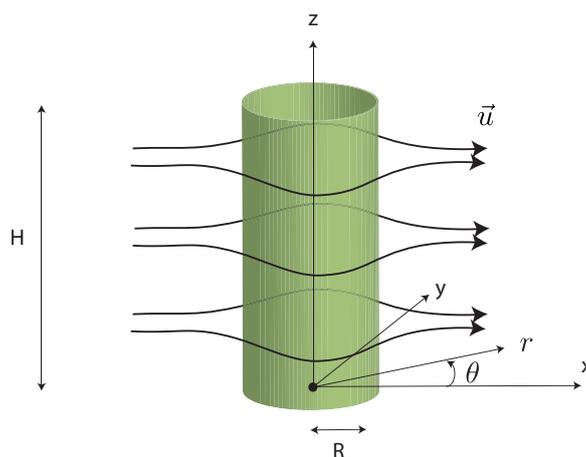


FIGURE 3.1 – Ecoulement autour d'un cylindre.

Par hypothèse, la circulation du fluide autour du cylindre est nulle dans un premier temps :  $\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0$ . On calcule la force de pression exercée par le fluide sur le cylindre.

1. Selon votre intuition, dans quel sens sera dirigé cette force ?
2. On suppose que le champ de vitesse  $\vec{u}$  dérive d'un potentiel  $\phi$  satisfaisant  $\nabla^2 \phi = 0$ . Ecrire cette équation en coordonnées cylindriques.
3. Loin du cylindre, l'écoulement est uniforme et constant. En conséquence, le potentiel hydrodynamique  $\phi$  tend vers une fonction  $\phi_\infty$  à l'infini. Donner l'expression de  $\phi_\infty$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$ .
4. Le cylindre est imperméable, donner les conditions aux limites du potentiel  $\phi$  en  $r = R$ .
5. Trouver  $\phi$  comme une solution du problème de Laplace qui a la même dépendance selon  $\theta$  que celle trouvée en  $\phi_\infty$ .
6. En déduire l'écoulement  $\vec{u}(r, \theta) = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta$ .
7. Exprimer la loi de Bernoulli pour un écoulement potentiel et l'utiliser pour calculer la pression  $p(r, \theta)$  partout dans le fluide.
8. En déduire que la pression à la surface du cylindre s'écrit

$$p|_{r=R} = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta). \quad (3.1)$$

Représenter sur un schéma les points de pression maximale et minimale.

9. Calculer la force de pression sur le cylindre par unité de hauteur  $H$ .
10. Pourquoi parle-t-on du paradoxe de d'Alembert ? Proposer quelques idées qui pourraient résoudre ce paradoxe.

### 3.1.2 Circulation non-nulle

On suppose maintenant que l'écoulement autour du cylindre a une circulation non-nulle  $\Gamma \neq 0$ . Dans un fluide visqueux, on imagine que cela peut être dû à une rotation du cylindre et on a cette fois-ci

$$\vec{u}_{tot} = \vec{u} + \frac{\Omega R^2}{r} \vec{e}_\theta, \quad (3.2)$$

Ici  $\vec{u}$  est l'écoulement en l'absence de rotation déterminé dans la partie précédente. Cet écoulement satisfait tout aussi bien les conditions aux limites du problème non-visqueux. La circulation non-nulle cause une force de portance non-nulle, appelée force de Magnus. C'est cette force de Magnus qui explique la déviation de ballons de foot et de ping-pong suite à la rotation (l'effet) qu'on leur donne.

1. Pour des valeurs modérées de  $\Omega$ , il existe deux points de stagnation sur le cylindre (points où la vitesse est nulle). Identifier deux valeurs de  $\theta$  pour lesquelles la vitesse totale  $\vec{u}_{tot}$  sur le cylindre s'annule.
2. Faire un schéma montrant quelques lignes de courants pour les deux cas  $\Omega > 0$  et  $\Omega < 0$ . Représenter sur ce schéma les points de vitesse maximale et minimale, ainsi que les points de pression minimale et maximale. Dans quel sens la force de pression agira-t-elle.
3. Malgré la rotation du fluide, nous pouvons toujours appliquer la loi de Bernoulli ici. Pourquoi ? Utiliser la loi de Bernoulli pour calculer la pression  $p_{tot}$  dans le fluide.
4. Calculer la force de pression que le fluide exerce sur le cylindre, par unité de hauteur. Cette force est appelée "force de Magnus". Vérifier que la force est dans le sens attendu.
5. Calculer la valeur de la circulation  $\Gamma$  en fonction de  $\Omega$  sur un contour circulaire de rayon  $R_* > R$ . Montrer que la valeur de  $\Gamma$  est indépendante de  $R_*$ . Comparer la formule trouvée pour la force de Magnus avec le théorème de Kutta-Joukowski pour la portance d'une aile.

### 3.2 Écoulement parfait autour d'une sphère

Par les mêmes techniques, il est possible de calculer l'écoulement potentiel qui contourne un objet de forme sphérique. Le problème de Laplace en géométrie sphérique s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.3)$$

Ici  $r, \theta, \phi$  correspondent aux coordonnées sphériques et on note  $\Phi$  le potentiel hydrodynamique. Le gradient en coordonnées sphériques s'exprime comme

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (3.4)$$

On maintient le même écoulement à l'infini  $U \vec{e}_x$ .

1. Exprimer le vecteur  $\vec{e}_x$  en fonction des vecteurs  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\phi$  de la base sphérique.
2. Loin de la sphère, l'écoulement est supposé uniforme et égal à  $U \vec{e}_x$ . Remplacer  $\vec{e}_x$  par l'expression trouvée précédemment. Identifier l'expression du potentiel à l'infini  $\Phi_\infty$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ .
3. Trouver  $\Phi$  comme la solution du problème de Laplace qui a la même dépendance selon  $\theta, \phi$  que celle trouvée en  $\Phi_\infty$ .
4. La surface de la sphère est imperméable, donner les conditions aux limites du potentiel  $\Phi$  en  $r = R$ . Imposer cette condition aux limites en  $r = R$  pour fixer la constante arbitraire qui figure dans la solution.
5. Exprimer la loi de Bernoulli pour un écoulement potentiel et l'utiliser pour calculer la pression  $p$  partout dans le fluide.
6. Calculer la force de pression sur la sphère et montrer qu'elle s'annule.
7. On a supposé ici un écoulement sans circulation. Est-ce qu'on peut suivre la même procédure qu'avec le cylindre, c.a.d. où on ajoute un écoulement tournant en plus.

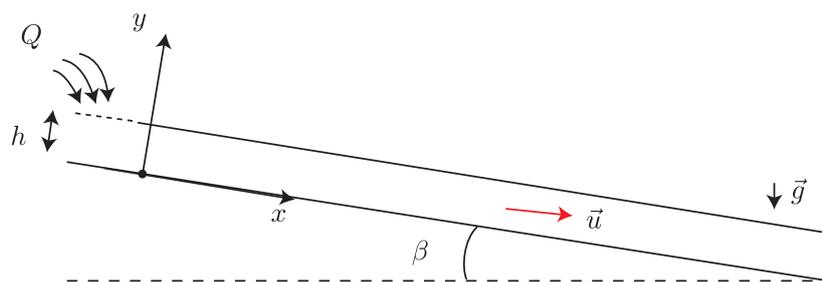


## 4. Ecoulements visqueux

L'ajout de la viscosité rend l'équation de Navier-Stokes plus complexe à résoudre. Si l'écoulement est parallèle ou tournant, il peut rester possible de le caractériser exactement. En régime de Stokes, il est possible de trouver d'autres écoulements visqueux.

### 4.1 Ecoulement visqueux sur plan incliné

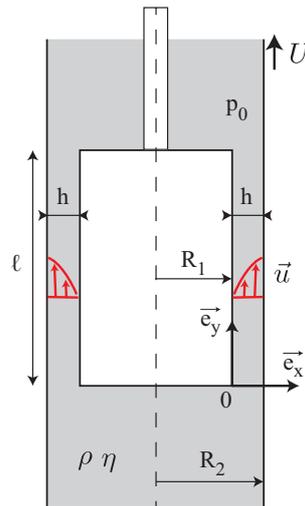
On s'intéresse à l'écoulement d'une couche de fluide de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  qui sous l'effet de la gravité  $g$ , dévale un plan incliné d'un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale. On suppose que la couche a une hauteur  $h$  constante, résultat d'un débit  $Q$  permanent fourni par le haut. Au dessus du liquide, il y a un gaz à pression  $p_0$ . On suppose que l'écoulement est parallèle le long de  $x$ .



