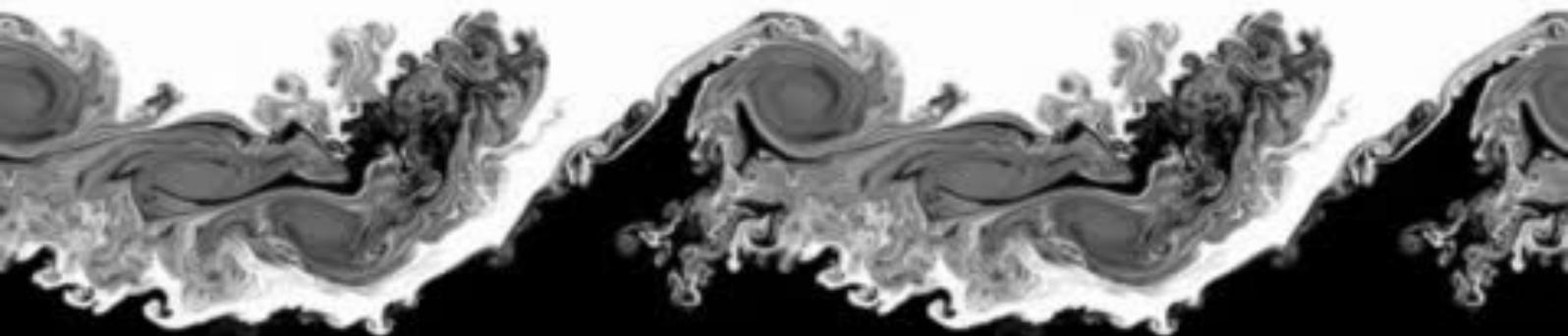


Instabilités hydrodynamiques

M2 DFE, année 2023-2024

wietze.herreman@universite-paris-saclay.fr



2022 Wietze Herreman

PUBLISHED BY SACLAY UNIVERSITY PRESS

[HTTP://PERSO.LIMSI.FR/WIETZE/](http://perso.limsi.fr/wietze/)

Je remercie M. Legrand pour avoir partagé le template latex utilisé pour la rédaction de ce poly. Wikipédia pour l'image de couverture de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Marc Rabaud, Georges Gauthier et Ivan Delbende pour m'avoir passé des éléments de leurs cours précédents.

Deuxième impression, Septembre 2022

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Les instabilités	7
1.1.1	Qu'est-ce une instabilité ?	7
1.1.2	Exemples en mécanique du solide	7
1.1.3	Exemples en mécanique des fluides	9
1.1.4	Structure du cours	12
1.2	Comment étudie-t-on la stabilité hydrodynamique ?	13
1.2.1	Définir l'état de base, l'état d'équilibre	13
1.2.2	Méthodes qualitatives	13
1.2.3	Méthodes quantitatives	14
1.2.4	Etapes clés d'une analyse de stabilité classique (linéaire, modale, temporelle)	17
2	Instabilité de Rayleigh-Taylor	21
2.1	Introduction	21
2.2	Stabilité linéaire (non-visqueuse)	22
2.2.1	Etat de base	22
2.2.2	Problème pour les perturbations linéaires	22
2.2.3	Solution	24
2.2.4	Critère de stabilité inviscide, application numérique	25
2.3	Au delà	26
2.3.1	Effets d'un confinement	26
2.3.2	Effets visqueux	26
2.3.3	Evolution non-linéaire	26
2.3.4	Rayleigh-Taylor par accélération brutale	26
2.4	Exercices	28
2.4.1	Influence du confinement du fluide (niveau débutant)	28
2.4.2	Rayleigh-Taylor dans la limite de lubrification (niveau confirmé)	29
2.4.3	Influence de la viscosité du fluide (niveau expert)	30

3	Instabilité de Rayleigh-Bénard	33
3.1	Introduction	33
3.2	Critère d'instabilité simple : $d\rho/dz > 0$	34
3.3	Stabilité linéaire	35
3.3.1	Approximation Boussinesq	35
3.3.2	Etat de base conductif	36
3.3.3	Linéarisation	37
3.3.4	Les nombres de Prandtl & de Rayleigh	38
3.3.5	Adimensionnement et formulation $w - \psi$	38
3.3.6	Solution non-visqueuse & non-diffusive	40
3.3.7	Solution visqueuse & diffusive : glissement libre	40
3.3.8	Solution visqueuse & diffusive : adhérence	42
3.4	Au dela	43
3.4.1	Géométrie finie	43
3.4.2	Evolution non-linéaire	43
3.4.3	Convection solutale	44
3.4.4	Convection thermo-solutale	45
3.5	Exercices	46
3.5.1	Conditions d'adhérence	46
3.5.2	Couche de liquide en contact avec un gaz	48
4	Instabilité de Rayleigh-Plateau	49
4.1	Introduction	49
4.2	Critère énergétique : un seul ligament ou N gouttes	50
4.3	Stabilité linéaire d'un ligament de fluide non-visqueux	50
4.3.1	Etat de base	51
4.3.2	Perturbations linéaires axisymétriques	51
4.3.3	Solution	52
4.3.4	Inclure la viscosité	53
4.3.5	Au dela..	53
4.4	Exercices	53
4.4.1	Effet d'une rotation du ligament	53
4.4.2	Effets visqueux	54
5	Instabilité de Bénard-Marangoni	57
5.1	Introduction	57
5.2	Instabilité Bénard-Marangoni	58
5.2.1	Convection dans un liquide refroidi par un gaz	58
5.2.2	Mécanisme physique	58
5.2.3	Au dela	59
5.3	Exercice	59
6	Instabilité centrifuge	61
6.1	Introduction	61
6.2	Stabilité linéaire	62
6.2.1	Etat de base : écoulement de Taylor-Couette	62
6.2.2	Mécanisme physique & critère de Rayleigh	63
6.2.3	Analyse de stabilité linéaire	65
6.2.4	Limite small gap & faible rotation différentielle : analogie avec Rayleigh-Bénard	65

6.3	Au delà	68
6.3.1	Evolution non-linéaire	68
6.3.2	Autres manifestations de l'instabilité centrifuge	71
6.4	Exercice	71
6.4.1	Analyse de stabilité numérique	71
7	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	73
7.1	Introduction	73
7.2	Etat de base & mécanisme physique	74
7.3	Analyse de stabilité linéaire	75
7.3.1	Analyse dimensionnelle	75
7.3.2	Perturbations linéaires	75
7.3.3	Solution	75
7.4	Au delà...	75
7.4.1	Kelvin-Helmholtz à l'interface entre 2 fluides différents	75
7.4.2	Effets visqueux	76
7.4.3	Kelvin-Helmholtz comme instabilité secondaire	76
7.5	Exercice : Génération de vagues	77
8	Instabilité de Saffmann-Taylor	79
8.1	Introduction	79
8.2	Écoulements dans les cellules Hele-Shaw	80
8.3	Analyse de stabilité	82
8.3.1	Etat de base (dans un canal)	82
8.3.2	Problème pour les perturbations linéaires	83
8.3.3	Solution	83
8.3.4	Au delà	85
8.4	Exercice : digitation radiale	85
9	Instabilité de Faraday	87
9.1	Introduction	87
9.2	Analyse de stabilité linéaire	88
9.2.1	Etat de base	88
9.2.2	Perturbations linéaires	89
9.2.3	Solution (spatiale)	89
9.2.4	Analyse de Floquet	90
9.2.5	Taux de croissance dans la limite $\epsilon \ll 1$: méthode perturbative	92
9.2.6	Diagramme de stabilité avec plusieurs ondes	96
9.3	Au delà	96
9.3.1	Effet de la viscosité	96
9.3.2	Evolution non-linéaire	97
9.3.3	Autres résonances paramétriques	97
9.4	Exercices	97
9.4.1	Botafumeiro	97
9.4.2	Stabilisation paramétrique d'un pendule	97
9.4.3	Stabilisation paramétrique de Rayleigh-Taylor	97

10	Instabilités des écoulements parallèles	99
10.1	Introduction	99
10.2	Stabilité linéaire non-visqueuse	100
10.2.1	Etat de base et perturbations non-visqueuses	100
10.2.2	Transformation et théorème de Squire	101
10.2.3	Equation de Rayleigh	103
10.2.4	Le critère du point d'inflexion de Rayleigh	104
10.2.5	Ecoulement de Couette : spectre continu	105
10.2.6	Ecoulements linéaires par morceau	106
10.2.7	Couches critiques	107
10.3	Stabilité linéaire et visqueuse	107
10.3.1	Etat de base visqueux	107
10.3.2	Equation de Orr-Sommerfeld	108
10.3.3	Solutions numériques	109
10.4	Le défaut de l'analyse de stabilité linéaire	110
10.4.1	Observation d'une transition sous-critique ou by-pass	110
10.4.2	Méta-stabilité (cartoon)	110
10.4.3	Autres exemples de systèmes méta-stables	110
10.5	Etudier la stabilité autrement	110
10.5.1	Stabilité linéaire non-modale	110
10.5.2	Défauts minimaux	111
10.5.3	Stabilité non-linéaire	111
10.6	Exercices	111
10.6.1	Couche de mélange d'épaisseur finie	111
A	Formulaire	113
A.1	Navier-Stokes incompressible	113
A.1.1	Forme vectorielle	113
A.1.2	Coordonnées Cartésiennes	113
A.1.3	Coordonnées cylindriques	114
A.2	Conditions aux limites	115
A.2.1	Sur une surface solide	115
A.2.2	Sur une interface mobile entre deux fluides	115
A.2.3	Sur une surface libre	116
	Bibliography	117
	Articles	117
	Books	118

1. Introduction

1.1 Les instabilités

1.1.1 Qu'est-ce une instabilité ?

De nombreux systèmes physiques présentent des instabilités, mais qu'est-ce que cela signifie ? Même si on peut en donner une définition mathématique cela ne serait pas pédagogique en début de cours. D'une manière pragmatique, une instabilité se manifeste dans un système lorsque celui-ci passe brusquement d'un état parfaitement légitime à un autre état tout aussi légitime, mais tout de même très différent. Cette transition d'un état à un autre est spontanée, c.a.d. déclenchée par un bruit dans le système qui se retrouve amplifié. C'est ce côté "inattendu", "incontrôle" ou "surprise" des instabilités qui crée autant d'intrigue et qui a poussé des générations de chercheurs à vouloir offrir des explications diverses et multiples.

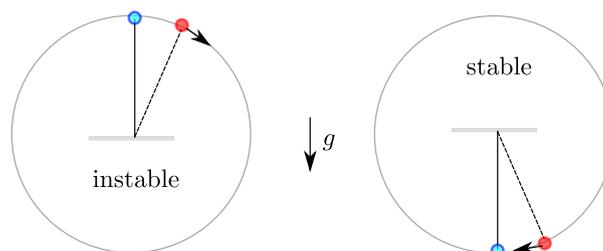


FIGURE 1.1 – Un pendule a deux points d'équilibre, un instable et un autre stable.

1.1.2 Exemples en mécanique du solide

Equilibre instable d'une pendule

En mécanique des solides, on trouve de nombreux exemples de systèmes qui peuvent être instables. L'exemple le plus simple est le pendule. Comme le montre la figure 1.1, il existe deux positions d'équilibre, une stable (en bas) et une instable (en haut). Avec beaucoup de soin, il est possible de positionner le pendule presque parfaitement en haut, mais on sait tous que le pendule n'y restera pas : l'équilibre du haut est instable. L'exemple du pendule concorde assez peu avec ce qu'on a dit plus haut, car il n'y a pas grand chose d'étonnant à voir le pendule s'écarter de l'équilibre instable. En effet, on a si peu l'habitude de voir des pendules dans un équilibre instable qu'il n'y a aucune surprise.

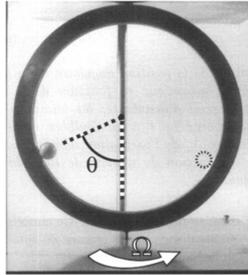


FIGURE 1.2 – La position d'équilibre du bas, d'une bille placée dans un anneau tournant devient instable au delà d'une certaine vitesse de rotation.

Bille dans un anneau tournant

Un exemple d'instabilité un peu plus étonnant est celui d'une bille qui se déplace dans un anneau que l'on fait tourner à vitesse Ω autour de l'axe vertical, cf. figure 1.1.2. Si on tourne l'anneau doucement, la bille restera dans son état d'équilibre du bas, exactement comme un pendule le ferait. Par contre, si la vitesse de rotation de l'anneau dépasse une valeur critique alors la bille quittera spontanément cet état d'équilibre, pour migrer vers une nouvelle position d'équilibre à un certain angle $\theta_* \neq 0$.

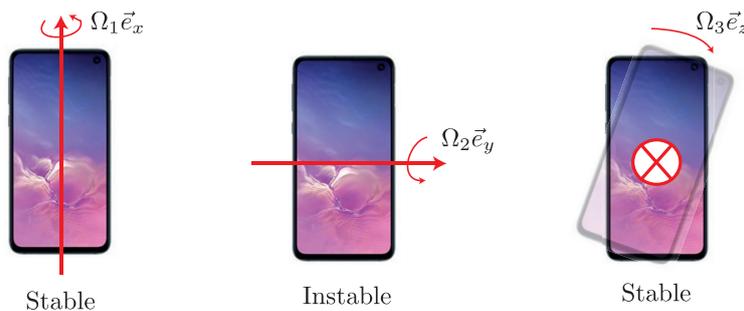


FIGURE 1.3 – Tentez de faire tourner votre smartphone autour de l'axe médian (axe 2) en le lançant dans l'air. Vous verrez que ce n'est pas si facile alors que des rotations autour de l'axe long (1) ou court (3) sont des figures bien plus faciles. Ceci est le résultat de l'instabilité de l'axe médian. Si vous essayez, pensez à mettre une coque

Instabilité de l'axe médian

On imagine un smartphone qu'on lance dans l'air, lui donnant une certaine rotation initiale Ω_0 . Essayez de faire l'expérience schématisée dans la figure 1.3 : tentez de réaliser des figures de rotation avec le smartphone autour de 3 axes différentes. Vous allez constater qu'il est facile de réaliser des rotations autour de l'axe court ou long du smartphone. Par contre, vous allez avoir du mal à réaliser des rotations autour de l'axe médian, tout simplement, parce que ces rotations sont instables. L'instabilité de l'axe médian pose des problèmes à des "skateboarders". Alors que les figures de rotation autour des axes courts (360-varial) et longs (kickflip) sont faciles à réaliser, celui où l'on fait tourner la planche autour de l'axe médian (monster flip) est particulièrement difficile à contrôler, cf. [cette vidéo](#) de Jonny Giger, skateboarder professionnel.