1. Ecrire les composantes  $x$  et  $y$  de l'équation de Navier-Stokes.
2. Ecrire les conditions aux limites sur le fond et sur la surface libre plate.
3. Calculer la vitesse  $u_x$  et la pression  $p$ .
4. Faire un schéma qui montre la vitesse dans la couche.
5. Exprimer la hauteur de la couche  $h$  en fonction du débit volumique  $Q$ ,  $\nu$ ,  $g$  et  $\beta$ .
6. Calculer la contrainte visqueuse en  $y = 0$  sur la plaque (force par unité de surface).

## 4.2 Amortisseur hydraulique à effet visqueux

Un amortisseur hydraulique est constitué d'un piston cylindrique de rayon  $R_1$  et de longueur  $\ell$  déplaçant un fluide incompressible, de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ , dans un cylindre de rayon  $R_2$  tel que  $h = R_2 - R_1 \ll R_1$ . On appelle  $h$  l'entrefer entre les deux cylindres qui est donc suffisamment petit devant le rayon de courbure du piston pour que l'écoulement puisse être assimilé à l'écoulement entre deux plans. L'écoulement est unidirectionnel tel que  $\vec{u} = u_y(x, y) \vec{e}_y$ .



On suppose que loin du piston le fluide est au repos et que le piston se déplace à la vitesse  $U$ . On cherche la force nécessaire pour imposer ce mouvement. On suppose que les effets visqueux ne se manifestent qu'entre les deux cylindres, on se place dans le référentiel du piston de sorte que l'écoulement soit stationnaire. On néglige les effets de la gravité dans ce problème.

1. Ecrire la composante selon  $x$  de l'équation de Navier-Stokes. Que peut-on déduire sur la pression ?
2. Ecrire la composante selon  $y$  de l'équation de Navier-Stokes. Préciser les conditions aux limites sur les parois  $x = 0, h$ . Pour rappel, on se place dans le référentiel du piston.
3. Calculer  $u_y$ . Ce profil de vitesse correspond à la superposition de deux écoulements bien connus.
4. Exprimer le débit volumique  $Q_v$  en fonction de  $dp/dy$ ,  $R_1$ ,  $h$ ,  $\eta$  et  $U$ . On admettra, compte tenu que  $h \ll R_1$ , que le débit volumique dans la conduite est donné par

$$Q_v = 2\pi R_1 \int_0^h u_y(x) dx. \quad (4.1)$$

5. En comparant ce débit au débit injecté dans l'entrefer par le déplacement du piston, calculer l'expression dominante du gradient de pression  $dp/dy$  comme une fonction de  $\eta$ ,  $U$ ,  $R_1$ ,  $h$ .
6. La pression au dessus du cylindre est  $p_0$  (voir figure). Exprimer la variation de pression dans l'entrefer entre  $y = 0$  et  $y = \ell$ . En déduire l'expression de la pression au niveau de la surface de base du piston en  $y = 0$ .
7. En déduire l'expression de la force de pression  $\vec{F}_p$  qui s'exerce sur le piston.
8. Exprimer la force  $\vec{F}_v$  exercée par la contrainte visqueuse sur la surface du piston dans l'entrefer. Comparer cette force à la force de pression.

### 4.3 Vortex de Burgers

Le vortex de Burgers est une solution exacte de type tourbillon. Contrairement au vortex de Lamb-Oseen, il s'agit d'une solution stationnaire. La diffusion visqueuse qui tend à atténuer le tourbillon est opposée par un écoulement d'étirement-compression qui tend à amplifier le tourbillon. L'écoulement s'écrit comme

$$\vec{u} = \underbrace{\gamma(-r\vec{e}_r + \alpha z\vec{e}_z)}_{\text{étirement-compression}} + u_\theta(r)\vec{e}_\theta \quad (4.2)$$

On appelle  $\gamma$  le taux d'étirement.  $\alpha$  est un nombre à spécifier et  $u_\theta(r)$  la vitesse tournante qu'on cherche à identifier.

1. Imposer l'incompressibilité de l'écoulement. Trouver la bonne valeur de  $\alpha$ .
2. Calculer la vorticité  $\vec{\omega}$  et montrer qu'elle est selon  $z$  uniquement.
3. Prendre le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes pour trouver l'équation de vorticité. Utiliser les identités vectorielles suivantes pour simplifier

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) \quad (4.3a)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{b} - \vec{b} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} \quad (4.3b)$$

sans oublier que  $\vec{u}$  et  $\vec{\omega}$  sont des champs solénoïdaux.

4. Ecrire explicitement l'équation pour  $\omega_z$ . Montrer que cette équation différentielle a comme solution régulière une fonction Gaussienne. Quelle est la largeur caractéristique du tourbillon.
5. Identifier la composante  $u_\theta$  de l'écoulement.

### 4.4 Ecoulement visqueux autour d'une sphère tournante en régime de Stokes

Le but de l'exercice est de trouver l'écoulement visqueux autour d'une sphère de rayon  $R$  qui tourne à vitesse de rotation  $\Omega$  constante, dans le régime de Stokes. On aligne l'axe de rotation avec l'axe  $z$  de manière à pouvoir chercher une solution axisymétrique.

1. Sous quelle condition pourra-t-on se placer dans le régime de Stokes. Exprimer cette condition sous la forme d'une inégalité et utilisant les grandeurs connues du problème.
2. Consulter le formulaire en coordonnées sphériques. Vous convaincre qu'il est possible, en régime de Stokes, de proposer un écoulement purement azimuthal de la forme  $\vec{u} = u_\phi(r, \theta)$  dans le régime de Stokes. Donner l'équation différentielle pour  $u_\phi(r, \theta)$ .
3. Exprimer la condition d'adhérence sur la surface de la sphère en coordonnées sphériques.
4. Proposer une solution séparable  $u_\phi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ . Ici  $g(\theta)$  correspondra à la dépendance en  $\theta$  que l'on retrouve également dans la condition aux limites précédemment écrite. Trouver l'équation différentielle pour  $f(r)$ .
5. Proposer une solution en puissance  $f(r) = r^\alpha$  identifier les valeurs de  $\alpha$  admissibles. Seul l'une des  $\alpha$  sera compatible avec le principe que l'écoulement doit tendre vers 0 loin de la sphère.
6. Proposer la solution  $u_\phi(r, \theta)$  adéquate et imposer la condition aux limites en  $r = R$ .
7. Lorsqu'on tourne la sphère plus rapidement la force centrifuge va commencer à agir sur le fluide et on quittera progressivement le régime de Stokes. Faire un schéma qui montre l'allure de l'écoulement axisymétrique auquel on peut s'attendre si la force centrifuge devient plus importante.

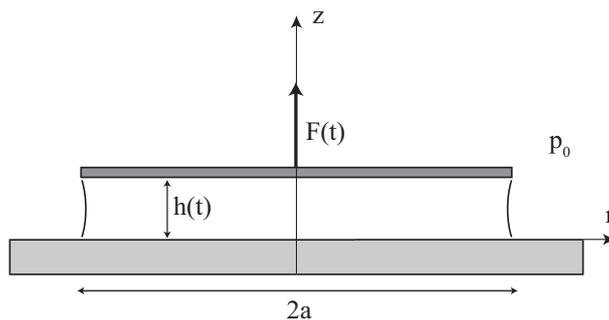


## 5. Limite de lubrification

*Dans la limite de lubrification, on simplifie les équations de mouvement utilisant quelques hypothèses supplémentaires. Ces simplifications permettent de calculer de écoulements qui sont géométriquement très contraints et nous donne accès aux forces hydrodynamiques qu'ils causent.*

### 5.1 Force d'adhérence d'un disque

On considère un disque de rayon  $a$  placé parallèlement à un plan rigide, l'espace entre ces deux surfaces étant occupé par un fluide visqueux, de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . La distance  $h(t)$  entre les deux surfaces varie lorsqu'on applique une force ascendante  $F(t)$  sur le disque. On souhaite obtenir l'expression de la force  $F(t)$  en fonction de l'épaisseur du film  $h(t)$ .



On négligera la gravité dans ce problème. On suppose de plus que le fluide occupe l'ensemble de l'espace autour du disque à tout temps et que le champ de vitesse est bidimensionnel :

$$\vec{u} = u_r(r, z, t) \vec{e}_r + u_z(r, z, t) \vec{e}_z \quad (5.1)$$

en coordonnées cylindriques. On supposera que l'écoulement est contraint spatialement dans la direction verticale, c'est-à-dire que  $h/a \ll 1$ . Ceci nous permet d'utiliser un modèle de lubrification.