Flambage dynamique

Une instabilité bien connue dans les structures solides est celle du flambage dynamique. Comme le montre le schéma de la figure 1.4, on imagine comprimer une structure élastique mince et plate, par deux de ces côtés minces. Si la force est suffisamment petite, la structure restera plate. Mais au delà d'une force critique, la plaque va quitter l'état plan car celui-ci sera devenu instable. La plaque va se déformer vers une nouvelle forme flambée. La formule d'Euler pour cette force critique vaut $F_c = \pi^2 EI / L^2$ pour une plaque simplement tenue mais pas encastrée. Ici E est le module de Young, $I = a^3 b / 12$ le moment quadratique de

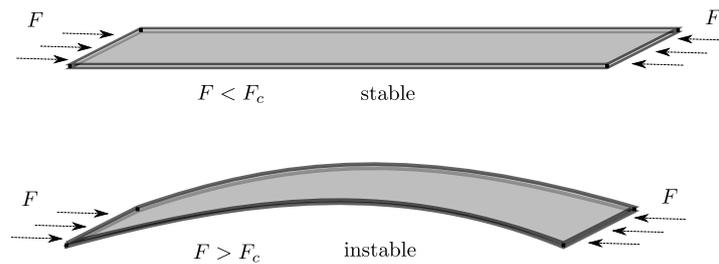


FIGURE 1.4 – Une plaque mince soumise à une force de compression sur un coté mince finira par flamber au delà d’une certaine force critique.

la poutre et a la fine épaisseur, b la largeur et L la longueur de la plaque.

1.1.3 Exemples en mécanique des fluides

Les fluides sont des milieux très déformables et c’est probablement la raison principale de l’omniprésence des instabilités dans les écoulements. Il y a simplement beaucoup de manières pour faire couler un fluide et parfois il préfère choisir une toute autre trajectoire que celle qu’on imaginait. En pratique, quasiment tous les écoulements deviennent turbulents et ce sont les instabilités hydrodynamiques qui permettent cette transition. Donnons quelques exemples pour commencer.

Expérience de Reynolds

L’expérience de Reynolds est peut être l’expérience la plus classique de la mécanique des fluides. Comme le montre la figure 1.5, un fluide est poussé à travers un tube cylindrique transparent. Grâce à un fin filet d’encre, Reynolds réussit à montrer qu’il existe un régime laminaire qui devient instable au delà d’un certain nombre de $Re = UR/\nu$ critique : $Re > Re_c$. Ce nombre portera par la suite son nom. Contrairement à ce qu’on peut croire, l’origine de cette instabilité n’a absolument rien d’évident et il a fallu attendre assez longtemps avant de disposer d’outils théoriques (stabilité non-linéaire, solutions non-linéaires exactes) qui permettent de comprendre les instabilités sous-critiques. On discutera cette expérience bien plus loin dans le cours.

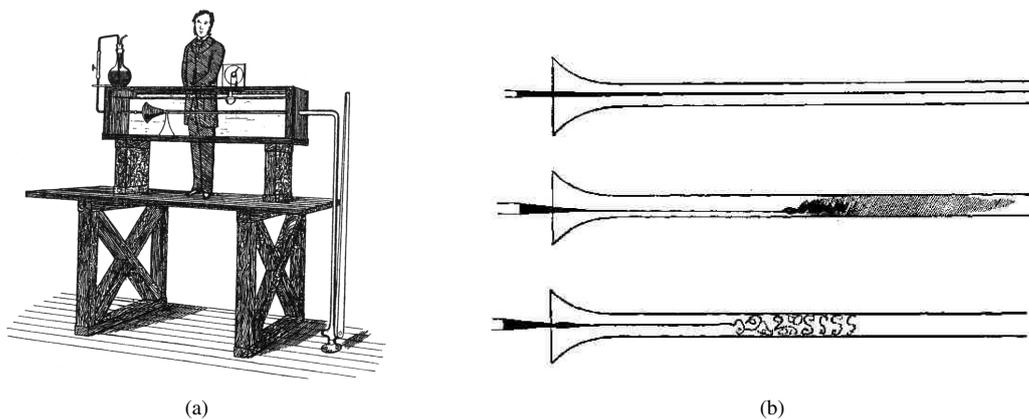


FIGURE 1.5 – Expérience de Reynolds (Source Wikipédia)

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

L’instabilité de Kelvin-Helmholtz se manifeste dans les écoulements parallèles qui présentent des couches de cisaillement. Comme le montre la figure 1.6, une couche de cisaillement est une région où la vitesse change brusquement d’intensité. Localement, dans la couche de cisaillement, on imagine assez facilement comment des parcelles de fluides tournent (ici sens horaire) et parfois on parle de couche de vorticit e au lieu de couche de cisaillement. Dans tous cas, cette couche se d estabilise par la fameuse instabilit e

de Kelvin-Helmholtz pour créer une allée tourbillonnaire de vortex corotatifs. La vidéo [suivante](#) par G. Worster (DAMTP, Cambridge University) montre un dispositif expérimental qui réalise l'instabilité avec une combinaison d'eau salée et d'eau normale. On y voit clairement l'apparition rapide et spontanée des tourbillons.

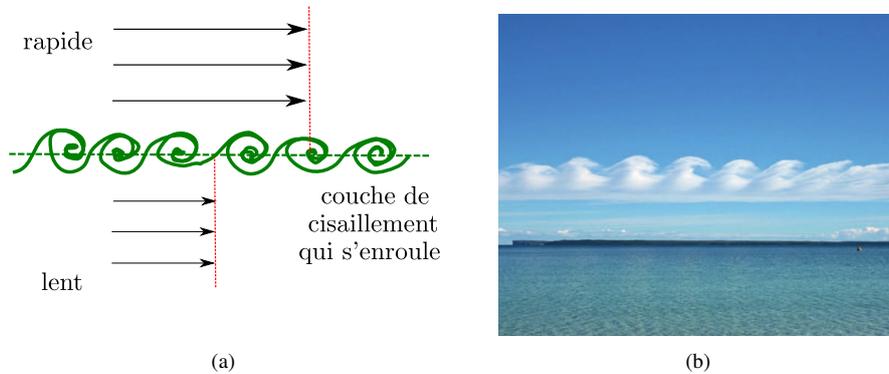


FIGURE 1.6 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz. (a) Lorsque un écoulement parallèle change brusquement de vitesse, il se forme une couche de cisaillement ou couche de vorticité. Cette couche peut perdre sa stabilité et forme une allée tourbillonnaire. (b) Parfois on peut apercevoir l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans l'atmosphère si des nuages sont advect s par les tourbillons.

Instabilité centrifuge

Lorsqu'on place un liquide entre deux cylindres co-axiaux qui tournent à des vitesses différentes, il se forme un écoulement de Taylor-Couette. Il existe un état de base où l'écoulement est purement azimutal. Selon la direction et l'intensité des vitesses de rotation du cylindre, l'état de base peut être stable ou instable. Dans le cas instable, il peut se former des rouleaux dans la direction verticale comme le suggère la figure 1.7-(a). Ces rouleaux vont ensuite se déstabiliser eux mêmes pour donner lieu à des motifs de plus en plus complexes comme le montre le panneau (b). La vidéo [suivante](#) montre comment l'instabilité centrifuge se

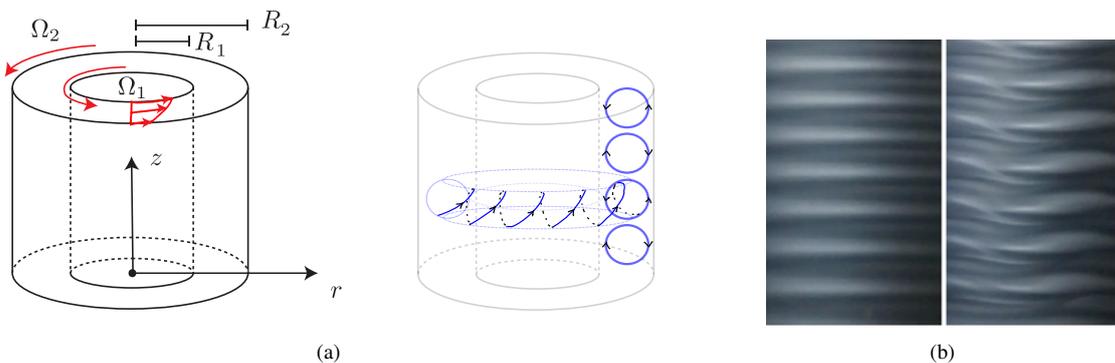


FIGURE 1.7 – Instabilité de Taylor-Couette. (a) L'écoulement azimutal entre deux cylindres co-axiaux en rotation différentielle est instable par l'instabilité centrifuge. Proche du seuil de l'instabilité, il se forme des cellules dans la direction verticale. (b) Vue expérimentale de coté ([Advanced labs](#))   l'aide de particules r flectissantes.

manifeste et donne lieu à des écoulements divers lorsque le cylindre intérieur tourne de plus en plus vite avec un cylindre extérieur au repos. Aujourd'hui on peut également simuler numériquement cet écoulement afin de produire des visuels sympas, cf. la vidéo [suivante](#), d'Adrien Kummerl nder (KIT, Karlsruhe).

Ondes de Faraday

Dans l'expérience de Faraday on remplit un réservoir avec un liquide. Sous l'effet de la gravité g et la tension de surface γ cette interface sera plate. On imagine ensuite secouer le système verticalement, en le

plaçant par exemple sur un pot vibrant. Comme schématisé dans la figure 1.8. La surface libre initialement plate, pourra sous certaines conditions se déformer et on verra alors de très jolis motifs d'ondes de gravité se former à la surface. Un exemple d'un tel motif est visible dans la figure (b). Cette image a été tirée de [11]. L'instabilité de Faraday est un exemple d'une résonance paramétrique où différentes ondes se couplent de manière résonante à travers la gravité apparente. La vidéo suivante, réalisée dans groupe de S. Fauve à (ENS, Paris), montre ce type de motif (ainsi que les gouttes marchantes).

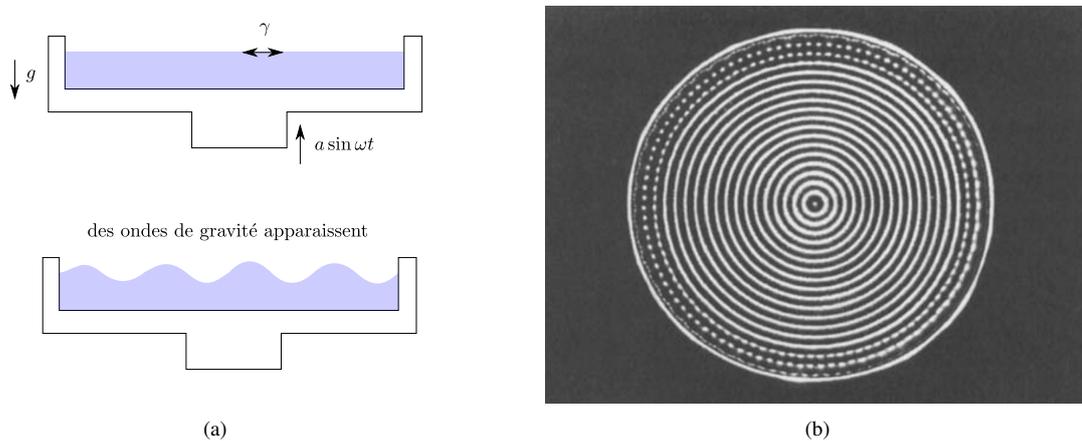


FIGURE 1.8 – Instabilité de Faraday. (a) Si on place une couche de liquide sur une plaque vibrante, des ondes apparaissent spontanément sur la surface sous certaines conditions. (b) Exemple d'une onde de Faraday vue de dessus dans les expériences de [11].

Digitation visqueuse

La digitation visqueuse ou instabilité de Saffman-Taylor a lieu dans des milieux poreux remplis par deux phases de liquides de viscosité différente. Lorsqu'on pousse le liquide moins visqueux dans le liquide plus visqueux, l'interface entre les deux phases ne garde pas une forme simple, mais se déstabilise et donne lieu à des formes très ramifiées. Cette instabilité rend l'extraction de pétrole de sols rocheux moins efficace. Les plus belles démonstrations de digitation visqueuse sont produites en laboratoire, dans des cellules de Hele-Shaw. Dans ces cellules, les fluides sont confinés entre deux plaques parallèles placées très proches l'une de l'autre. Suite à ce confinement, les écoulements se comportent comme dans des poreux mais on peut les visualiser plus simplement qu'en 3D. Dans la figure (1.9), on montre une belle image issue de simulations récentes de B. Lagrée et al. (2016) [15].

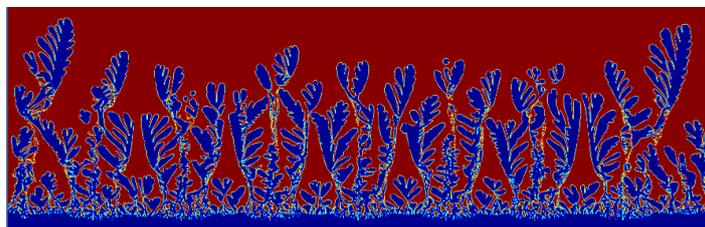


FIGURE 1.9 – Simulation numérique de digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw. Si on injecte un liquide moins visqueux (ici par en bas) dans un liquide plus visqueux, l'interface entre les deux se déstabilise et peut mener à des formes qui sont très ramifiées. [15].

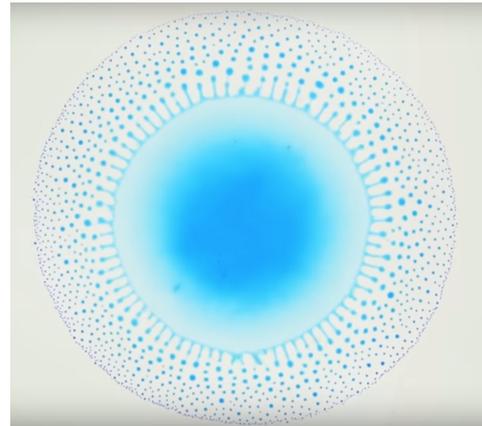
Cette vidéo montre quelques motifs de digitation visqueuse radiale dans des expériences. Cette vidéo montre comment on peut utiliser la digitation visqueuse pour faire de jolis motifs. Une couche de peinture est comprimée entre deux plaques de verre. Si ensuite, on écarte les plaques et de l'air entre par les cotés et cela peut créer des motifs de digitation visqueuse.

Instabilités induites par l'effet Marangoni

Dans des mélanges de fluides volatils, il peut arriver qu'une phase s'évapore plus vite qu'une autre. Cela modifie la valeur de la tension de surface localement sur la surface ce qui crée un écoulement. On parle de l'effet Marangoni et cet effet peut déstabiliser et créer des écoulements dans des petits volumes de liquide tels que des gouttes ou couche minces. Les larmes de vin de la figure 1.10-(a), sont dues à l'effet Marangoni. Une manifestation spectaculaire du potentiel déstabilisant de l'effet Marangoni est visible dans [la très belle vidéo](#) de G. Durey (ESPCI, Paris). On dépose une goutte d'alcool mélangé à l'eau colorée sur une surface d'huile de tournesol. La goutte ne reste pas intacte et se déstabilise spontanément en un grand ensemble de micro-gouttes.



(a)



(b)

FIGURE 1.10 – Instabilités dues à l'effet Marangoni. (a) Larmes de vin. Suite à l'évaporation accélérée de l'alcool dans le ménisque, la composition change localement et cela affecte la tension de surface et la densité. Cela crée un écoulement ascendant dans un film mince. Par contre, à un moment donné, un bourrelet se forme qui devient trop lourd pour enfin redescendre. C'est alors que ce bourrelet se déstabilise en larmes, qui semble être un mode préféré pour redescendre le liquide. (image issue de [FYFD](#)) (b) Une goutte d'alcool mélangée avec de l'eau, posée sur une surface d'huile, se fragmente spontanément en plein de petites gouttes [[durey](#)]

1.1.4 Structure du cours

On pourrait continuer et faire une galerie de tous les jolis motifs que les instabilités créent dans les écoulements, mais il est temps de passer à l'action. Le cours sur les instabilités hydrodynamiques donné cette année est nouveau et donc encore en phase de construction. Vous allez trouver des erreurs, d'orthographe et de maths et je vous invite à me les signaler. Dans les chapitres suivants on aura

- Ch. 2 : Instabilité de Rayleigh-Taylor (la gravité déstabilise)
- Ch. 3 : Instabilité de Rayleigh-Bénard (la gravité déstabilise)
- Ch. 4 : Instabilité de Rayleigh-Plateau (la capillarité déstabilise)
- Ch. 5 : Instabilité de Bénard-Marangoni (la capillarité déstabilise)
- Ch. 6 : Instabilité centrifuge (la rotation déstabilise)
- Ch. 7 : Les résonances paramétriques (des ondes qui se couplent)
- Ch. 8 : Instabilités visqueuses (régime de Stokes ou lubrification)
- Ch. 9 : Instabilités dans les écoulements parallèles (la ? déstabilise)

Le but est de se familiariser avec ces phénomènes, mais aussi d'apprendre des techniques mathématiques couramment utilisées dans les études de stabilité hydrodynamique. Plusieurs références bibliographiques ont servi à la préparation du cours. Le livre de F. Charru [8] est une très bonne lecture au sujet des instabilités hydrodynamiques et a inspiré plusieurs sections. Dans [18] il y a également quelques sections dédiées aux instabilités hydrodynamiques. Le livre de P.G. Drazin & W. H. Reid [10] est une référence importante sur le

sujet des instabilités hydrodynamiques, mais nettement moins facile d'accès. Enfin, le livre du prix Nobel S. Chandrasekhar [7] est une référence incontournable.

1.2 Comment étudie-t-on la stabilité hydrodynamique ?

Les méthodes utilisées pour étudier la stabilité hydrodynamique sont très diverses et parfois assez complexes d'un point de vue mathématique. On donne brièvement un aperçu des différentes méthodes, puis on donne les étapes clés de la méthode qui sera le plus utilisée dans ce cours.

1.2.1 Définir l'état de base, l'état d'équilibre

Toute analyse de stabilité commence par une spécification de l'état de base, de l'état de référence dont on veut connaître la stabilité. Dans ce polycopier, l'état de base sera sans exception un état d'équilibre, un écoulement stationnaire. Si on note \mathbf{U} le champ de vitesse de base, alors

$$\partial_t \mathbf{U} = 0 \quad (1.1)$$

Connaissant la complexité des équations de Navier-Stokes, il n'y a pas énormément d'écoulements stationnaires que l'on connaît analytiquement, pour lequel on sait écrire la fonction \mathbf{U} explicitement. Si on admet que le fluide soit parfait, il y a un peu plus de possibilités. Quelques exemples rencontrés dans les prochains chapitres sont

- $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, fluide au repos
Les instabilités de Rayleigh-Taylor ainsi que Rayleigh-Bénard, voir Rayleigh-Plateau ont toutes cet état de base. La pression de l'état de base est dans un équilibre hydrostatique.
- $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}_x$, écoulement parallèle
Si on ignore la viscosité, cet état correspond bien à un équilibre. Le terme non-linéaire s'annule : $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{U} = U(r)\mathbf{e}_\theta$, écoulement tournant.
Si on ignore la viscosité, cet état correspond bien à un équilibre. Le terme non-linéaire agit comme une force centrifuge qui s'équilibre avec un gradient de pression radial.

Il est possible d'étudier la stabilité d'états de base instationnaires, mais cela est bien plus difficile et nécessite des techniques mathématiques avancées (analyse de Floquet) ou des simulations numériques.

1.2.2 Méthodes qualitatives

Avant de se lancer dans des calculs compliqués, il est utile de se faire une idée de l'instabilité utilisant une approche qualitative. Qu'est-ce qu'on peut comprendre du phénomène sans faire trop de calculs ?

1. Analyse dimensionnelle
Il suffit de lister les paramètres physiques du problème afin de dérouler l'analyse dimensionnelle. Cette analyse permet d'isoler des nombres sans dimension qui peuvent être importants.
2. Raisonnements énergétiques
Parfois il est possible de comprendre l'origine de l'instabilité à l'aide d'un argument énergétique. Par exemple : "le système peut être instable s'il existe une configuration proche de l'état d'équilibre qui a une énergie potentielle plus basse".
3. Force exercée sur une particule de fluide déplacée
Un raisonnement fréquemment vu dans les analyses de stabilité hydrodynamique, consiste à imaginer déplacer une particule de fluide de sa position d'équilibre vers une position perturbée. Si l'environnement n'exerce aucune force de rappel, la particule ne reviendra pas et le système peut être instable. Cet argument de nature "Lagrangienne", nécessite toujours quelques ingrédients astucieux.

4. Mettre des termes en balance dans les équations

La connaissance des équations qui gouvernent l'écoulement permet d'aller un poil plus loin. En balançant les différents termes, dissipatifs, inertiels et autres, il est souvent possible d'identifier les paramètres sans dimension qui vont contrôler l'apparition de l'instabilité. Ce même jeu peut mener à des lois d'échelles, valables dans des régimes très non-linéaires.

1.2.3 Méthodes quantitatives

Si on veut être plus quantitatif on doit faire un peu plus d'efforts mathématiques. Souvent, cela commence par l'écriture de l'équation pour les perturbations de l'état d'équilibre. Donnons un exemple simple, où \mathbf{U} est un écoulement de base stationnaire solution de l'équation de Navier-Stokes avec sa pression P associée. On sait alors que

$$\rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla P + \rho\mathbf{g} + \eta\nabla^2\mathbf{U} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.2)$$

On perturbe l'écoulement par $\mathbf{U} + \mathbf{u}$ et la pression par $P + p$. Injectant ces champs dans l'équation de Navier-Stokes, puis éliminant les termes qui sont en équilibre pour l'état de base on trouve l'équation pour les perturbations \mathbf{u}

$$\rho\partial_t\mathbf{u} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \underbrace{\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}_{\text{Terme NL}} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

Clairement $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ est une solution. Dans un problème de stabilité, on veut typiquement savoir sous quelles conditions des petits \mathbf{u} initiaux vont pouvoir croître (le cas instable) ou toujours décroître (le cas stable) en temps et espace. Il existe plusieurs types de réponses à cette question et ça donne lieu à une classification dans les différentes analyses de stabilité

1. Analyse de stabilité linéaire :

Dans une analyse de stabilité linéaire, on fait l'hypothèse que les perturbations restent infinitésimales = infiniment petites. Dans ce cas, on peut ignorer les termes non-linéaires. Par exemple dans l'équation (1.3) cela donne

$$\rho\partial_t\mathbf{u} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

Le caractère linéaire de cette équation permet de superposer des solutions et c'est cela qui permet d'utiliser toute une série de méthodes mathématiques (superpositions de "modes" exponentiels, transformée de Fourier ou Laplace, fonctions de Green, ...). Selon la méthode utilisée, on parle de différents types d'analyse linéaire.

(a) Modale

Le caractère stationnaire de l'état de base, la linéarisation et la forme spécifique de l'équation des perturbations permettent de proposer des solutions séparables ayant un comportement exponentiel simple, par exemple

$$[\mathbf{u}, p] = [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}), \hat{p}(\mathbf{r})] e^{st} \quad (1.5)$$

pour l'équation de Navier-Stokes donnée. Si on cherche la solution sous cette forme, on parle de "modes". Toute la structure spatiale est capturée dans les champs $\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}$ et le nombre s est le taux de croissance (souvent on note $s = i\omega$). Toutes ces quantités peuvent être complexes. Pour trouver ces modes, il faut résoudre le problème aux valeurs propres

$$\rho s \hat{\mathbf{u}} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{u}} + \rho(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla \hat{p} + \eta\nabla^2\hat{\mathbf{u}} \quad , \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.6)$$

Si on ajoute des conditions aux limites à ce problème et si le problème est bien posé, alors on peut trouver une infinité de solutions. On parle de fonctions propres ou modes avec leurs valeurs propres. On appelle spectre, l'ensemble infini de valeurs propres

$$s \in \mathcal{D}_s \cup \mathcal{D}_c \quad (1.7)$$

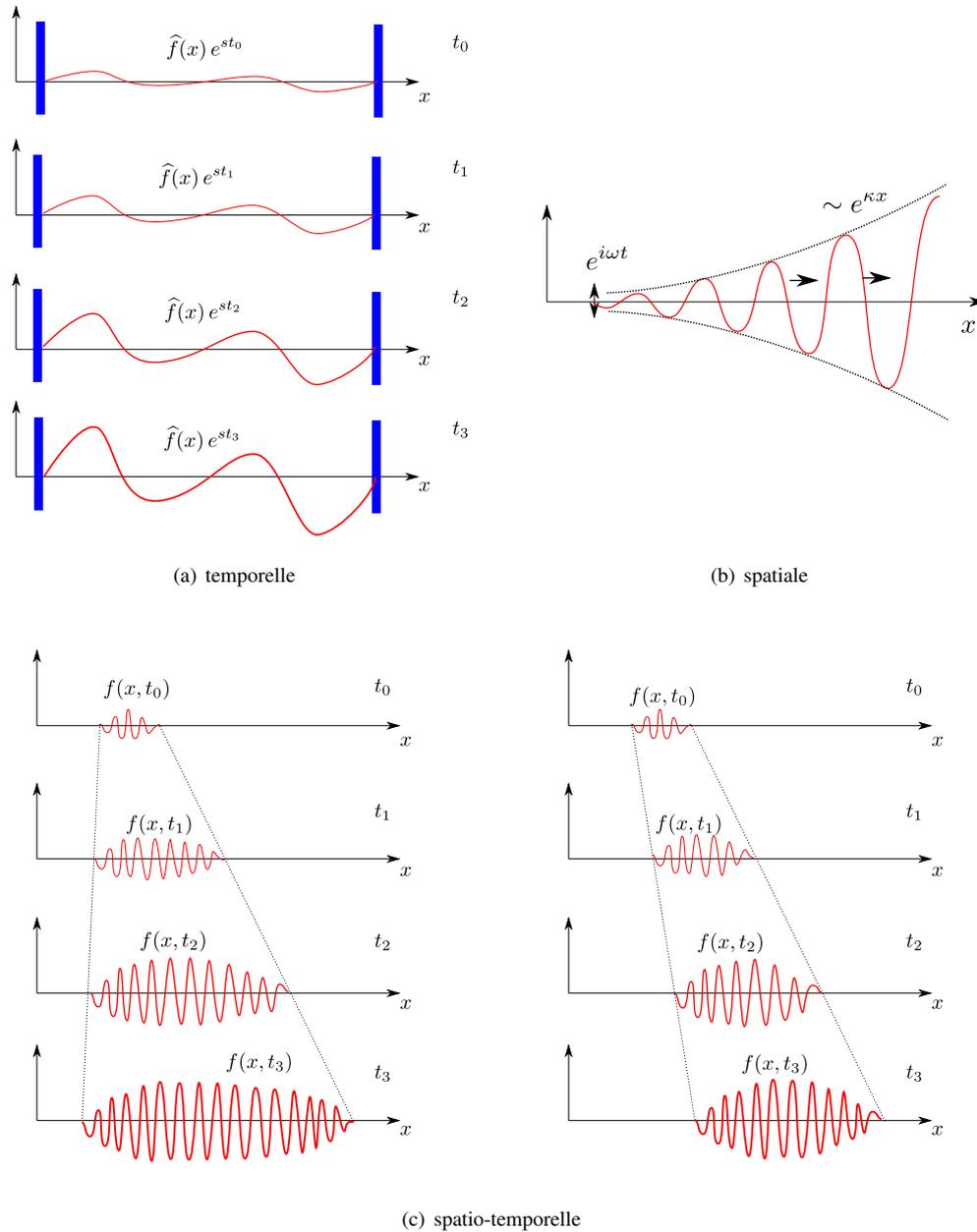


FIGURE 1.11 – Différentes manières de croître. (a) Dans une analyse de stabilité temporelle, un mode propre instable croît exponentiellement et partout à la même allure. (b) Dans une analyse de stabilité spatiale, on impose un mouvement oscillatoire à un endroit et on étudie comment l'instabilité croît spatialement. (c) Dans une analyse de stabilité spatio-temporelle, on s'intéresse aux paquets d'ondes. L'instabilité sera absolue si le paquet d'onde arrive à envahir tout le domaine (gauche), et convective (droite) si le paquet d'onde croissant est évacué par l'écoulement.

admissibles et ce spectre peut avoir une partie discrète dénombrable $\mathcal{D}_s = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ et une partie continue \mathcal{D}_c qu'on imagine comme un sous-ensemble continu de \mathbb{C} . Suite au principe de superposition, la solution générale se présente sous la forme

$$\mathbf{u} = \sum_{s \in \mathcal{D}_s} A_n \hat{\mathbf{u}}_n e^{s_n t} + \int_{\mathcal{D}_c} A(s) \hat{\mathbf{u}}(s) e^{st} ds \quad (1.8)$$

Les coefficients A_n et $A(s)$ devant les modes dépendent de la condition initiale, mais en général, on ne les calcule jamais dans un problème de stabilité. On essaie plutôt de savoir sous quelles conditions physiques, la solution donnée croît en temps et/ou en espace. C'est ici qu'on introduit une distinction de plus, qui est illustrée par le schéma de la figure 1.11.

i. Temporelle

Dans une analyse de stabilité modale et temporelle, on s'intéresse au développement temporel de chacun des modes. Si dans ce spectre, il y a au moins un mode qui a $\text{Re}(s) > 0$ alors cela signifie qu'il existe une solution qui croît exponentiellement dans le développement (1.8). Cela implique qu'il existe des perturbations infinitésimales qui vont croître exponentiellement rapidement *partout dans le domaine*, comme en figure 1.11-(a). Une analyse de stabilité temporelle est adéquate en géométrie finie, lorsque le domaine a des bords (suggéré par les traits bleus).

ii. Spatiale

Lorsque l'écoulement est ouvert, c'est à dire si le domaine fluide est supposé infini, la notion de stabilité est plus délicate. Une perturbation peut croître en temps partout dans le domaine, ou alternativement croître en espace. Dans une analyse de stabilité spatiale, on impose le comportement temporel en un point, souvent oscillatoire ($s = i\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$), puis on cherche comment cette perturbation localisée s'amplifie dans l'espace. C'est donc le taux de croissance spatiale, κ en figure 1.11-(b) qui nous intéresse plus particulièrement.

iii. Spatio-temporelle

En situation ouverte, il est également possible de faire une analyse de stabilité spatio-temporelle, moins triviale. On s'intéresse ici de manière plus générale au devenir de paquets d'ondes. Dans ce contexte apparait une distinction entre instabilités convectives et instabilités absolues, illustrée en figure 1.11-(c). Une instabilité est dite absolue, si le paquet d'onde arrive à envahir respectivement tout l'espace (ou au moins une partie fixe), comme à gauche de cette figure. Une instabilité est dite convective, si le paquet d'onde croît mais se déplace plus rapidement pour être évacué, comme à droite de cette figure.