1. Dériver le modèle de lubrification

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.2b)$$

adéquat à ce problème à partir des équations de Navier-Stokes, suivant les mêmes étapes qu'en cours. Spécifier les conditions nécessaires, à côté de l'hypothèse  $h/a \ll 1$ , pour pouvoir utiliser ce modèle.

2. Écrire les conditions aux limites sur  $u_r, u_z$  et sur  $p$ .
3. On cherche à déterminer la distribution de pression  $p(r, t)$  sur la surface inférieure du disque, en  $z = h(t)$ .
  - (a) Calculer  $u_r$  en fonction de  $\frac{\partial p}{\partial r}, z$  et  $h$  en tenant compte des conditions aux limites.
  - (b) Calculer  $u_z$  en fonction de  $\frac{\partial p}{\partial r}, r, z$  et  $h$  à l'aide de l'équation d'incompressibilité en tenant compte de la condition aux limites en  $z = 0$ .
  - (c) Dédire la relation reliant  $\frac{\partial p}{\partial r}$  aux grandeurs  $r$  et  $h(t)$  en utilisant la condition aux limites sur  $u_z$  en  $z = h(t)$ .
  - (d) Intégrer l'équation en  $p(r, t)$  en tenant compte des conditions aux limites sur la surface du fluide en contact avec l'air.
4. Calculer la force d'adhérence exercée par le fluide sur le disque.
5. Écrire le principe fondamental de la dynamique sur le disque en considérant que l'on tire le disque verticalement avec une force constante  $F_0$  (on négligera la masse du disque).
6. En déduire une équation différentielle pour  $h(t)$ , que l'on intégrera sous la forme

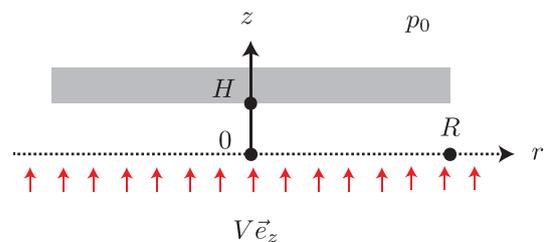
$$h(t) = \frac{h_0}{\sqrt{1 - t/\tau}}$$

où  $\tau$  est un « temps de décollement », que l'on identifiera. Que pensez vous de cette singularité à  $t = \tau$  ?

7. Application numérique : Calculer  $\tau$  dans le cas de l'eau, avec  $h_0 = 0,1$  mm,  $F_0 = 1$  N,  $a = 2$  cm.

## 5.2 Air-Hockey (issu de l'examen 2019-2020)

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'écoulement en dessous du puck dans un jeu de Air Hockey.



Dans une table d'Air Hockey, de l'air est soufflé en permanence par de petites trous dans la table. Le puck (le disque) lévite sur un coussin d'air et se déplace avec très peu de friction. Comme le montre le schéma, on modélise la table soufflante par une paroi poreuse à travers laquelle de l'air s'écoule à la vitesse verticale

$V\vec{e}_z$ . On note  $\eta$  la viscosité dynamique de l'air,  $p_0$  sa pression,  $R$  le rayon du puck et  $m$  sa masse. La gravité  $g$  n'influence pas l'écoulement, mais détermine le poids du puck.

### 5.2.1 Puck à l'équilibre

On s'intéresse dans un premier temps aux conditions d'équilibre. On place la table en  $z = 0$ , le puck est au repos et lévite horizontalement à la hauteur  $z = H$  au dessus de la table. Le système de coordonnées cylindriques et centré sur l'axe du puck et l'écoulement sous le puck est alors axisymétrique.

1. On admet que l'intensité de la force de pression  $F_p$  exercée par l'air sur le puck est une fonction de  $\eta, V, R, H$ . Montrer par analyse dimensionnelle que l'on doit avoir

$$\frac{F_p}{\eta V R} = \Phi\left(\frac{H}{R}\right) \quad (5.3)$$

avec  $\Phi$  une fonction arbitraire.

2. Enumérer les hypothèses nécessaires (sans le démontrer) pour pouvoir utiliser le modèle de lubrification suivant.

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx 0 \quad (5.5)$$

3. Déterminer le profil de la vitesse radiale à l'aide des conditions aux limites adéquates en  $z = 0$  et  $H$ .
4. Grace à la loi de l'incompressibilité du fluide exprimée en coordonnées cylindriques, on peut calculer la vitesse verticale  $u_z$ . Fixer la constante d'intégration avec la condition aux limites pour  $u_z$  en  $z = 0$ .
5. Ecrire la condition aux limites sur  $u_z$  en  $z = H$  et en déduire l'équation résultante afin de trouver une équation différentielle pour la pression  $p(r)$  de la forme

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = f(\eta, V, H) \quad (5.6)$$

où  $f(\eta, V, H)$  est à identifier.

6. Intégrer cette équation différentielle pour trouver  $p(r)$ . Déterminer les constantes d'intégration en imposant la régularité à l'axe et la condition limite sur la pression en  $r = R$ .
7. Déduire de la question précédente les composantes de vitesse  $u_r$  et  $u_z$ , sous le puck. Faire un schéma qui montre la pression et quelques lignes de courant.
8. Calculer la force de pression  $\vec{F}_p$  résultante. Vérifier que le résultat est compatible avec l'analyse dimensionnelle effectuée en début d'exercice.
9. Pourquoi les contraintes visqueuses (non-nulles) n'exercent-elles pas de force sur le puck? (*Rq : une réponse courte est souhaitée*)

### 5.2.2 Puck en mouvement

On suppose que le puck se déplace horizontalement à la vitesse  $U\vec{e}_x$  en restant parfaitement horizontal en  $z = H$ . On se place dans le référentiel du puck afin de retrouver une situation d'écoulement stationnaire.

1. Seules les conditions limites en  $z = 0$  sont modifiées. Précisez-les.
2. L'écoulement d'air sous le puck correspond à la superposition de l'écoulement d'équilibre et d'un écoulement de Couette plan. Donner sans trop de calculs, ce nouveau écoulement. Vous avez le droit de mélanger coordonnées cylindriques et Cartésiennes afin de simplifier l'écriture.

3. Montrer que la pression sous le puck n'est pas affectée par le mouvement horizontal de celui-ci.
4. Donner la force de frottement, exercée par les contraintes visqueuses sur le puck. (*Ne pas vous lancer dans un calcul long et compliqué, il suffit de bien raisonner*).
5. Selon vous, qu'est-ce qui se passe lorsque le puck se déplace avec un petit angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

## 6. Couches limites

Les couches limites se forment lorsqu'un écoulement peu visqueux rentre en contact avec un obstacle. Il s'agit d'une fine zone proche de l'obstacle, où l'écoulement est influencé par la viscosité et parfois aussi par la non-linéarité. L'étude théorique des couches limites a permis de mieux comprendre les forces de traînée que les écoulements exercent sur des obstacles.

### 6.1 Couche limite de Blasius

La couche limite de Blasius (1907) est une couche limite non-linéaire : la non-linéarité et l'advection non-linéaire y sont actives. Il s'agit d'une solution auto-similaire du modèle proposé par Prandtl (1904), qui est un modèle réduit des équations de Navier-Stokes, valable dans certaines limites.

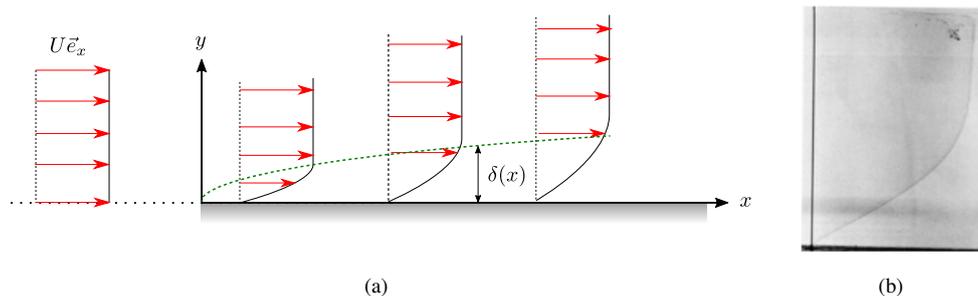


FIGURE 6.1 – Couche limite de Blasius au-dessus d'une plaque plane. (a) schéma. (b) Visualisation expérimentale (Album of fluid motion, p. 22, van Dyke (1982))

On imagine la situation idéalisée de la figure (a) ci-dessus : un écoulement incident uniforme  $U\vec{e}_x$ , rencontre soudainement, en  $x = 0$ , le bord d'une plaque au repos auquel le fluide doit adhérer. Cette plaque est située en  $y = 0$  et s'étend sur l'intervalle  $x \in [0, +\infty[$ . En s'éloignant vers les  $x$  croissants, la couche devient de plus en plus épaisse. On note  $\delta(x)$  cette épaisseur. Pour  $y \rightarrow +\infty$  l'écoulement tend vers l'écoulement uniforme  $U\vec{e}_x$ . On supposera que l'écoulement dans la couche est bidimensionnel et stationnaire et que sa structure est auto-similaire. La gravité n'a aucune influence dans ce problème (il ne modifie que la pression), on ne le considère donc pas.