Dans ce cours, on fera le plus souvent des analyses de stabilité temporelle et quelques analyses de stabilité spatiale. L'analyse temporelle est l'approche la plus classique et on la retrouve en mécanique des fluides en début du vingtième siècle. Les analyses de stabilité spatio-temporelle ont été développés bien plus tard (début vers 1980). Ces analyses requièrent de sérieuses compétences en analyse complexe rendant leur enseignement difficile.

(b) Non-modale

Dans une analyse de stabilité modale, la décision du caractère stable ou instable repose entièrement sur le spectre. Des critères de stabilité, " $\text{Re}(s) < 0$ pour tous les modes implique stabilité", vont alors effectivement exclure la croissance de perturbations à temps long, mais cela n'exclue pas la possibilité d'une croissance transitoire forte à temps court. Ceci est possible car dans le cas $U \neq 0$, l'opérateur qui définit le problème de stabilité linéaire n'est pas auto-adjoint et les modes propres ne sont pas orthogonaux, rendant possible ces effets transitoires. La différence entre croissance transitoire et croissance exponentielle est schématisée dans la figure 1.12. Contrairement à la croissance exponentielle, une croissance transitoire se fait sur une durée finie et la perturbation atteint une amplitude finie. Même si tous les modes sont stables, si $\text{Re}(s) < 0$ pour tout le spectre, une perturbation initiale A_0 peut atteindre de grandes amplitudes A_T . Dans une analyse de stabilité non-modale on caractérise précisément cette croissance transitoire. Au lieu

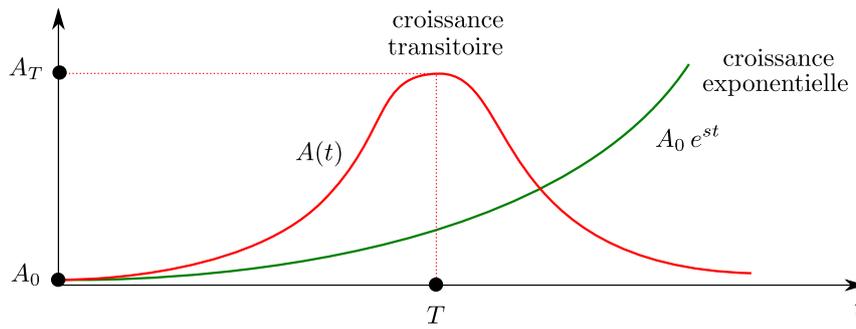


FIGURE 1.12 – Croissance transitoire ou exponentielle

de raisonner sur les modes, on y cherche à identifier sous quelles conditions des perturbations de vitesse \mathbf{u}_0 initiales peuvent croître et pas seulement à des temps très longs.

Un exercice souvent mené dans les analyses de stabilité non-modales consiste en l'identification des perturbations initiales qui sont maximalelement amplifiées à un temps T . Un tel problème se formule comme un problème d'optimisation

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_0 \text{ qui maximise } G = \frac{\langle \|\mathbf{u}_T\|^2 \rangle}{\langle \|\mathbf{u}_0\|^2 \rangle} \quad \text{avec } \mathbf{u} \text{ solution de (1.4)} \quad (1.9)$$

Ici $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ et $\langle \dots \rangle = \int_V \dots dV$ sur le domaine du fluide. Grâce à un formalisme variationnel, il est possible de trouver ces perturbations initiales optimales. Pour trouver \mathbf{u}_T à partir de \mathbf{u}_0 arbitraire, il faut toujours un code numérique capable de marcher en temps. Ceci explique pourquoi ces méthodes ne sont pas si facilement enseignées : on ne peut les dissocier des simulations numériques si on veut les appliquer en hydrodynamique. Comme ces simulations demandent un minimum de capacité de calcul numérique, il n'est pas étonnant que l'analyse de stabilité non-modale n'ait démarré que dans les années '90.

2. Analyse de stabilité non-linéaire

L'analyse de stabilité non-linéaire va un cran plus loin que l'analyse de stabilité non-modale. Grâce à certaines méthodes mathématiques avancées, il est possible de trouver des conditions minimales qui garantissent que toutes les perturbations de vitesse \mathbf{u}_0 initiales décroissent à tout temps. Ces conditions minimales sont par contre très peu précises et rarement très utiles. Plus récemment, il est devenu possible de chercher numériquement les perturbations initiales qui peuvent croître de manière maximale dans le problème non-linéaire. On a encore un problème d'optimisation à résoudre

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_0 \text{ qui maximise } G = \frac{\langle \|\mathbf{u}_T\|^2 \rangle}{\langle \|\mathbf{u}_0\|^2 \rangle} \quad \text{avec } \mathbf{u} \text{ solution de (1.3)} \quad (1.10)$$

La grande différence par rapport au cas linéaire est que la perturbation satisfait bien le problème non-linéaire (1.3). D'un point de vue numérique, ceci pose de sérieux défis supplémentaires et cela explique pourquoi l'analyse de stabilité non-linéaire a fait son entrée en mécanique des fluides récemment, depuis les années 2005. Il est intéressant de savoir est que c'est ce genre d'analyse qui a permis d'enfin d'expliquer mieux l'instabilité observée dans l'expérience de Reynolds.

1.2.4 Etapes clés d'une analyse de stabilité classique (linéaire, modale, temporelle)

La plupart des chapitres de ce poly contient des analyses de stabilité classiques : linéaire, modale et temporelle. Il est utile de lister les étapes de ce genre d'analyse, car on les retrouvera fréquemment dans les sections suivantes :

1. Définition de l'état de base

Que valent le champ de vitesse \mathbf{U} , la pression P , la température T , la position des interfaces H dans

l'état d'équilibre.

2. Linéarisation de la dynamique

On propose de perturbations de tous les champs, $\mathbf{U} + \mathbf{u}$ pour la vitesse, $P + p$ la pression, $T + \theta$ la température, $H + h$ pour la position des interfaces, qu'on insère dans les équations. On élimine les termes gouvernant la solution de base ainsi que les termes non-linéaires, afin d'obtenir enfin un jeu d'équations linéaires pour les perturbations $\mathbf{u}, p, \theta, h, \dots$. Cette étape de l'étude peut être assez complexe et nécessite parfois des développements limités (DL).

3. Adimensionnement ou pas ?

Si le problème linéaire ne fait pas intervenir trop de grandeurs physiques, il peut être très utile d'adimensionner le problème linéaire. Cela revient à fixer des échelles d'espace, temps (et de masse, courants) à l'aide des grandeurs qui caractérisent l'état de base. Par contre, s'il y a trop de paramètres, l'adimensionnement perd un peu de son utilité et il faut mieux (à mon avis) rester en variables dimensionnelles.

4. Découplage & autres variables ?

Parfois, on ne gardera pas les équations des perturbations dans leur forme fondamentale. En combinant les composantes des équations ou en changeant de variables, il est parfois possible de faire ressortir une équation de degré plus élevée mais plus maniable. On trouvera ses solutions, puis on utilisera les équations élémentaires pour reconstruire les variables originales.

5. Proposition d'une solution sous une forme adéquate

Trouver la solution d'un problème de stabilité linéaire n'est pas toujours simple mais la stationnarité et la symétrie de l'état de base peuvent aider beaucoup. Suite à stationnarité de l'état de base, on peut chercher les champs sous la forme de modes :

$$[\mathbf{u}, p, \theta, h, \dots] = \underbrace{[\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}), \hat{p}(\mathbf{r}), \hat{\theta}(\mathbf{r}), \hat{h}(\mathbf{r}), \dots]}_{\text{espace}} \underbrace{e^{st}}_{\text{temps}} \quad (1.11)$$

Dans un tel mode, on sépare une partie qui dépend de l'espace, d'un facteur exponentiel qui contient en lui, toute la dépendance temporelle. On appelle $s \in \mathbb{C}$ le taux de croissance complexe. On l'écrira également

$$s = \pm i\omega \quad (1.12)$$

ou ω est la fréquence (ou pulsation) complexe. Le signe est arbitraire et peut varier selon l'étude. Suite à la linéarité du problème et sa stationnarité, la solution générale du problème linéaire sera toujours une superposition de différents modes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ \delta \\ h \end{bmatrix} = \sum_j C_j \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_j \\ \hat{p}_j \\ \hat{\delta}_j \\ \hat{h}_j \end{bmatrix} \underbrace{e^{s_j t}}_{\text{temps}} \quad (1.13)$$

Les coefficients C_j sont arbitraires tant qu'on ne fixe pas une condition initiale. Il existera toujours une infinité de modes d'ailleurs, mais rares sont les cas où c'est gênant. Suite à la réalité du problème de base, tout mode complexe $\hat{\mathbf{u}}e^{st}$ aura un conjugué $\hat{\mathbf{u}}^*e^{s^*t}$. De cette manière une superposition

$$C\hat{\mathbf{u}}e^{st} + C_*\hat{\mathbf{u}}^*e^{s^*t} \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

peut rester réelle. Cette situation est typique pour des modes ondulatoires.

L'état de base est non seulement stationnaire, il sera aussi très symétrique dans toutes les études de stabilité qu'on montre. Ceci permet d'utiliser des classes spéciales de fonctions pour trouver les modes. Quelques cas courants :

(a) Base de Fourier (continue)

Dès lors que l'état de base est invariant dans une direction de l'espace, on pourra utiliser une base de Fourier dans les modes. Par exemple

$$\partial_x(\dots\text{état de base}\dots) = 0 \quad : \quad [\hat{u}, \hat{p}, \dots] \sim e^{ikx} \quad , k \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

Ceci est le cas de tous les écoulements de base 2D. Si l'état de base est invariant en 2 directions, alors on peut utiliser une base de Fourier en 2 directions de l'espace. Exemple

$$\partial_x \quad \text{et} \quad \partial_y(\dots\text{état de base}\dots) \quad : \quad [\hat{u}, \hat{p}, \dots] \sim e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad , k_x, k_y \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

Ceci est le cas de tous les écoulements de base parallèles. Finalement, il arrive que l'on suppose l'état de base est homogène en 3 directions de l'espace. On peut alors utiliser une base de Fourier dans les 3 directions de l'espace

$$\hat{u} = v e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad , k_x, k_y, k_z \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

Cette forme de la solution ne sera qu'adéquat si l'écoulement est uniforme ou absent, ou pour un état de base qui varie par hypothèse peu à l'échelle de la perturbation, comme dans une analyse de stabilité dite locale.

(b) Base de Fourier (discrète)

Des états de bases qui sont invariants par rotation autour d'un axe permettent de chercher les perturbations sur une base de Fourier discrète ou dénombrable. Si on appelle θ la coordonnée azimutale

$$\partial_\theta(\dots\text{état de base}\dots) = 0 \quad : \quad [\hat{u}, \hat{p}, \dots] \sim e^{im\theta} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.18)$$

(c) Harmoniques sphériques

Si l'état de base présente une symétrie sphérique, alors la structure angulaire des modes propres sera représentable par des harmoniques sphériques

$$\partial_\theta \quad \text{et} \quad \partial_\phi(\dots\text{état de base}\dots) = 0 \quad : \quad [\hat{u}, \hat{p}, \dots] \sim Y_l^m(\theta, \phi) m \in [-n, n], n \in \mathbb{N} \quad (1.19)$$

On n'en aura pas besoin ici, mais ça reste utile à savoir.

6. Trouver la solution, relation de dispersion

Arrive ensuite la partie la plus technique. Même avec toutes les invariances, il reste parfois des directions d'espace dans laquelle la solution ne varie pas simplement. Assez rapidement cela nécessite de faire appel à des fonctions spéciales (telles que les fonctions de Bessel) ou à des solutions numériques. Dans quelques rares cas (les cas classiques), il est possible de résoudre analytiquement le problème et de trouver les perturbations linéaires qui satisfont toutes les équations et toutes les conditions au limites. L'existence d'une solution sera alors soumise à une relation de dispersion, qui est toujours de la forme

$$D(s, \text{ nombres d'ondes, paramètres physiques}) = 0 \quad (1.20)$$

Il s'agit d'une relation non-triviale qui relie 1) le taux de croissance complexe s , 2) les nombres d'ondes qui caractérisent la forme spatiale de la perturbation et 3) les paramètres physiques. Parfois il est possible d'isoler une équation explicite pour s , dans quel cas on pourra facilement étudier la stabilité. Sinon, il faut trouver numériquement les racines de la relation de dispersion.

7. Seuil de l'instabilité, modes les plus instables

Le seuil de l'instabilité s'identifie en étudiant la relation de dispersion. La question est d'identifier sous quelles conditions minimales, il existe des modes qui ont $\text{Re}(s) > 0$. Souvent la réponse à cette question mène à un critère d'instabilité de la forme

$$\Pi > \Pi_c \quad , \quad \text{état de base instable} \quad (1.21)$$

Ici Π sera un nombre sans dimension qui caractérise le problème et Π_c un nombre réel, qui peut être 0.