Dans le TD, on part du modèle de Prandtl dérivé en cours.

★ **Modèle de Prandtl.** L'écoulement de couche limite au dessus d'une plaque au repos peut être décrite avec le modèle de Prandtl. Dans le fluide situé en  $y \in [0, +\infty]$  on résout

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \approx 0 \quad (6.1b)$$

et il faut satisfaire les conditions aux limites

$$u_x|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad u_x|_{y \rightarrow +\infty} = U(x) \quad (6.1c)$$

Le champ  $U(x)$  correspond à la vitesse de l'écoulement parfait, loin au dessus de la plaque. ■

### 6.1.1 Equations adimensionnées pour la couche de Blasius

La couche limite de Blasius est une solution spéciale, auto-similaire du modèle de Prandtl. La plaque se situe en  $x \in [0, +\infty[$ . On suppose que l'écoulement loin au dessus de la plaque est informe. On adimensionne les équations afin d'enlever des paramètres du problème.

1. Que devient le modèle de Prandtl pour  $U$  uniforme au loin.
2. Le problème ne dépend que de deux paramètres physiques  $U$  et  $\nu$ . Montrer que ces deux grandeurs permettent de définir des échelles caractéristiques pour la vitesse et l'espace :

$$[\mathbf{u}] = \dots, \quad [\mathbf{r}] = \dots \quad (6.2)$$

3. Adimensionner les équations avec ces échelles, c.a.d. injecter les changements de variables dans les équations

$$u_x = [\mathbf{u}] \tilde{u}_x, \quad u_y = [\mathbf{u}] \tilde{u}_y, \quad x = [\mathbf{r}] \tilde{x}, \quad y = [\mathbf{r}] \tilde{y} \quad (6.3)$$

et trouver les équations pour les variables avec tildes. Ici, il faut bien sûr remplacer  $[\dots]$  par les échelles caractéristiques trouvées. Donner également les conditions aux limites adimensionnées.

*Dans la suite, on continue avec la version adimensionnée du problème, mais on laisse tomber la notation lourde avec les tildes.*

### 6.1.2 Solution auto-similaire de Blasius

Une solution auto-similaire est une solution qui a une propriété d'invariance par changement d'échelle. Ici on cherche à trouver une solution qui a la propriété

$$u_x(x, y) = A u_x(ax, by), \quad u_y(x, y) = B u_y(ax, by) \quad (6.4)$$

pour un certain choix de facteurs  $a, b, A, B$ . Cette relation exprime que, si on change d'échelle selon  $x$  et  $y$ , alors il suffit de redimensionner les composantes par un facteur. Des solutions ayant cette propriété n'existent pas toujours et les facteurs  $a, b, A, B$  sont toujours reliés de manière non-triviale. On détaille ici comment cela suggère une forme très particulière de la solution.

1. Injecter (6.4) dans les équations du modèle adimensionné. Récrire les équations dans les nouvelles variables spatiales

$$X = ax, \quad Y = by \quad (6.5)$$

mise à l'échelle. Exiger qu'après ce changement d'échelle, les équations et les conditions aux limites sont toujours satisfaites. Montrer que cela nécessite

$$\frac{B}{\sqrt{a}} = 1, \quad \frac{b}{\sqrt{a}} = 1, \quad A = 1 \quad (6.6)$$

2. Ces constats permettent de proposer une forme très particulière pour la solution auto-similaire.

$$u_x(x, y) = F(\zeta) \quad , \quad u_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} G(\zeta) \quad (6.7)$$

avec

$$\zeta = \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (6.8)$$

la variable auto-similaire du problème de Blasius. Montrer que cette proposition de solution est effectivement compatible avec la transformation de changement d'échelle (6.4) et les relations (6.6).

En cherchant une solutions auto-similaire, on réduit la dimensionnalité du problème. Au lieu de devoir trouver  $u_x(x, y)$  et  $u_y(x, y)$  on doit identifier les fonctions  $F(\zeta)$  et  $G(\zeta)$  qui dépendent d'une seule variable spatiale.

### 6.1.3 Formulation fonction de courant

Notre écoulement est incompressible et bi-dimensionnel. Dans ce cas particulier, il est conseillé d'utiliser une fonction de courant pour la simplifier la mise en équation.

1. Montrer qu'avec une fonction de courant  $\psi(x, y)$  définie telle que

$$u_x = \partial_y \psi \quad , \quad u_y = -\partial_x \psi \quad (6.9)$$

l'incompressibilité est automatiquement satisfaite.

2. La fonction de courant compatible avec la solution auto-similaire doit ici être de la forme

$$\psi = \sqrt{x} \Psi(\zeta) \quad (6.10)$$

Exprimer  $u_x$  et  $u_y$  et donc  $F$  et  $G$  en fonction de ce champ  $\Psi$ .

3. Exprimer les termes

$$u_x \partial_x u_x = \dots, \quad u_y \partial_y u_x = \dots, \quad \partial_{yy}^2 u_x = \dots \quad (6.11)$$

en fonction de  $\Psi$  et ses dérivées.

4. Montrer que la fonction  $\Psi$  doit être solution de l'équation différentielle non-linéaire de Blasius

$$2\Psi''' + \Psi\Psi'' = 0 \quad (6.12)$$

5. Montrer que les 3 conditions aux limites dont on dispose sont satisfaites avec

$$\Psi(0) = 0 \quad , \quad \Psi'(0) = 0 \quad , \quad \Psi'(+\infty) = 1 \quad (6.13)$$

### 6.1.4 Solution numérique

Le problème de Blasius trouvé n'a pas de solution analytique. Il faut la calculer numériquement avec par exemple une méthode de "shooting". Nous avons préparé un notebook jupyter `Blasius.ipynb` qui explique cette méthode et l'applique pour trouver la solution. Ce notebook Jupyter sera présenté en TD. En quelques mots :

- On transforme l'équation de Blasius d'ordre 3 en un système de 3 équations d'ordre 1 par le processus de réduction d'ordre.
- On intègre ce système à partir d'une condition initiale qui dépend d'un paramètre libre, qui représente la valeur de  $\Psi''(0)$  inconnue.
- On utilise un algorithme d'optimisation pour ajuster la valeur de ce paramètre afin la solution satisfait la condition aux limites  $\Psi'(+\infty) = 1$ .

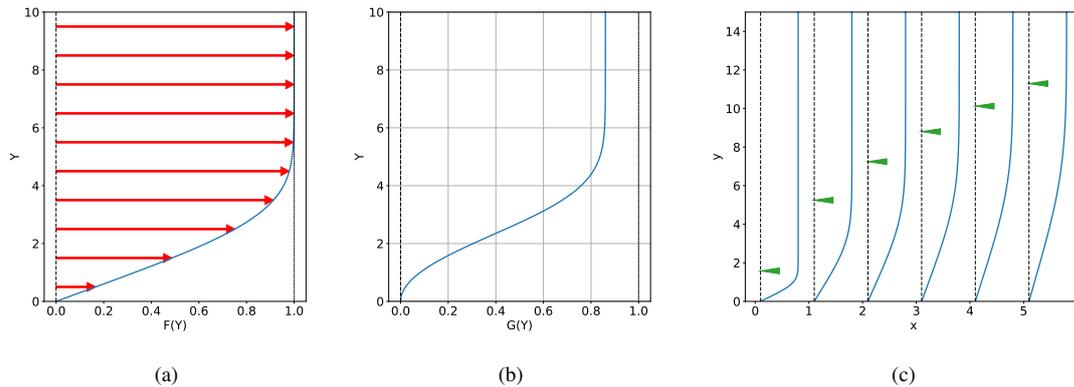


FIGURE 6.2 – Solution numérique auto-similaire du problème de Blasius.