Souvent on ne s'intéresse qu'aux modes les plus instables simplement parce que dans un paquet de modes de la forme (1.13), ce sont ceux qui ont le plus grand taux de croissance qui ont la possibilité de croître à des grandes amplitudes. Il faut ici faire attention avec la sur-interpretation de l'analyse de stabilité linéaire. Si de très nombreux modes sont instables, il y a forte chance que le vrai écoulement non-linéaire devienne turbulent ou au moins très complexe.

8. Retourner vers le mécanisme physique

Démystifier le mécanisme physique d'une instabilité est ce que le physicien doit chercher à faire avant tout. Ca vaut toujours la peine de vérifier que l'analyse de stabilité quantitative va dans le même sens que l'analyse qualitative, même si ça peut être très difficile de voir les liens.

2. Instabilité de Rayleigh-Taylor

2.1 Introduction

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est une instabilité très intuitive : si on place un fluide lourd au dessus d'un fluide léger, comme dans le schéma de la figure 2.1(a) alors le système est instable. Clairement, c'est la

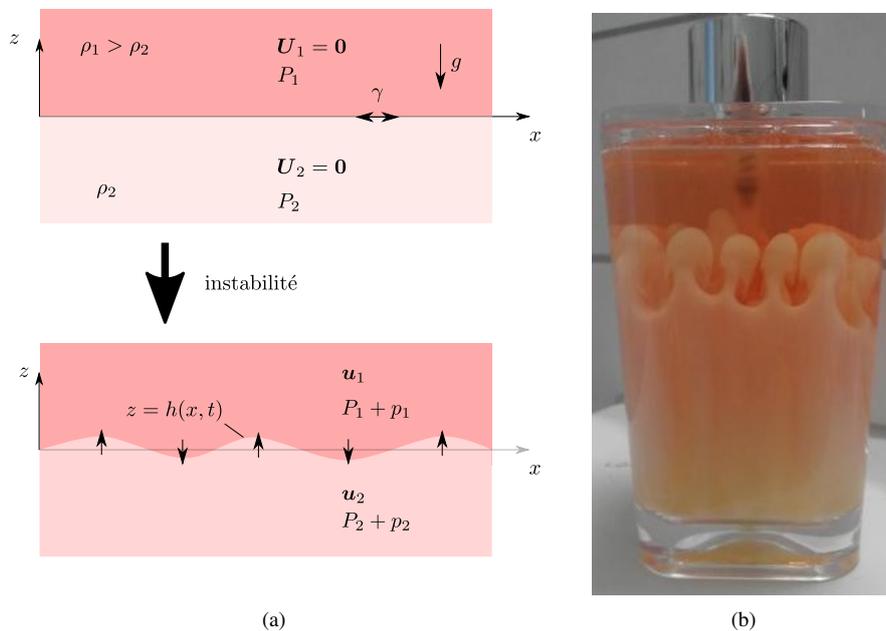


FIGURE 2.1 – (a) Un liquide lourd 1 posé au dessus d'un liquide léger 2 est instable. (b) Rayleigh-Taylor dans un déversoir de savon. Source [FlowViz](#)

gravité qui est l'élément déstabilisant. L'instabilité semble tellement intuitif, que l'existence d'un état de base, d'un équilibre, avec fluide lourd au dessus d'un fluide léger ne l'est pas (un peu comme avec l'équilibre instable de la pendule). On verra à la fin du chapitre que l'état de base de Rayleigh-Taylor est plus facile à réaliser qu'on le pense.

La figure 2.1(b) montre un cliché qui a été posté sur Reddit. Il s'agit d'un déversoir de savon liquide qui a été rempli avec une nouvelle couche de savon d'une autre couleur. De toute évidence ce nouveau savon était plus lourd et comme la viscosité des savons est assez grande, la déstabilisation de l'interface par l'instabilité de Rayleigh-Taylor prend beaucoup de temps (une nuit selon la personne qui a posté le message). Ceci permet de voir plusieurs belles structures en forme de "champignon" qui montent et descendent.

Pour voir l'instabilité se mettre en place, on vous conseille de regarder quelques vidéos en ligne. Cette vidéo de Nicole Sharp ([blog FYFD](#)) montre quelques exemples. La vidéo suivante de l'université de Cambridge, montre également quelques vidéos expérimentales. Finalement, [Cette vidéo](#) du "Laboratory for Computational Science & Engineering" de l'université de Minnesota donne un exemple de ce qu'on peut réaliser avec des simulations numériques directes de nos jours.

Le travail historique sur le sujet a été effectué par Lord Rayleigh (1900) et le sujet a été ensuite repris par Taylor en 1950 [26]. Dans ce qui suit, nous formulons l'analyse de stabilité linéaire en géométrie infinie et en absence de viscosité. Plusieurs extensions de l'analyse sont proposées en tant qu'exercice.

2.2 Stabilité linéaire (non-visqueuse)

2.2.1 Etat de base

On considère le cas le plus simple où on a deux couches de fluides semi-infinies, numérotées 1 (le haut) et 2 (le bas) de densité $\rho_1 > \rho_2$ et ρ_2 constantes, soumises à la gravité g . A l'équilibre, l'interface entre les deux est située en $z = 0$ et la tension de surface de l'interface est notée γ . Les fluides étant au repos $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}$, la pression dans les deux compartiments doit être hydrostatique

$$\mathbf{0} = -\nabla P_i - \rho_i g \mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

La pression doit aussi être continue en $z = 0$: $P_1|_{z=0} = P_2|_{z=0}$. Intégration de la balance hydrostatique et la prise en compte de la condition de continuité de la pression donne la pression d'équilibre

$$P_i = C - \rho_i g z \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Ici la constante C est arbitraire. Dans la suite, on utilisera souvent l'indice i pour parler des deux zones à la fois. Même si on pressent que la situation est très instable, on a bien trouvé une situation d'équilibre avec le fluide lourd au dessus du fluide léger et ce uniquement grâce aux gradients de pression.

2.2.2 Problème pour les perturbations linéaires

On formule une analyse de stabilité linéaire et non-visqueuse. Après linéarisation des équations d'Euler, il reste

$$\rho_i \partial_t \mathbf{u}_i = -\nabla p_i \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (2.3)$$

pour les perturbations linéaires de vitesse et pression \mathbf{u}_i et p_i . Remarquons que la gravité n'y figure plus : elle a été compensée par le gradient de pression dans l'état de base.

La complexité principale du problème de Rayleigh-Taylor réside dans la présence d'une interface mobile. Même en absence de viscosité, il est nécessaire d'y imposer trois conditions : deux conditions aux limites cinématiques et une condition dynamique, la loi de Young-Laplace. Rappelons comment imposer les conditions cinématiques : on doit exprimer que l'interface est une surface matérielle, qui bouge avec le fluide. Ceci se fait assez facilement avec la fonction $F(x, z, t) = z - h(x, t)$ qui prend la valeur 0 à l'interface. Il suffit d'exprimer que cette fonction est matérielle, c'est à dire que sa dérivée advective s'annule, sur la surface :

$$\partial_t F + \mathbf{u}_i \cdot \nabla F = 0 \Big|_{z=h} = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2.4)$$

L'index i suggère deux conditions cinématiques, car il y a en effet, deux liquides. Si on remplace $F = z - h(x, t)$ dans la relation précédente, alors on obtient

$$\partial_t h + \underbrace{\mathbf{u}_i|_{z=h(x,t)} \cdot \nabla h}_{NL} = u_{i,z}|_{z=h(x,t)} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

comme deux conditions cinématiques. Dans notre approche linéaire, on ignore tous les termes non-linéaires. Le terme souligné NL est clairement non-linéaire et on peut donc l'ignorer, mais également en $u_z|_{z=h(x,t)}$ il se cache encore une contribution non-linéaire. Ceci se voit à l'aide d'un développement limité :

$$u_z|_{z=h(x,t)} = u_z|_{z=0} + \underbrace{h \partial_z u_z|_{z=0}}_{NL} + \dots \quad (2.6)$$

Ignorant ce deuxième terme non-linéaire on arrive sur la paire de conditions cinématiques linéarisées recherchées

$$\partial_t h = u_{i,z}|_{z=0} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

De ces deux conditions, on déduit notamment que la vitesse verticale doit être continue à travers la surface $z = 0$: $u_{1,z}|_{z=0} = u_{2,z}|_{z=0}$. Remarque que la vitesse tangentielle peut être discontinue dans la limite non-visqueuse. A coté de ces conditions cinématiques, on a la condition dynamique qui exprime la continuité de la contrainte (normale) à la surface. Ici, comme le fluide est supposé parfait, cela revient à imposer la loi de Young-Laplace

$$P_1^{tot}|_{z=h} - P_2^{tot}|_{z=h} = \gamma \kappa \quad (2.8)$$

Attention aux détails, car ici on a besoin de la pression totale $P_i^{tot} = P_i + p_i$. A droite, on voit la courbure κ qui pour une surface $z = h(x, t)$ faiblement déformée vaut

$$\kappa = \frac{\partial_{xx}^2 h}{(1 + (\partial_x h)^2)^{3/2}} \approx \partial_{xx}^2 h \quad (2.9)$$

Dans cette formule, on ignore immédiatement le terme $(\partial_x h)^2$ devant 1 car ce terme est non-linéaire. De manière générale, dans les expressions de la courbure, il est conseillé de s'aider d'un schéma comme dans la figure 2.2. afin de fixer le bon signe de κ .

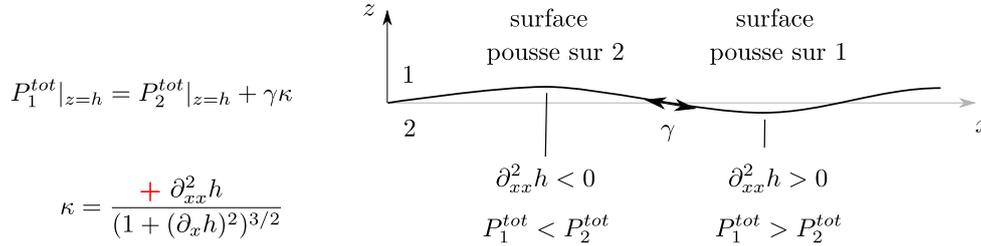


FIGURE 2.2 – Toujours se méfier du signe de la courbure si on exprime la loi de Young-Laplace. Si on considère l'interface tendue comme un ballon baudruche, on comprend facilement le signe de la surpression causée par la tension de surface. Ici, pour les conventions prises, le signe doit être + dans la formule (2.9).

On a donc

$$P_1^{tot}|_{z=h} - P_2^{tot}|_{z=h} = \gamma \partial_{xx}^2 h \quad (2.10)$$

comme résultat intermédiaire. Dans les termes de pression, on remplace $P_i^{tot} = P_i + p_i$. On réalise un DL autour de la position $z = 0$ d'équilibre. Cela donne

$$\underbrace{P_1|_{z=0} - P_2|_{z=0}}_0 + h \underbrace{\partial_z P_1|_{z=0}}_{-\rho_1 g} - h \underbrace{\partial_z P_2|_{z=0}}_{-\rho_2 g} + p_1|_{z=0} - p_2|_{z=0} + \dots = \gamma \kappa \quad (2.11)$$

Ici les \dots représentent des termes non-linéaires. Comme la pression de base varie linéairement en z on aurait pu se passer de ce DL, mais cela donne la démarche à suivre dans le cas général (si la pression ne varie pas linéairement par exemple). Par construction de l'état de base, on bien $P_1|_{z=0} - P_2|_{z=0}$ donc ces deux termes s'annulent. La condition dynamique linéaire dans ce problème devient donc :

$$p_1|_{z=0} - p_2|_{z=0} = (\rho_1 - \rho_2)gh + \gamma \partial_{xx}^2 h \quad (2.12)$$

Résumons les équations du problème linéarisé.

★ **Problème de stabilité linéaire de Rayleigh-Taylor (géométrie infinie, inviscide).**

Dans le volume

$$\rho_1 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad z \in [0, +\infty[\quad (2.13a)$$

$$\rho_2 \partial_t \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad z \in]-\infty, 0] \quad (2.13b)$$

Sur l'interface

$$\begin{aligned} \partial_t h &= u_{1,z}|_{z=0} \\ \partial_t h &= u_{2,z}|_{z=0} \\ p_1|_{z=0} - p_2|_{z=0} &= (\rho_1 - \rho_2)gh + \gamma \partial_{xx}^2 h \end{aligned} \quad (2.13c)$$

2.2.3 Solution

On cherche une solution sous la forme

$$[\mathbf{u}_i, p_i, h] = [\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{p}_i, \hat{h}] e^{st} \quad (2.14)$$

que l'on injecte dans l'équation d'Euler linéarisée pour donner :

$$\rho_i s \hat{\mathbf{u}}_i = -\nabla p_i \quad (2.15)$$

Cette équation indique que l'écoulement $\hat{\mathbf{u}}_i$ prend la forme d'un gradient, autrement dit, l'écoulement est potentiel $\hat{\mathbf{u}}_i = \nabla \hat{\phi}_i$. Suite à l'incompressibilité, ce potentiel doit être harmonique

$$\nabla^2 \hat{\phi}_i = 0 \quad (2.16)$$

Comme il y a invariance selon x dans l'état de base, on peut proposer

$$\hat{\phi}_i = f(z) e^{ikx} \quad (2.17)$$

et de manière similaire pour tous les autres champs. Cela suggère une structure ondulatoire selon x . Il suffit de prendre $k > 0$ dans la suite. De $\nabla^2 \hat{\phi}_i = 0$ on trouve $\partial_{zz}^2 f - k^2 f = 0$. Ainsi a deux possibilités $f \sim e^{\pm kz}$. Loïn de l'interface, pour $z \rightarrow \pm\infty$ les perturbations doivent décroître, ainsi il semble que

$$\hat{\phi}_1 = A_1 e^{ikx} e^{-kz}, \quad \hat{\phi}_2 = A_2 e^{ikx} e^{kz} \quad (2.18)$$

soient des bons candidats de solution avec A_1 et A_2 des constantes arbitraires pour l'instant. On calcule facilement les composantes de la vitesse par $\hat{\mathbf{u}}_i = \nabla \hat{\phi}_i$. Pour trouver la perturbation de pression, on revient sur l'équation d'Euler linéarisée :

$$\nabla \left(\rho_i s \hat{\phi}_i + \hat{p}_i \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_i = -\rho_i s \hat{\phi}_i \quad (2.19)$$

On peut ici ignorer la constante d'intégration. La pression s'exprime donc facilement avec les potentiels $\hat{\phi}_i$. Finalement, la surface libre perturbée sera nécessairement de la forme

$$h = B e^{ikx} e^{st} \quad (2.20)$$

avec B arbitraire. D'autres dépendances selon x ne sont pas compatibles avec la solution pour l'écoulement et la pression, au vu des conditions cinématiques et dynamiques.

La dépendance spatiale de tous les champs hydrodynamiques est connue mais dépend encore de trois constantes A_1, A_2, B qu'il reste à fixer. On passe donc aux conditions aux limites, qui exigent avec $u_{1,z}|_{z=0} = -A_1 k e^{ikx}$ et $u_{2,z}|_{z=0} = A_2 k e^{ikx}$ que

$$\begin{cases} sB = -kA_1 \\ sB = kA_2 \\ -\rho_1 sA_1 + \rho_2 sA_2 = (\rho_1 - \rho_2)gB - \gamma k^2 B \end{cases} \quad (2.21)$$

Ce système linéaire et homogène a des solutions non-nulles pour A_1 , A_2 , B si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule. Cette condition donne la relation de dispersion. Pour la trouver, le plus simple est d'éliminer $A_1 = -(s/k)B$ et $A_2 = (s/k)B$ avec les deux premières équations. Ensuite on injecte ces expressions dans la troisième équation afin de trouver

$$\left(\rho_1 \frac{s^2}{k} + \rho_2 \frac{s^2}{k} - (\rho_1 - \rho_2)g + \gamma k^2 \right) B = 0 \quad (2.22)$$

d'où l'équation de dispersion. Il faut

$$s^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gk - \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.23)$$

pour avoir des solutions non-nulles. En revenant en arrière, il est possible d'exprimer tous les champs en fonction d'une unique constante B :

$$[\phi_1, \phi_2, p_1, p_2, h] = B [-(s/k)e^{-kz}, (s/k)e^{kz}, \rho_1(s^2/k)e^{-kz}, -\rho_2(s^2/k)e^{kz}, 1] e^{ikx} e^{st} \quad (2.24)$$

Cette constante B est indéterminable dans l'approche linéaire.

2.2.4 Critère de stabilité inviscide, application numérique

Grâce à la relation de dispersion, il est maintenant facile d'identifier un critère de stabilité : il suffit que le taux de croissance

$$s = \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)gk - \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (2.25)$$

soit réel. Ainsi on arrive à la conclusion qu'un mode ondulatoire au nombre d'onde k est instable si

$$kl_c < 1 \quad \text{avec} \quad l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{(\rho_1 - \rho_2)g}} \quad (2.26)$$

la longueur capillaire. En géométrie infinie, il existe donc toujours des ondes instables dès que $\rho_1 > \rho_2$ et que la longueur d'onde est plus grande que $\lambda_c = 2\pi l_c$.

La figure 2.3 montre le taux de croissance s pour une combinaison d'eau avec de l'huile d'olive en fonction de k et de $\lambda = 2\pi/k$ la longueur d'onde. L'instabilité de Rayleigh-Taylor déstabilise toute structure ayant une longueur d'onde plus grande que $\lambda_c = 2\pi l_c = 0.034\text{m}$. La longueur d'onde la plus instable est environ $\lambda_{max} = 0.06\text{m}$. L'instabilité croît très rapidement, le taux de croissance dépasse quelques s^{-1} .

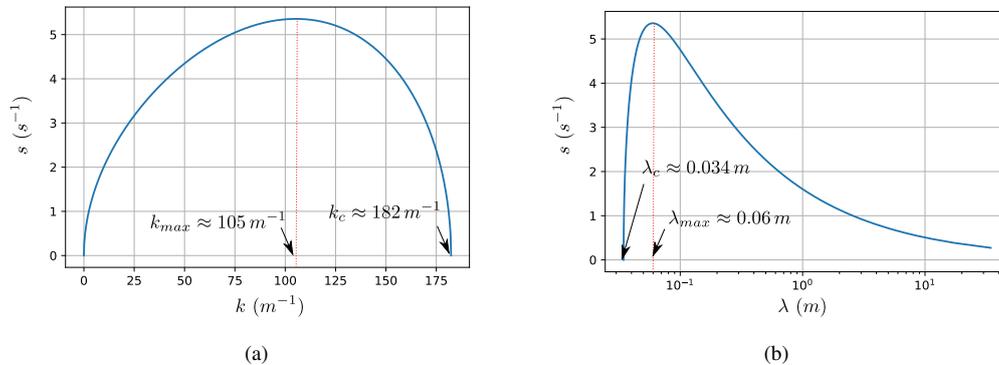


FIGURE 2.3 – Taux de croissance non-visqueux de l'instabilité de Rayleigh-Taylor en fonction du nombre d'onde k (a), de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ (b). Le liquide du haut est l'eau $\rho_1 = 1000 \text{kgm}^{-3}$ et celui du bas de l'huile d'olive $\rho_2 = 920 \text{kgm}^{-3}$. La tension de surface vaut $\gamma = 0.023 \text{Nm}^{-1}$

2.3 Au delà

2.3.1 Effets d'un confinement

En TD, on analysera la situation de deux liquides mis l'un au dessus de l'autre dans une boîte fermée. Suite à ce confinement, il existera bel et bien une condition nécessaire pour observer une instabilité : le système devra être suffisamment grand devant la longueur capillaire. En dessous de la longueur capillaire, il est en effet assez simple de mettre un liquide lourd au dessus d'un liquide léger : il suffit de penser à une éponge. Et qui n'a pas déplacé du liquide d'un verre à l'autre avec une paille et son pouce ?

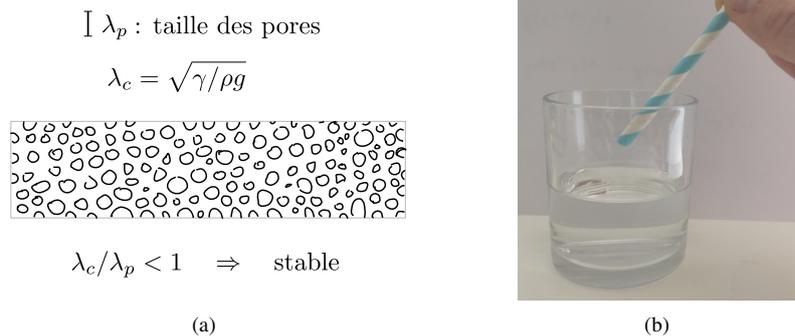


FIGURE 2.4 – (a) Avec une éponge on arrive facilement à mettre du liquide lourd au dessus d'un liquide léger, pourvu que les pores soient plus petites que la longueur capillaire et le que le liquide mouille l'éponge. (b) Transport de liquide avec une paille.

2.3.2 Effets visqueux

La viscosité a été exclue de l'analyse, mais il est possible de généraliser les calculs pour y inclure la viscosité. Cette viscosité n'arrive pas à empêcher l'instabilité mais elle va fortement diminuer le taux de croissance. L'analyse de stabilité visqueuse est assez abordable si on ignore l'inertie et la viscosité du fluide en bas (huile au dessus d'air par exemple) et ceci fait l'objet d'un autre exercice.

2.3.3 Evolution non-linéaire

Pour suivre l'évolution non-linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, il faut soit faire des expériences, soit faire des simulations numériques. Un cliché issu de simulations numériques de l'évolution non-linéaire est donné en figure 2.5. Le web regorge d'autres figures similaires. Après la première déstabilisation, on voit un ligament plonger vers le bas au centre. Proche de l'interface, cela peut causer un fort cisaillement qui devient instable par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui après mène rapidement à la turbulence. Cette instabilité de Kelvin-Helmholtz sera également couverte plus loin dans le cours.

2.3.4 Rayleigh-Taylor par accélération brutale

Pour l'instant on a pris la gravité naturelle comme moteur de l'instabilité, mais on peut facilement imaginer des contextes similaires où ce n'est pas la gravité naturelle qui cause l'instabilité. On imagine par exemple la situation où on prend un verre d'eau qu'on accélère d'abord vers le haut et qu'on arrête ensuite brusquement. Il n'est pas difficile de prédire ce qui va se passer : le verre va se vider facilement et c'est suite à l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Lors de l'arrêt brutal du verre, celui-ci subit une accélération $\mathbf{a} = -Nge_z$ dans le sens négatif, qui peut dépasser quelques fois (N) la valeur de g . Vu du référentiel non-Galiléen du verre d'eau, une densité de force fictive

$$\mathbf{f} = -\rho\mathbf{a} = N\rho ge_z \quad (2.27)$$

agit sur le fluide et cette force peut largement compenser la gravité naturelle $-\rho ge_z$ stabilisante. Dans ce repère non-inertiel, on se trouve donc dans la situation avec un fluide léger au dessus d'un fluide lourd, mais

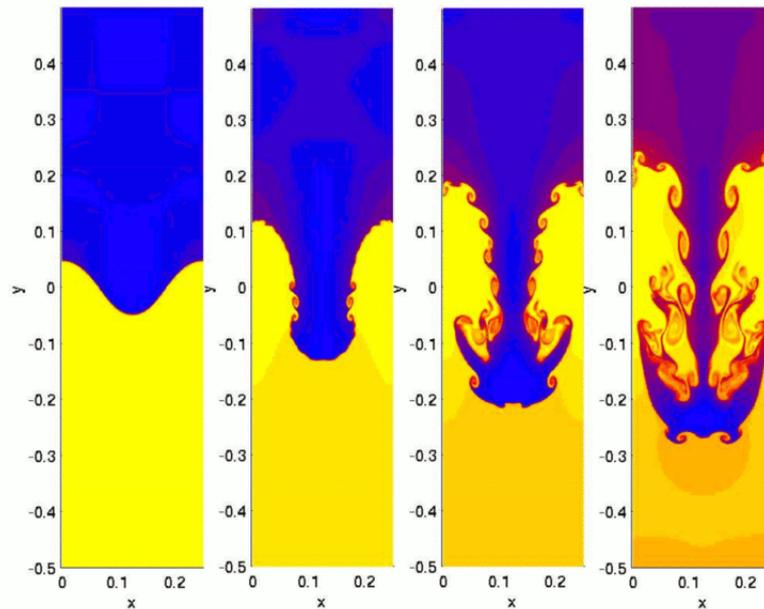


FIGURE 2.5 – Evolution non-linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor en 2D dans les simulations de Shengtai Li, Hui Li (2005, LANL USA)

avec une gravité effective inversée. L'état de base qui semblait si peu naturel au début de cette section est bel est bien réalisable et même assez facilement.

En [2], une situation semblable a été étudiée dans des tubes à essai. On imagine qu'on laisse tomber le tube à essai de quelques cm de hauteur. Pendant la chute libre, seules les forces capillaires agissent sur le fluide et selon les propriétés de mouillabilité du verre, le ménisque peut avoir une forme convexe ou concave. A l'impact, l'accélération est très grande et le fluide ressent une force effective vers le haut. Si le ménisque est concave ($h'' > 0$), si le liquide mouille le substrat, il se formera un fin ligament qui se propulse très haut pour finir par se fragmenter en gouttelettes, comme le montre la séquence de la figure 2.6. Cette

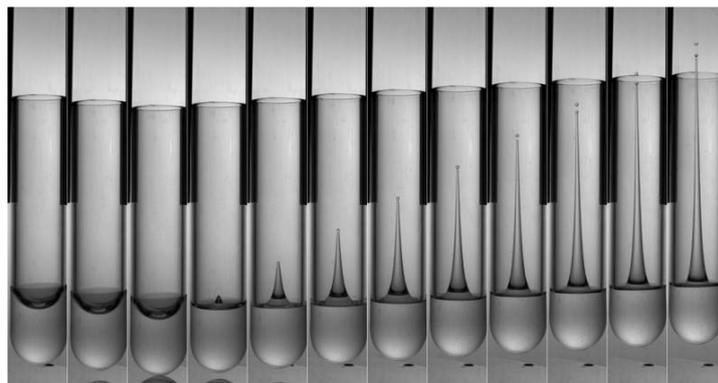


FIGURE 2.6 – Fin jet de liquide qui se forme dans un capillaire sous l'effet d'une accélération impulsionnelle. Figure issue de [2].

fragmentation en gouttes, c'est l'instabilité de Rayleigh-Plateau qui se manifeste et on la discutera plus bas. Vous pouvez faire la même expérience à la maison avec un pot de yoghourt dans lequel vous avez creusé un trou. Si vous réussissez à bien le faire tomber avec le fond à plat, un jet va se former qui peut conduire à une tâche au plafond. Comme l'ont montré [23], il est possible de créer un même genre d'accélération très forte en envoyant une impulsion Laser focalisée sur un liquide contenu dans un tube capillaire. Cela crée une bulle de vapeur dans le liquide qui cause une accélération très brusque et un jet très fin par l'instabilité de

Rayleigh-Taylor (vitesse de l'ordre de 850ms^{-1}). Ce processus est envisagé pour un jour faire des injections de micro quantités de médicaments et **sans seringue**, un peu comme l'est coutume dans star trek.

Un autre contexte plus exotique dans lequel une interface entre deux "fluides" se déstabilise suite à une accélération très forte est celui de la fusion par confinement inertiel. Dans ces expériences (LASER méga-Joule), on tire des impulsions LASER de haute puissance sur une petite capsule sphérique recouverte d'or et remplie avec du deutérium et du tritium. Cet intense bombardement fera imploser la capsule et comprime et chauffe le contenu d'une manière suffisamment forte pour allumer la réaction de fusion. Ici aussi, on se trouve dans la situation où on accélère très fortement un liquide dans un autre. L'instabilité de Rayleigh-Taylor se manifeste donc c'est elle qui est le principal obstacle pour une compression efficace du deutérium et tritium nécessaire à l'allumage de la réaction de fusion. Exemple récent d'une étude sur ce sujet [21]

L'expérience de Z-pinch est un autre exemple de situation exotique dans laquelle une version magnétique l'instabilité de Rayleigh-Taylor se manifeste. Dans cette expérience, on décharge un énorme condensateur dans un filet cylindrique constituée de fins fils de Tungstène (W). Suite à cette décharge violente, ce filet se vaporise instantanément pour devenir une nappe de plasma cylindrique. Suite à la force de Lorentz qui est dirigée radialement vers l'intérieur, cette nappe de plasma est accélérée très fortement vers l'axe, permettant ainsi à l'instabilité de Rayleigh-Taylor de se manifester. Exemple d'une telle expérience [3].

2.4 Exercices

2.4.1 Influence du confinement du fluide (niveau débutant)

On souhaite étudier l'effet du confinement du fluide sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Au lieu d'avoir deux couches de liquide semi-infinies, on suppose la configuration de la figure 2.7.