La figure ci-dessus montre la solution numérique obtenue. En (a), nous montrons la vitesse horizontale  $u_x = F(Y)$  qui augmente à peu près linéairement partant de  $Y = 0$  et sature à 1 pour  $Y$  grand. En (b), nous montrons la fonction  $G(Y)$  qui définit la vitesse verticale  $u_y = G(Y)/\sqrt{x}$ . En (c), nous montrons la vitesse horizontale dans le plan  $x - y$ . Les flèches indiquent la hauteur  $5\sqrt{x}$ , qui correspond à peu près à l'épaisseur locale de la couche limite. Numériquement, on mesure

$$\Psi''(0) \approx 0.332 \approx 1/3 \quad (6.14)$$

ce qui est une information utile dans la suite.

### 6.1.5 Force de traînée

On imagine que cette couche de Blasius se forme au dessus d'une plaque finie située  $y = 0$  sur l'intervalle  $x \in [0, L]$  et  $z \in [0, H]$ . Cet écoulement de couche limite exerce des contraintes visqueuse sur la plaque. Calculer la force de surface exercée par l'écoulement sur la plaque.

## 6.2 Décollement de la couche limite

Le modèle de Prandtl permet de décrire les couches limites sur des obstacles de forme plus complexe. Il est nécessaire que cette forme varie assez lentement dans la direction tangentielle à la paroi. On assimile  $x$  avec la direction tangentielle à l'obstacle et  $y$  à la direction normale. Le champ  $U(x)$  correspond à l'écoulement non-visqueux tangentielle à la surface de l'obstacle et on imagine pouvoir le calculer par une (approche potentielle, théorie des ailes). Cet écoulement non-visqueux  $U(x)$  peut varier le long de la surface et cause une force de pression tangentielle à la surface à travers le terme

$$F(x) = -\frac{dQ}{dx} = U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6.15)$$

La direction de cette force peut varier le long de la surface, selon que  $U_\infty$  augmente ou diminue avec  $x$  et c'est cela qui peut mener au phénomène du décollement de la couche limite, illustré dans la figure ci-dessous. On voit un écoulement autour d'un cylindre visualisé par des stries de fumée. Sur la face arrière du cylindre, les lignes de fumée décollent de la surface. Une bulle de recirculation se forme derrière le cylindre. Suite au décollement de la couche limite, l'écoulement est entièrement dévié. Dans cet exercice on cherche à comprendre physiquement l'origine du décollement de la couche limite et comment cela est lié à l'existence de gradients de pression dans la couche limite.

### 6.2.1 Comprendre l'effet physique du gradient de pression

La non-linéarité des équations du modèle de Prandtl rend l'analyse qualitative difficile. Afin d'imaginer mieux ce que peut faire ce gradient de pression supplémentaire, on étudie un écoulement plus simple, celui

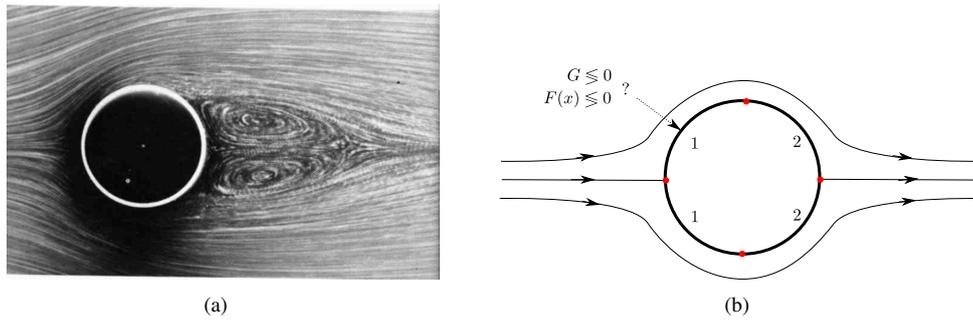


FIGURE 6.3 – (a) Décollement de la couche limite sur la surface d’un cylindre pour nombre de Reynolds  $Re = 26$ . (Album of fluid motion, p. 28, van Dyke (1982)). (b) Schéma à compléter pour identifier le signe du gradient de pression  $G$  et la force de pression  $F(x)$  dans la couche limite.

qui se forme entre deux plaques et en présence d’un gradient de pression. On imagine un liquide compris entre  $x \in [0, H]$ . L’écoulement est parallèle  $\vec{u} = u_x(y) \vec{e}_x$ . Sur les parois en  $x = 0, H$ , on a

$$u_x|_{y=0} = 0 \quad , \quad u_x|_{y=H} = U \tag{6.16}$$

et le gradient de pression est supposé constant

$$\frac{dQ}{dx} = G \tag{6.17}$$

1. Calculer l’écoulement visqueux. Donner un nom à cet écoulement.
2. Schématiser l’allure de l’écoulement pour  $G = 0$ ,  $G < 0$  et  $G > 0$ .

### 6.2.2 Allure de la couche limite sur la surface d’un cylindre

Dans le TD4, nous avons étudié l’écoulement parfait autour d’un cylindre. Dans la figure 6.3-(b), on rappelle l’allure de quelques lignes de courant, pour un cylindre qui ne tourne pas.

1. A quel endroit la pression est elle minimale  $p_{min}$  ou maximale  $p_{max}$  ( 4 points marquées par les cercles)?
2. Estimer le signe du gradient de pression  $G$  et de la force de pression  $F(x)$  locale, sur les faces de devant (1) et de l’arrière (2) de l’obstacle.
3. Schématiser sur la base des situations  $G = 0, G > 0, G < 0$  de la section précédente, l’allure de l’écoulement tangentiel auquel on s’attend dans la couche limite, à plusieurs endroits de la surface.
4. Ou se trouve le point de décollement selon ce raisonnement simpliste.
5. Pourquoi le point de décollement est-il déplacé plus vers l’arrière du cylindre selon vous?



## 7. Surfaces libres & capillarité

Lorsque deux fluides immiscibles rentrent en contact, ils sont séparés par une interface qui suit les mouvements imposés par les fluides. L'interface rétro-agit sur l'écoulement à travers la tension de surface. Dans ce TD, on étudie quelques écoulements à surface libre. L'une des deux phases fluide est tellement légère et peu visqueuse qu'il ne peut qu'influencer l'autre phase à travers sa pression.

### 7.1 Ondes de surface (linéaires)

On s'intéresse à la propagation des ondes de surface à la surface d'un fluide en contact avec un gaz. Pour simplifier on considérera le cas d'un liquide de viscosité négligeable (de l'eau par exemple) et d'un gaz (de l'air) de viscosité et de densité négligeables comparées à celle du liquide.

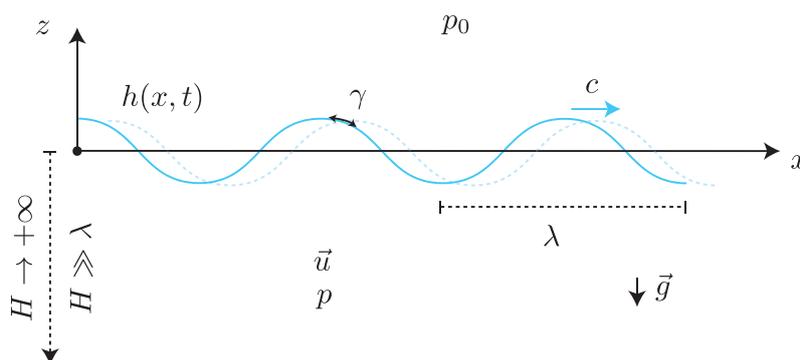


FIGURE 7.1 – Onde de surface en eau très profonde.

L'axe  $z$  est dirigé vers le haut, la surface de l'eau au repos définissant l'origine  $z = 0$ . On se restreint à des ondes planes se propageant selon les  $x > 0$ , invariantes selon  $y$ , et l'on suppose que l'interface prend la forme

$$h(x, t) = h_0 \cos(kx - \omega t), \quad (7.1)$$

Ici  $k = 2\pi/\lambda > 0$  est le nombre d'onde,  $\omega = 2\pi/T$  la pulsation et  $h_0$  l'amplitude de l'onde. La profondeur d'eau,  $h_0$ , est supposée très grande devant les longueurs d'onde  $\lambda$  considérées, et n'intervient donc pas dans le problème. On supposera en outre que l'amplitude  $h_0$  reste faible comparée à la longueur d'onde (approximation linéaire).

### 7.1.1 Equations du problème linéarisé

D'abord on rassemble toutes les équations du problème linéarisé qui caractérise la dynamique des ondes de faible amplitude.