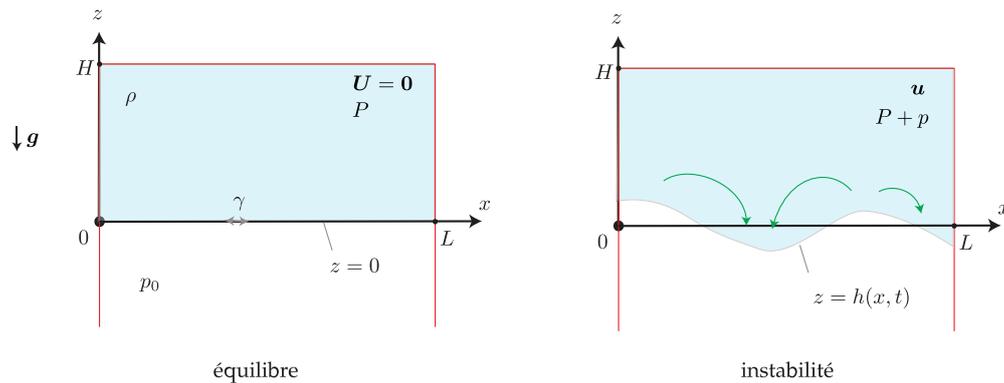


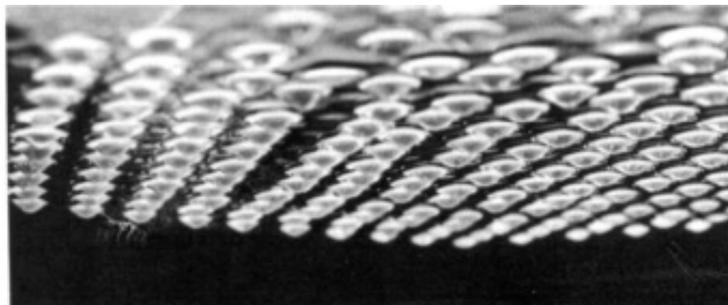
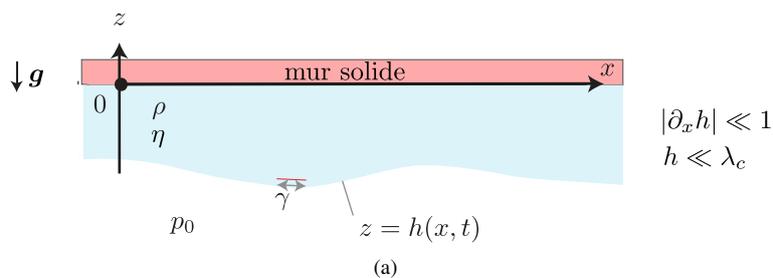
FIGURE 2.7 – L'instabilité de Rayleigh-Taylor avec un fluide lourd confiné, au dessus d'un gaz

A l'équilibre, on place un liquide lourd de densité ρ dans le domaine $x \in [0, L]$ et $z \in [0, H]$ qui est invariant selon y . Les parois $x = 0$, $x = L$ et $z = H$ sont imperméables. En dessous du liquide, on suppose un gaz à pression p_0 , de densité négligeable. On ignore les mouvements du gaz et on modélise l'interface comme une surface libre. Cette surface libre est initialement plate et placée en $z = 0$. On note $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ la gravité et γ est la tension de surface. Comme le montre la figure de droite, cet équilibre peut devenir instable : la surface va alors se déformer et un écoulement apparaîtra. Dans l'exercice, on cherche à obtenir un critère d'instabilité **non-visqueux** qui prend en compte ce confinement.

1. Que vaut la pression de base P dans le liquide ?
2. Ecrire les équations pour les perturbations linéaires \mathbf{u} et p .
3. L'écoulement reste potentiel $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Donner les conditions aux limites pour ce potentiel, ϕ sur les parois $x = 0$, $x = L$ et $z = H$ imperméables.
4. Une solution de la forme $\phi = Af(x) \cosh(k(z - H))e^{st}$ convient ici avec $k > 0$. On spécifie $f(x)$ et k mais A restera arbitraire.

(a) Montrer que la solution proposée satisfait la condition limite en $z = H$.

- (b) Identifier une famille dénombrable de solutions $f(x)$ admissibles. Préciser les valeurs (discrètes) possibles du nombre $k = k_n$ à l'aide d'un indice $n = 1, 2, 3, \dots$ entier et strictement positif.
- Donner la perturbation de pression p linéaire partout dans le fluide.
 - Sur la surface libre, on doit imposer une condition cinématique linéarisée. Montrer que cette condition cinématique implique que $h(x, t) = Bf(x)e^{st}$ avec le même $f(x)$ que dans la fonction ϕ . Exprimer la constante A en fonction de B par une première relation algébrique.
 - Sur la surface libre, on doit imposer une version linéarisée de la loi de Young-Laplace. Exprimer cette loi (faire bien attention aux signes) afin de trouver une nouvelle équation algébrique qui relie A et B .
 - Combiner les deux équations algébriques pour les constantes A et B pour trouver la relation de dispersion.
 - Montrer que l'instabilité est possible si $k < k_c$. Déterminer k_c .
 - On a vu que les nombres d'onde admissibles sont discrètes, $k = k_n$. Montrer que le mode n ne pourra se déstabiliser que si le système a une taille $L > L_{c,n}$. Donner ces longueurs critiques $L_{c,n}$ en fonction de la longueur capillaire.
 - Schématiser la forme de la surface libre qu'on s'attend à observer lorsque $L < L_{c,1}$.
Schématiser la forme de la surface libre qu'on s'attend à observer lorsque $L_{c,1} < L < L_{c,2}$.
 - Quelle sera la situation la plus instable, petit H ou grand H ? Argumentez votre réponse.
 - Calculer la longueur capillaire de l'eau. Estimer le diamètre maximal d'une paille ou capillaire qui permet de transporter du liquide comme dans la photo de la figure 2.4.



(b)

FIGURE 2.8 – (a) Schéma pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans la limite de lubrification. (b) Photographie d'une couche d'huile étalée sur une surface plane, prise quelques minutes après que la plaque ait été retournée.

2.4.2 Rayleigh-Taylor dans la limite de lubrification (niveau confirmé)

On considère un fin film de liquide visqueux collé sur la bas d'un substrat lisse. L'instabilité de Rayleigh-Taylor va se manifester comme le montre l'image (b) pour former un réseau de gouttelettes qui pendent en dessous de la plaque. On peut bien observer cet état en cuisine, sous des couvercles transparents. L'instabilité de Rayleigh-Taylor est ici freiné par la viscosité et aussi par le simple fait que le film liquide est si fin. Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, on peut suivre l'évolution linéaire et non-linéaire à l'aide d'un modèle de lubrification.

Afin de simplifier la mise en équation, on place le substrat solide en $z = 0$. La surface libre sera toujours en $z = h(x, t)$ avec $h < 0$. On note H la hauteur du film plan à l'équilibre. On remplace l'équation de Navier-Stokes par l'approximation de lubrification

$$0 \approx -\partial_x p + \eta \partial_{zz}^2 u_x \quad (2.28a)$$

$$0 \approx -\partial_z p - \rho g \quad (2.28b)$$

Afin que cette approximation ait du sens, on doit s'assurer que le film reste toujours fin, que le nombre de Reynolds $[u_z]H/\nu \ll 1$ et que $H^2/\nu T \ll 1$. Pour un film qui se déforme avec un taux de croissance s , on a $T = s^{-1}$ et la condition cinématique nous informe $[u_z] = sH$. Ainsi il suffit de supposer

$$|\partial_x h| \ll 1 \quad , \quad sH^2/\nu \ll 1 \quad (2.29)$$

dans la suite.

1. Intégrer la composante z du modèle, selon z pour trouver la pression. Utiliser la loi de Young-Laplace en $z = h(x, t)$ pour fixer la constante d'intégration (On ignorera le terme visqueux $2\eta\partial_z u_z$ dans la condition dynamique qui est négligeable devant les autres). L'expression pour la courbure sera $\kappa = \partial_{xx}^2 h$ au vu des hypothèses du modèle.
2. Injecter cette pression dans l'équation pour la composante x . Intégrer deux fois pour trouver u_x . Utiliser la condition d'adhérence en $z = 0$ et la condition dynamique adéquate sur la surface libre en $z = h$ pour fixer ces constantes.
3. Utiliser l'incompressibilité pour trouver une équation pour $\partial_z u_z$ puis l'intégrer pour trouver u_z . Utiliser la condition d'imperméabilité en $z = 0$ pour fixer la constante d'intégration.
4. Exprimer $u_x|_{z=h}$ et $u_z|_{z=h}$, puis la condition cinématique non-linéaire

$$\partial_t h + u_x|_{z=h} \partial_x h = u_z|_{z=h} \quad (2.30)$$

On a bien besoin de tous les termes ici. Montrer que cette équation s'écrit comme

$$\partial_t h = \partial_x \left[\left(\frac{\rho g}{\eta} \partial_x h + \frac{\gamma}{\eta} \partial_{xxx}^3 h \right) \frac{h^3}{3} \right] \quad (2.31)$$

Il s'agit d'une équation d'évolution non-linéaire pour la surface du film.

5. On s'intéresse d'abord au régime linéaire. Il est facile de constater que $h = -H$ est bien une solution de l'équation précédente. On perturbe cette position par $h = -H + \tilde{h}$. Donner l'équation d'évolution linéarisée pour \tilde{h} .
6. Suite à l'invariance selon x , on peut toujours proposer $\tilde{h} = B e^{ikx} e^{st}$. Donner le taux de croissance s selon ce modèle.
7. Tracer graphiquement le taux de croissance pour un dispositif rempli avec un $H = 1\text{mm}$ d'huile silicone de densité $\rho \approx 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, viscosité $\nu = 0.05 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, une tension de surface $\gamma = 0.02 \text{ N m}^{-1}$. Quelle est la longueur d'onde avec le taux de croissance maximal. Combien de temps faudra-t-il typiquement attendre pour que l'instabilité de Rayleigh-Taylor apparaisse. Les hypothèses du modèle de lubrification, sont-elles bien satisfaites ?
8. L'équation obtenue pour h étant non-linéaire, on peut s'intéresser à l'état stationnaire ultérieur qui peut se former dans ce dispositif. Trouver au moins une solution non-linéaire qui convient.

2.4.3 Influence de la viscosité du fluide (niveau expert)

Nous revenons au système physique étudié dans l'exercice 1 où un liquide lourd est placé au dessus d'un gaz. On suppose le liquide lourd dans le domaine semi-infini du haut, comme illustré dans la figure 2.9.

Comparé à l'exercice précédent, on n'a plus d'effets de confinement, mais on prend en compte la viscosité η du fluide et sans approximation de lubrification. Le but est de retrouver la relation de dispersion visqueuse qui devient assez complexe. Nous fournissons un notebook Jupyter `RT_instab.ipynb` qui montre comment on manipule en pratique cette relation de dispersion complexe.

1. Donner la pression P de base dans le liquide. Cette pression est-elle influencée par la viscosité ?
2. Ecrire les équations pour les perturbations linéaires u et p .

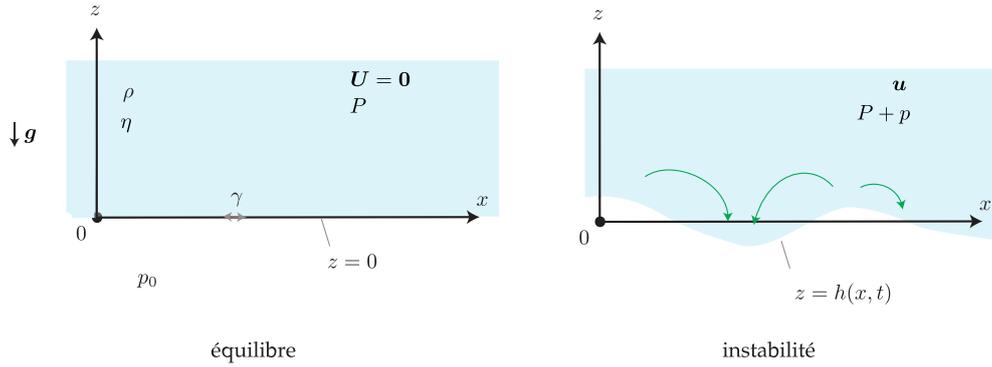


FIGURE 2.9 – L’instabilité de Rayleigh-Taylor avec un fluide lourd visqueux et semi-infinie, au dessus d’un gaz

3. On cherche l’écoulement comme $\mathbf{u} = \nabla\phi + \bar{\mathbf{u}}$. La partie potentielle est telle que

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \rho\partial_t\phi + p = 0 \quad (2.32)$$

La correction visqueuse $\bar{\mathbf{u}}$ est solution d’un problème de diffusion

$$\partial_t\bar{\mathbf{u}} = \nu\nabla^2\bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.33)$$

avec $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique. Donner des solutions $\phi, p, \bar{\mathbf{u}} \sim e^{ikx}e^{st}$. Utiliser $K = \sqrt{k^2 + s/\nu}$ comme notation dans la correction visqueuse. Montrer que ces profils dépendent de deux constantes arbitraires, qu’on nommera A (dans ϕ) et C (dans $\bar{\mathbf{u}}$). Ecrire les composantes de vitesse et pression explicitement. La déformation de la surface sera

$$h = Be^{ikx}e^{st} \quad (2.34)$$

comme avant dans le problème non-visqueux.

4. Afin de fixer les 3 constantes A, B, C , on posera 3 conditions aux limites sur la surface libre
- Exprimer la condition cinématique linéarisée, pour trouver une première équation algébrique qui relie A, B, C .
 - Exprimer la condition dynamique linéarisée qui prend en compte la viscosité. Cette relation a deux composantes, qui donnent deux autres équations algébriques qui relient A, B, C .
5. Eliminer A et C de ces équations algébriques pour trouver la relation de dispersion visqueuse

$$s \left[s + 2\nu k^2 \frac{\left(\sqrt{\frac{k}{K}} - \sqrt{\frac{K}{k}} \right)^2}{\frac{k}{K} + \frac{K}{k}} \right] - \left(gk - \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \frac{\frac{k}{K} - \frac{K}{k}}{\frac{k}{K} + \frac{K}{k}} = 0 \quad (2.35)$$

On ne peut que trouver les racines de cette équation numériquement. Par contre, théoriquement il est possible d’étudier les limites de faible et forte viscosité.

6. Afin de procéder, il faut mieux adimensionner. On choisit comme échelle d’espace la longueur capillaire

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (2.36)$$

Avec g et l_c , on construit une échelle de temps naturelle

$$t_c = \sqrt{\frac{l_c}{g}} = \frac{\gamma^{1/4}}{\rho^{1/4} g^{3/4}} \quad (2.37)$$

Il s'agit du temps de chute libre sur une distance l_c . On notera

$$\tilde{k} = kl_c \quad , \quad \tilde{s} = st_c \quad (2.38)$$

le nombre d'onde et le taux de croissance adimensionné. Récrire la relation de dispersion en absence de viscosité, $s_{nv}^2 = gk - (\gamma k^3/\rho)$ sous forme adimensionné.