1. La propagation de cette onde est associée à un mouvement incompressible d'un fluide parfait, que l'on supposera de plus irrotationnel. En déduire que le champ de vitesse dérive d'un potentiel  $\phi(x, z, t)$  Laplacien.
2. Exprimer la loi de Bernoulli pour cet écoulement potentiel instationnaire. Ignorer tous les termes non-linéaires. Cette loi nous servira pour calculer la pression dans le fluide.
3. Exprimer comment le potentiel  $\phi$  doit se comporter à  $z \rightarrow -\infty$ .
4. Exprimer la condition limite cinématique sur la surface  $f = -z + h(x, t) = 0$ . Simplifier cette condition limite à sa version linéarisée

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_z|_{z=0} \quad (7.2)$$

en 1) faisant un développement limité autour de  $z = 0$ , 2) en ne gardant que les termes linéaires.

5. Exprimer la condition limite dynamique sur la surface libre. Simplifier cette condition à sa version linéarisée

$$p|_{z=h} = p_0 - \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

en prenant en considérant que  $|\partial_x h| \ll 1$ , c'est-à-dire la pente locale est supposée très faible.

### 7.1.2 Solution ondulatoire

On cherche une solution propagative (7.1).

1. Montrer à partir de (7.2), que le potentiel  $\phi \sim \sin(kx - \omega t)$ . Proposer ensuite un potentiel  $\phi(x, z, t)$  solution du problème de Laplace qui satisfait la condition de régularité en  $z \rightarrow -\infty$ . Cette solution dépendra d'une constante arbitraire  $A$ .
2. Calculer la pression  $p(x, z, t)$  associée à cet écoulement à l'aide de la loi de Bernoulli linéarisée.
3. Exprimer les conditions limites cinématiques et dynamiques linéarisées pour trouver un système linéaire et homogène de la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \begin{bmatrix} A \\ h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

4. Une condition nécessaire pour l'existence de solutions non-triviales ( $h_0, A \neq 0$ ) est que le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{M}}$  doit être nulle. Montrer que ceci fixe la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (7.5)$$

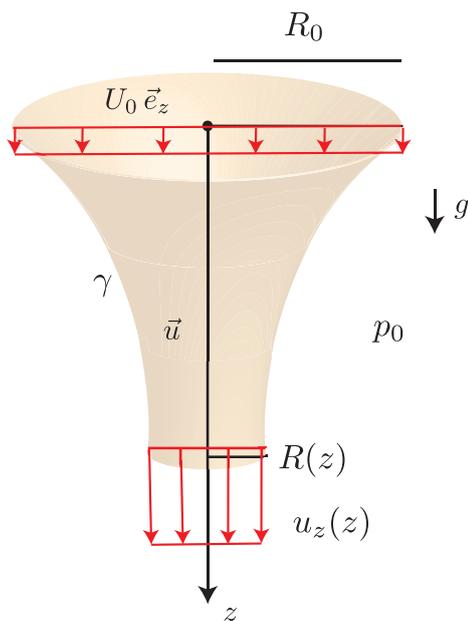
5. Exprimer  $A$  en fonction  $h_0$  avec l'une des deux lignes de (7.4). Trouver la forme de la vitesse  $\vec{u}$  et la pression sous l'onde.
6. Faire un schéma qui montre le champ de vitesse sur plusieurs points situés sur une ligne verticale en dessous d'un sommet et d'un creux de l'onde.

### 7.1.3 Analyse de la relation de dispersion

1. Tracer l'allure de la vitesse de phase  $c$  en fonction de  $k$  en étudiant les asymptotes  $k \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow +\infty$ .
2. Montrer qu'il existe un nombre d'onde critique  $k_c$  que l'on déterminera (A.N.  $\gamma = 0.072$  N/m pour l'interface eau-air) à laquelle la vitesse de phase est minimale. Quelle est la vitesse minimum à laquelle une onde peut se propager à la surface d'un liquide immobile ?
3. On distingue deux régimes,  $k \ll k_c$  et  $k \gg k_c$ . Quel régime correspond aux ondes de gravité et lequel correspond aux ondes capillaires ?
4. Exprimer la vitesse de groupe  $c_g = \partial\omega/\partial k$  dans les deux régimes  $k \ll k_c$  et  $k \gg k_c$ . Que vaut le rapport  $c/c_g$  dans ces deux régimes ?
5. Représentez schématiquement la propagation d'un paquet d'onde dans ces deux régimes.

## 7.2 Filaments visqueux (issu de l'examen 2018-2019)

Lorsqu'on laisse couler un fluide visqueux incompressible (miel) d'une cuillère sous l'effet de la gravité, il se forme un fin filament de forme axisymétrique. Dans cet exercice on s'intéresse à l'écoulement stationnaire dans ce filament et on trouve sa forme.



On note  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide,  $\rho$  sa densité,  $g$  l'accélération gravitationnelle,  $p_{atm}$  la pression atmosphérique et  $\gamma$  la tension de surface. La surface libre du filament se place à l'endroit  $r = \delta(z)$  en coordonnées cylindriques. A la hauteur  $z = 0$ , l'écoulement vertical est constant et égale à  $u_z(0) = U_0 \vec{e}_z$  et le rayon vaut  $\delta(0) = \delta_0$ . On choisit un référentiel avec **l'axe  $z$  dirigé vers le bas**.

### 7.2.1 Modèle de lubrification

Dans un premier temps, on approche l'équation de Navier-Stokes par le modèle de lubrification

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx 0 \quad (7.6a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g \quad (7.6b)$$

Attention ici au signe du terme gravitationnel qui est inhabituel.

1. Exprimer les inégalités supposées qui ont permis cette approximation à l'aide des variables  $|u_z|$ ,  $\delta$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  et  $|\delta'| = |d\delta/dz|$ .
2. Lorsqu'on exprime la condition dynamique à la surface libre et sous les approximations du modèle de lubrification on arrive sur deux conditions

$$p|_{r=\delta(z)} \approx p_{atm} + \frac{\gamma}{\delta} \quad , \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=\delta(z)} \approx 0$$

Discuter l'origine de cette condition dynamique. Quels termes ont été ignorés ici ?

3. On obtient la forme du filament ainsi que la vitesse verticale.
  - (a) Intégrer l'équation (7.6a) et utiliser la condition limite dynamique afin de relier la pression  $p$  à la forme du filament.
  - (b) Injecter cette pression dans l'équation (7.6b) et la intégrer radialement. Montrer que la condition dynamique et la régularité à l'axe ne peuvent être satisfaites seulement si

$$u_z = u_z(z)$$

est indépendant de  $r$  et si

$$\frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{\delta'}{\delta^2} = 0$$

avec  $\lambda_c$  la longueur capillaire à spécifier.

- (c) Calculer la forme du filament utilisant la condition  $\delta(0) = \delta_0$  pour le rayon du filament en  $z = 0$ .
  - (d) Calculer le débit volumique  $Q$  traversant un plan  $z = Cst$  et un plan  $z = 0$ . Trouver la vitesse  $u_z(z)$  en fonction de  $U_0, \delta_0, \lambda_c, z$  en raisonnant sur la conservation du débit.
4. Faire un schéma qui montre la forme du filament ainsi que quelques vecteurs vitesse et quelques lignes de courant.

## 7.2.2 Modèles améliorés

Dans la balance (7.6b), nous avons fait l'hypothèse que la partie dominante dans le terme visqueux était due aux gradients radiaux. Ceci nous a permis d'obtenir un profil  $u_z = u_z(z)$  sans structure radiale, ce qui est pertinent mais implique également que

$$\frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{et donc} \quad \partial p / \partial z \approx \rho g$$

La pression est en équilibre hydrostatique et cause directement la forme du filament à travers la loi de Young-Laplace. Ceci n'est pas très réaliste pour de faibles tensions de surface  $\gamma$  que l'on rencontre en pratique. Dans toute la suite on étudie ce qui se passe si on **ignore la tension de surface**. Notre nouveau modèle garde un profil d'écoulement en bouchon  $u_z = u_z(z)$  mais remplace le modèle (7.6) par

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx 0 \tag{7.7a}$$

$$\rho u_z \frac{du_z}{dz} + \frac{\partial p}{\partial z} \approx \eta \frac{d^2 u_z}{dz^2} + \rho g \tag{7.7b}$$

Dans la balance en  $z$  on inclue un terme inertiel ainsi qu'un terme visqueux précédemment ignorés.

1. Expliquer pourquoi le gradient de pression ne joue plus aucun rôle dans ce problème.
2. Montrer que l'on doit satisfaire la loi de conservation

$$\frac{\rho u_z^2}{2} - \rho g z - \eta \frac{du_z}{dz} = C \tag{7.8}$$

3. A l'aide de la conservation de la masse exprimés en coordonnées cylindriques, montrer que

$$u_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{du_z}{dz}$$

4. Expliquer comment la condition limite en haut

$$u_z(0) = U_0 \quad , \quad u_r(r, 0) = 0,$$

permet dans (7.8) de fixer la valeur de  $C$ .

**5. Régime visqueux :**

Dans ce régime, on ignore tous les termes inertiels (d'ordre  $\rho U_0^2$ ) dans la balance (7.8)

- (a) Intégrer l'équation différentielle restante selon  $z$ , utilisant  $u_z(0) = U_0$  comme condition aux limites.
- (b) Dédire le profil du filament  $\delta(z)$  en raisonnant sur la conservation du débit.
- (c) Le résultat est un peu étonnant ici, pourquoi ? Faire apparaître une longueur critique  $\lambda_c$
- (d) Faire un schéma. Comparer avec le schéma de la première partie et commenter les principales différences .
- (e) Imaginer un endroit dans le filament visqueux où cette forme spécifique vous semble plus au moins adéquate.

**6. Régime inertiel :**

Dans ce régime, on ignore le terme visqueux.

- (a) Combiner ce qui reste de (7.8) avec la loi qui exprime la conservation du débit  $Q$  afin de trouver  $u_z$ .
- (b) Trouver la forme du filet  $\delta(z)$  dans ce régime et identifier un comportement en loi de puissance  $\delta(z) \sim z^{-\alpha}$ .
- (c) Faire un schéma et comparer avec les schémas précédents

7. Expliquer qualitativement comment un filament de miel changera de forme en descendant selon  $z$ .



## A. TD sup : calcul vectoriel/tensoriel

La mécanique des fluides utilise de nombreuses opérations de calcul vectoriel et tensoriel. Il est utile de bien le maîtriser. Entraînez-vous sur les exercices suivants qui ne sont pas tous très simples.

### A.1 Opérateurs différentiels

En mécanique des fluides, on a souvent besoin de calculer la divergence, le rotationnel, le laplacien, etc. d'un champ de vitesse  $\vec{u}$ . Calculer

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{u}, \quad \nabla^2 \vec{u}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left( \overleftrightarrow{\nabla} \vec{u} + \overleftrightarrow{\nabla} \vec{u}^T \right), \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (\text{A.1})$$

des champs de vitesses suivants

1.  $\vec{u} = \cos x \vec{e}_x + xyz \vec{e}_y$ .
2.  $\vec{u} = r \vec{e}_r + zr \sin \theta \vec{e}_\theta$ .

Utiliser le formulaire qui se trouve à la fin du polycopier pour exprimer les opérations en coordonnées Cartésiennes  $(x, y, z)$  et cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

### A.2 Champ de déplacement

Le champ de déplacement  $\vec{r}(\vec{R}, t)$  permet de savoir où se trouve une parcelle de fluide infinitésimale à temps  $t$ , partie de la position  $\vec{R}$  à temps  $t = t_0$ . On le trouve comme la solution du problème

$$\partial_t \vec{r} = \vec{u}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{r}|_{t=t_0} = \vec{R} \quad (\text{A.2})$$

où  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  est le champ de vitesse. Ce problème a rarement des solutions simples en mécanique des fluides car de très grands déplacements (chaotiques) sont admissibles contrairement au cas des solides déformables. Ci dessous, un exercice dans lequel on peut calculer  $\vec{r}(\vec{R}, t)$ .

1. Calculer le champs de déplacement pour le champ de vitesse linéaire en espace

$$\vec{u} = ax \vec{e}_x + by \vec{e}_y + cz \vec{e}_z \quad (\text{A.3})$$

avec  $a, b, c$  constants. On prendra  $t_0 = 0$ . On notera  $X, Y, Z$  les composantes cartésiennes de la position initiale  $\vec{R}$ .

2. Donner l'expression du champ de vitesse Lagrangien  $\vec{u}^L(\vec{R}, t)$ .

### A.3 Théorème de transport de Reynolds

On considère un domaine sphérique dont le rayon croît linéairement dans le temps  $R(t) = t$ . Puis, nous supposons un champ scalaire à symétrie sphérique

$$f(r, t) = r^2 t \quad (\text{A.4})$$

est un champ. Le but est de vérifier le théorème de transport de Reynolds sur l'intégrale

$$F(t) = \iiint_{V(t)} f(r, t) dV \quad (\text{A.5})$$

1. Calculer l'intégrale  $F(t)$  et sa dérivée temporelle.
2. Ecrire le théorème de transport de Reynolds pour  $dF/dt$ . Que vaut la vitesse  $\vec{v}$  qui apparaît dans le terme surfacique.
3. Calculer les deux termes et vérifier  $dF/dt$  est égal à l'expression précédemment calculée.

### A.4 Champ matériel

Un champ matériel  $f$  est un champ dont la dérivée advective s'annule

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (\text{A.6})$$

Un tel champ est dit "attaché" aux particules de fluide. Alternativement,  $f$  se déplace avec les particules du fluide, comme l'indique le champ de déplacement. Dans cet exercice, on calcule la forme générale d'un champ matériel  $f(x, y, t)$  dans un écoulement d'étirement-compression

$$\vec{u} = \gamma x \vec{e}_x - \gamma y \vec{e}_y \quad (\text{A.7})$$

Ici  $\gamma > 0$  est un taux d'étirement.

1. Ecrire l'équation qui exprime que le champ  $f$  est matériel. Montrer que

$$f(x, y, t) = \Phi(xe^{-\gamma t}, ye^{\gamma t}) \quad (\text{A.8})$$

est une solution générale de cette équation, pour toute fonction  $\Phi$ . On peut utiliser la méthode des caractéristiques pour trouver cette forme générale de la solution.

2. A l'instant initial on suppose un champ de forme Gaussienne

$$f(x, y, 0) = Ae^{x^2+y^2} \quad (\text{A.9})$$

Cette condition fixe la fonction  $\Phi$  et permet donc de connaître le champ  $f$  à des instants ultérieures. Schématiser comment la fonction varie au cours du temps dans l'écoulement

### A.5 Force de surface

On suppose une sphère  $V$  de rayon  $R$  soumise à des contraintes surfaciques  $\vec{\sigma}$ . On imagine que ces contraintes se représentent par la fonction matricielle

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & y & -z \\ y & 0 & x \\ -z & x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

en coordonnées Cartésiennes. Calculer la force de surface

$$\vec{F} = \oint_{\delta V} \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.11})$$

qui s'applique sur la sphère.

## A.6 Calcul indiciel avancé

Dans le poly on a trouvé que le tenseur des contraintes est nécessairement symétrique dans tout milieu continu composé de particules qui interagissent par des forces centrales. Cette démonstration repose sur les deux relations non-triviales

$$\oint_{\Sigma_m} (\vec{r} \times \rho \vec{u}) (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \iiint_{V_m} \vec{r} \times (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})) dV \quad (\text{A.12a})$$

$$\oint_{\Sigma_m} \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{S}) = \iiint_{V_m} (\vec{e}_i \epsilon_{ijk} \sigma_{kj}) dV + \iiint_{V_m} \vec{r} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) dV \quad (\text{A.12b})$$

que nous avons démontré par calcul indiciel. Pouvez-vous refaire ce calcul ici, certes sans regarder le détail de la solution proposée dans le poly. Le symbole  $\epsilon_{ijk}$  correspond au symbole d'antisymétrie et on utilise la convention de sommation.



## B. TD sup : Théorème de Kelvin

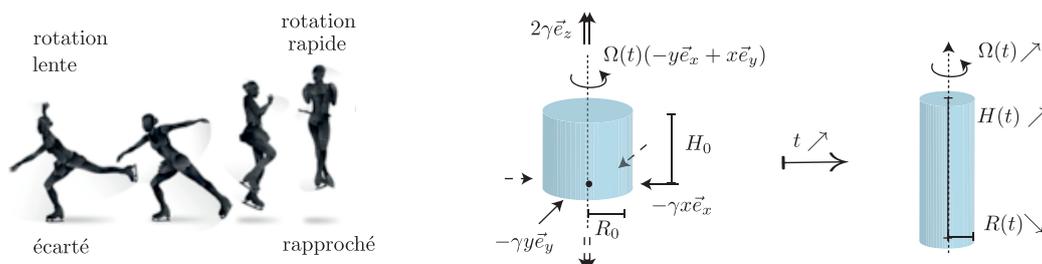
*Le théorème de Kelvin est un théorème abstrait car il fait appel à des notions assez complexes, tels qu'un contour matériels. Dans ce TD, on montre que ce théorème correspond à la fameuse loi de conservation du moment orbital, mais à l'échelle des parcelles de fluides. Cet exercice nous permet de travailler avec l'équation d'Euler, l'équation de vorticité et donne un exemple de comment on manipule mathématiquement des contours et des volumes matériels. On découvre également l'étirement de vorticité comme mécanisme générique pour l'amplification des tourbillons.*

### B.1 Théorème de Kelvin

Dans un fluide parfait incompressible, la circulation le long d'un contour matériel est conservée, tel le dicte le théorème de Kelvin. Si on nomme  $C_m(t)$  le contour matériel et  $S_m(t)$  toute surface ayant  $C_m(t)$  comme bord alors ce théorème s'écrit

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{B.1})$$

L'objectif de cet exercice consiste à vérifier ce théorème de Kelvin sur un écoulement suffisamment simple et de comprendre que physiquement, le théorème de Kelvin exprime la conservation du moment orbital de tout volume matériel. Pour être concret, on peut comparer un amas de fluide matériel (incompressible mais déformable) qui effectue un saut périlleux.



En ramenant sa masse proche de l'axe de rotation, la rotation accélère de manière à garder son moment

orbital constant. Dans ce TD, la patineuse est assimilée à un volume matériel de forme cylindrique de rayon  $R(t)$  et de hauteur  $H(t)$  variable, qui tourne à vitesse de rotation  $\Omega(t)$  variable.

## B.2 Exercice

### B.2.1 Écoulement étirement-compression-rotation, solution de l'équation d'Euler

On considère l'écoulement qui combine un étirement-compression avec une rotation solide

$$\vec{u} = \underbrace{\gamma(-x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + \alpha z\vec{e}_z)}_{\text{compression + étirement}} + \underbrace{\Omega(t)(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)}_{\text{rotation solide}} \quad (\text{B.2})$$

où  $\gamma > 0$  est un taux de compression,  $\alpha$  un nombre à déterminer et  $\Omega(t)$  un taux de rotation qui varie d'une manière bien précise afin que  $\vec{u}$  soit solution de l'équation d'Euler.

1. Exprimer l'incompressibilité de l'écoulement afin d'identifier  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer à l'aide du calcul indiciel, que le rotationnel de l'équation d'Euler donne l'équation de vorticité sous la forme.

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \quad (\text{B.3})$$

3. Montrer que la vorticité est purement verticale  $\vec{\omega} = \omega_z(t) \vec{e}_z$  dans le cas étudié. Exprimer  $\omega_z$  en fonction de  $\Omega$ , puis injecter dans l'équation de la vorticité afin de trouver  $\Omega(t)$ . On notera  $\Omega_0$  la vitesse de rotation à l'instant  $t = 0$ .
4.  crire les trois composantes de l'équation d'Euler. Simplifier et calculer la pression dans le fluide.

### B.2.2 Volume matériel cylindrique

Un volume matériel  $\mathcal{V}_m(t)$  de forme initialement cylindrique de rayon  $R_0$  et de hauteur  $H_0$  placé dans l'écoulement tournera avec le fluide et verra progressivement son rayon diminuer et et son hauteur s'agrandir. On note  $R(t)$  le rayon du cylindre,  $H(t)$  la hauteur du volume et  $\chi(t)$  sera un angle. On peut paramétriser le volume matériel par les équations

$$\begin{cases} x(S, \Theta, Z, t) &= R(t) S \cos(\Theta + \chi(t)) \\ y(S, \Theta, Z, t) &= R(t) S \sin(\Theta + \chi(t)) \\ z(S, \Theta, Z, t) &= H(t) Z \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Ici  $S \in [0, 1]$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi]$  et  $Z \in [0, 1]$  sont à interpreter comme trois variables de Lagrange curvilignes inspirées des coordonnées cylindriques. A l'instant initial  $t = 0$ , on suppose que

$$R(0) = R_0 \quad , \quad \chi(0) = 0 \quad , \quad H(0) = H_0 \quad (\text{B.5})$$

Ainsi le volume matériel initial sera le cylindre de rayon  $R_0$  et de hauteur  $H_0$  avec sa surface en bas situé en  $z = 0$ . Le premier objectif consiste à calculer  $R(t)$ ,  $\chi(t)$ ,  $H(t)$ , car ainsi on connaîtra le champ de déplacement partout.

5. Les composantes (B.4) du champ de déplacement sont solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_x(x, y, z, t) \\ \dot{y} &= u_y(x, y, z, t) \\ \dot{z} &= u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Remplacer  $x, y, z$  par les profils (B.4) et les composantes de la vitesse par celles données en (B.2). Combiner les équations pour en déduire un système d'équations différentielles pour  $R(t)$ ,  $H(t)$  et  $\chi(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{R} &= \dots \\ \dot{H} &= \dots \\ \dot{\chi} &= \dots \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Trouver  $R(t)$ ,  $\chi(t)$  et  $H(t)$  solution de ces équations et qui satisfont les conditions initiales.

6. Calculer le Jacobien

$$J = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial S} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial Z} = \begin{vmatrix} \partial_S x & \partial_\Theta x & \partial_Z x \\ \partial_S y & \partial_\Theta y & \partial_Z y \\ \partial_S z & \partial_\Theta z & \partial_Z z \end{vmatrix} \quad (\text{B.8})$$

et montrer qu'il est constant. Expliquer pourquoi ceci doit être le cas.

### B.2.3 Théorème de Kelvin & conservation du moment cinétique

On vérifie le théorème de Kelvin en calculant la circulation le long d'un contour matériel  $C_m(t)$ . Ici, on choisit ce contour comme le cercle de rayon  $R(t)$ , situé dans le plan  $z = 0$ . Ce contour matériel délimite la surface matérielle  $S_m(t)$  du disque de rayon  $R(t)$ , situé dans le plan  $z = 0$ .

- Rappeler la version du théorème de Kelvin qui fait apparaître la vorticité.
- Calculer la circulation  $\Gamma$  en int graint la vorticité  $\omega_z$  sur le disque de rayon  $R(t)$ . Montrer que  $\Gamma$  se conserve au cours du temps.

On calcule alternativement le moment cinétique  $\vec{L}$ . On montre que celui-ci se conserve et est proportionnel à la circulation.

- Donner la formule qui permet de calculer le moment cinétique  $\vec{L}$  de l'écoulement contenu dans le volume matériel et autour de l'origine.
- Y injecter l'expression de l'écoulement. Pourquoi les composantes  $L_x$  et  $L_y$  sont-elles nulles ?
- Exprimer l'intégrale permettant de calculer  $L_z$  en fonction de  $\rho$ ,  $\Omega$ ,  $x$  et  $y$ .
- Remplacer  $x$  et  $y$  par les expressions (B.4) et  $dV = J dS d\Theta dZ$ . Intégrer sur le volume (matériel) délimité par  $S \in [0, 1]$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi]$ ,  $Z \in [0, 1]$ . Montrer que  $L_z$  est également conservé.
- Montrer que  $L_z$  est proportionnel à la circulation  $\Gamma$  calculée précédemment, que la conservation de  $\Gamma$  est équivalente à celle de  $L_z$ .

### B.3 étirement de vorticité

Dans l'écoulement étudié, l'étirement de vorticité est à l'oeuvre. Il s'agit d'un mécanisme d'amplification générique des tourbillons qui explique l'amplification d'ouragans, tornades et tourbillons de vidange.

1. L'équation de vorticité trouvée plus haut est de la forme

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{étirement}} \vec{u} \quad (\text{B.9})$$

si on utilise la dérivée advective  $d/dt$ . Montrer que cette équation suggère que la vorticité d'une particule de fluide ne pourra augmenter en magnitude si la vitesse augmente dans la direction de la vorticité. Cela correspond à un étirement du tourbillon.

- Dans un tourbillon de vidange, l'écoulement qui étire et amplifie le tourbillon est crée par quoi. Schématiser l'écoulement total.
- Les cyclones prennent naissance au niveau de l' quateur, là où les eaux de mers sont très chaudes. Qu'est-ce qui crée l'écoulement d'étirement nécessaire à l'amplification ? Pourquoi les ouragans s'éteignent-t-ils au dessus de la terre ?