7. Trouver la relation de dispersion visqueuse adimensionné comme

$$\tilde{s} \left(\tilde{s} + 2\beta\tilde{k}^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\dots} + \frac{1}{\sqrt{\dots}}} \right) \right) + (\tilde{k} - \tilde{k}^3) \frac{\frac{1}{\sqrt{\dots}} - \sqrt{\dots}}{\frac{1}{\sqrt{\dots}} + \sqrt{\dots}} = 0 \quad (2.39)$$

Ici nous avons

$$\beta = \frac{\nu\rho^{3/4}g^{1/4}}{\gamma^{3/4}} = Mo^{1/4} \quad (2.40)$$

un nombre sans dimension, directement lié au nombre Mo , qui porte le nom du nombre de Morten. La racine $\sqrt{\dots}$ correspond à

$$\sqrt{\dots} = \sqrt{1 + \frac{\tilde{s}}{\beta\tilde{k}^2}} \quad (2.41)$$

8. Dans le notebook Jupyter `RT_instab.ipynb`, on explique comment il est possible d'identifier numériquement les racines $\tilde{s}(\tilde{k})$, de cette relation de dispersion. Cela nécessite une méthode d'optimisation.

3. Instabilité de Rayleigh-Bénard

3.1 Introduction

L'instabilité de Rayleigh-Bénard est en quelque sorte une "version continue" de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Si on chauffe une couche de liquide par le bas et refroidit par le haut, comme dans le schéma de la figure 3.1-(a), un écoulement de convection va pouvoir se créer sous certaines conditions. Proche du seuil de l'instabilité, l'écoulement ressemble à un assemblage de rouleaux comme le montre le cliché de la figure 3.1-(b), obtenu par interférométrie et issue du célèbre Album of Fluid Motion.

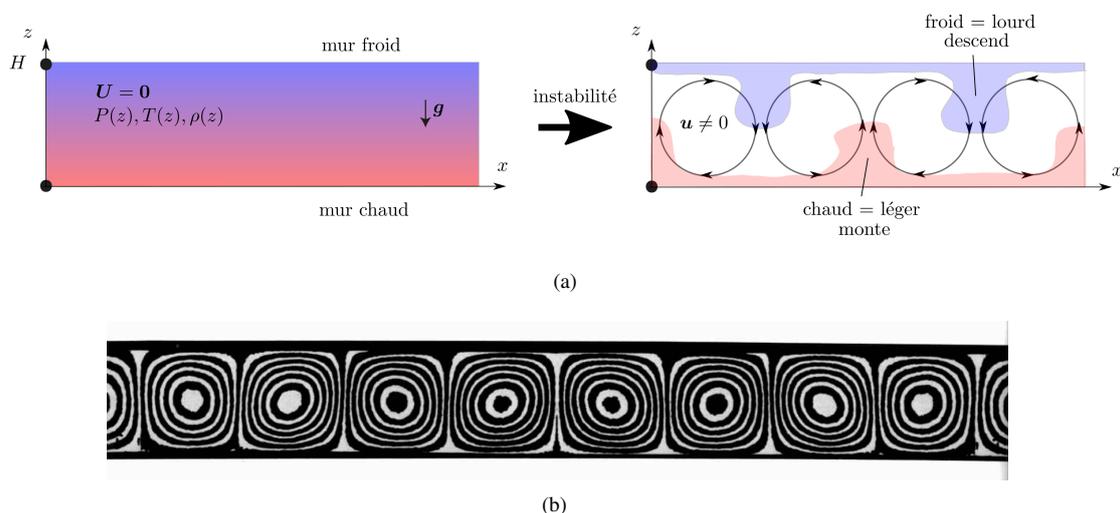


FIGURE 3.1 – (a) Schéma du dispositif classique de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Une couche de fluide au repos, chauffée par en en bas se mettra spontanément en mouvement au delà d'un certain seuil. (b) Visualisation des rouleaux de convection par interférométrie (Album of Fluid Motion, M. Van Dyke).

Les écoulements de convection sont omniprésents dans notre quotidien, en cuisine, au dessus des chauffages, dans l'atmosphère. La vidéo [suivante](#) donne un joli exemple de ce qu'on peut voir en surface si on chauffe une fluide avec de la poudre d'aluminium dedans pour donner du contraste. L'indice optique

d'un milieu transparent fluide varie avec la température et si on illumine donc un écoulement de convection dans ce milieu, on apercevra des "schlieren" dans l'ombre projetée. Cette technique permet visualiser les écoulements de convection et notamment les panaches, exemple dans la figure 3.2.

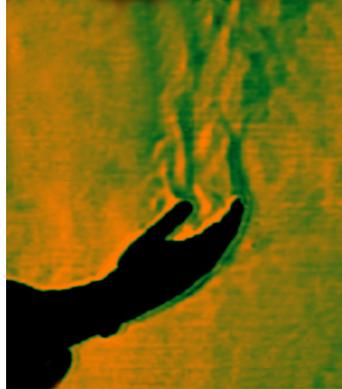


FIGURE 3.2 – Plumes de convection au dessus d'une main plus chaude que son environnement (G. Settles, Wikimedia Commons)

La convection a d'abord été étudiée expérimentalement par Bénard, sur le sol Français [5]. La première analyse de stabilité est due à Rayleigh en 1916 [19]. Son analyse visqueuse suppose des parois idéalisées sur lesquelles l'écoulement peut glisser. L'étude plus réaliste avec conditions d'adhérence a été réalisée par [13, 14]. Ci-dessous, on reproduit quelques résultats classiques.

3.2 Critère d'instabilité simple : $d\rho/dz > 0$

L'ingrédient physique qui cause l'instabilité de Rayleigh-Bénard est encore la gravité. Le liquide a une densité qui diminue avec la température montante et s'il existe un gradient de température $T(z)$, il existe donc un gradient de densité $\rho(z)$. Il est facile de montrer le critère d'instabilité suivant.

★ **Critère d'instabilité de convection.** Pour qu'une stratification horizontale de densité $\rho(z)$ puisse devenir instable dans le champ gravitationnel $-ge_z$ il faut que

$$d\rho/dz > 0 \quad (3.1)$$

Il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante. ■

Prenons une particule de fluide de volume δV en z . Son poids $-\rho(z)\delta V ge_z$ est localement compensé par la poussée d'Archimède $+\rho(z)\delta V ge_z$ exercé par le fluide qui l'entoure, et le maintient donc en équilibre à cette hauteur z . Si on déplace cette particule vers une nouvelle position $z + dz$ elle aura toujours la même masse et donc le même poids, mais elle sera dans un environnement de densité différente $\rho(z + dz)$. Cela modifie donc la poussée d'Archimède à $\rho(z + dz)g\delta V e_z$ et dans le bilan des forces sur cette particule déplacée on a

$$\mathbf{F} = \underbrace{-\rho(z)g\delta V e_z}_{\text{poids}} + \underbrace{\rho(z + dz)g\delta V e_z}_{\text{Archimède}} = \frac{d\rho}{dz}g\delta V e_z \quad (3.2)$$

Cette force n'est pas une force de rappel si $d\rho/dz > 0$, si la densité augmente en montant dans le fluide. Un déplacement infinitésimal de la particule vers le haut (ou vers la bas) peut alors s'amplifier et entraîner l'apparition spontanée d'un mouvement, dit de convection. Pour réaliser $d\rho/dz > 0$, il suffit de chauffer le liquide par en bas comme indiqué sur le schéma de la figure 3.1-(a).

3.3 Stabilité linéaire

3.3.1 Approximation Boussinesq

Pour aller au delà du précédent argument physique, on fait une analyse stabilité linéaire. La formulation classique de l'instabilité de Rayleigh-Bénard repose sur l'approximation Boussinesq qui donne un modèle minimal et adéquat pour décrire des mouvements de convection. La dérivation détaillée du modèle à partir des équations pour les écoulements compressibles est assez laborieuse et on ne le fait pas ici en très grande rigueur. On se contente d'expliquer quelques étapes de simplification.

En toute rigueur, on a un milieu de densité variable et on doit donc partir des lois d'évolution pour un fluide **compressible**. Si ce fluide est Newtonien on a

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z + \nabla \cdot (2\eta \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{2}{3} \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (3.3b)$$

$$\rho c_v (\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \left(p + \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\eta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.3c)$$

comme lois d'évolutions. Ici $\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$, le tenseur du taux de déformation. Les grandeurs η , λ , c_v sont la viscosité dynamique, la conductivité thermique et la chaleur spécifique volumique du milieu. Les champs de pression, densité et température sont reliés par une loi d'état qui a la forme générique

$$F(p, \rho, T) = 0 \quad (3.3d)$$

et qui est purement thermodynamique (on ne peut pas calculer cette loi, elle dépend du matériau). La connaissance de cette loi fait de (3.3) un modèle fermé, qu'on peut par exemple utiliser dans des simulations numériques. Par contre, pour mener une analyse de stabilité, ce jeu d'équations est trop complexe.

Afin de mettre en place le modèle Boussinesq, on commence par imaginer une situation de référence où le milieu est au repos $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$, à température constante T_0 , à densité constante ρ_0 et à la pression P_0 . La loi d'état $F(p_0, \rho_0, T_0) = 0$ est alors satisfaite. On imagine maintenant qu'on perturbe cet état de référence. Toujours selon la même loi d'état, on doit avoir $F(p_0 + p', \rho_0 + \rho', T_0 + T') = 0$, mais pour de faibles déviations, cela se simplifie à

$$\underbrace{F(p_0, \rho_0, T_0)}_0 + \underbrace{p' \frac{\partial F}{\partial p} \Big|_0}_{\text{ignoré}} + \rho' \frac{\partial F}{\partial \rho} \Big|_0 + T' \frac{\partial F}{\partial T} \Big|_0 \approx 0 \quad (3.4)$$

au premier ordre. Dans l'approximation Boussinesq, on ignore le terme souligné qui est associé à la variation de pression. Cette hypothèse convient pour décrire des écoulements lentement variables ou subsoniques. Elle ne convient pas pour les écoulements rapidement variables (les ondes sonores) ou supersoniques. En pratique, l'omission de ce terme va tout simplement filtrer les ondes sonores du modèle. Ce qui reste est une loi linéaire entre écarts de densité ρ' et écarts de température T' , une loi qui peut alternativement être écrite comme

$$\rho = \rho_0 + \rho' \approx \rho_0 (1 - \beta T') \quad (3.5)$$

On appelle β le coefficient de dilatation thermique volumique du milieu. Même s'il existe des matériaux qui se densifient avec une température montante (caoutchouc, plastics, l'eau au voisinage de 4° C), la plupart des matériaux devient plus légère avec T et a donc $\beta > 0$. Quelques ordres de grandeurs pour β sont dans le tableau suivant

	air (20°C)	eau (20°C)	Al (aluminium)	W (tungsten)	Si ₃ N ₄ (nitride de silice)
$\beta(\text{K}^{-1})$	3.5×10^{-3}	0.20×10^{-3}	69×10^{-6}	13.5×10^{-6}	2.6×10^{-6}

TABLE 3.1 – Coefficients de dilatation thermique volumique β de plusieurs matériaux. Les gaz ont les plus grands coefficients de dilatation, les céramiques les plus petits.

Si ΔT est un écart de température caractéristique, on peut ajouter la condition nécessaire

$$\beta \Delta T \ll 1 \quad (3.6)$$

pour s'assurer qu'on reste bien dans un régime de variation linéaire de la densité avec la température. Les autres paramètres constitutifs du milieu, tels que la viscosité ou la diffusivité thermique peuvent aussi dépendre de la densité, pression ou température, mais on ignore cela dans le modèle Boussinesq. La viscosité est celle du milieu de référence $\eta \approx \eta_0$ et la diffusivité thermique $\kappa_0 = \lambda_0/\rho_0 c_v$ aussi.

Après cette discussion sur les propriétés thermodynamiques du milieu, trouvons maintenant le modèle minimal de Boussinesq qui doit décrire la dynamique du milieu. Si on injecte la loi (3.5) pour ρ dans l'équation de la conservation de la masse, on obtient

$$\underbrace{\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}}_{\text{dominant}} - \rho_0 \beta T' \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho_0 \beta (\partial_t T' + \mathbf{u} \cdot \nabla T') = 0 \quad (3.7)$$

Dans cette balance, on peut ignorer deuxième et troisième terme devant le premier terme dominant, sous l'hypothèse $\beta \Delta T \ll 1$. Au premier ordre, on peut donc supposer que $\nabla \cdot \mathbf{u} \approx 0$, que l'écoulement est incompressible. En conséquence, le terme $\frac{2}{3} \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u})$ sera négligeable dans l'équation de Navier-Stokes, pareil pour $-(p + \frac{2}{3}\eta) \nabla \cdot \mathbf{u}$ dans l'équation de la température. Dans les termes d'inertie de l'équation de Navier-Stokes, on se restreint de la même manière aux termes dominants

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \approx \rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad (3.8)$$

On y ignore encore la faible variation de la densité sous l'hypothèse $\beta \Delta T \ll 1$. Dans le terme de gravité par contre, il est nécessaire de garder la variation de la densité avec la température

$$-\rho g \mathbf{e}_z = \underbrace{-\rho_0 g \mathbf{e}_z}_{\text{hydrostat}} + \underbrace{\rho_0 g \beta T' \mathbf{e}_z}_{\text{flottaison}} \quad (3.9)$$

Si on ignore, ici aussi, la variation de la densité on n'aurait plus que la partie constante de la force gravitationnelle, qui elle, se compense toujours par un gradient de pression dans un écoulement fermé et ne crée donc aucun écoulement. Le deuxième terme $\rho_0 g \beta T' \mathbf{e}_z$, dite de flottaison ou d'Archimède est donc crucial pour créer un écoulement. C'est lui qui traduit qu'une parcelle de fluide plus chaude ($T' > 0$) sera plus légère et subit donc une force dirigée vers le haut. Inversement pour une particule plus froide. Enfin, dans l'équation de température on ignorera le terme de chauffage visqueux $2\eta \epsilon : \epsilon$. Ce terme est de toute manière très faible dans la plupart des écoulements.

Toutes ces simplifications faites et laissant tomber les accents ' et indices 0 pour simplifier la notation, on aboutit aux équations du modèle Boussinesq

★ Modèle de Boussinesq.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.10a)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla q + \beta T g \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.10b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (3.10c)$$

Ici $q = (p/\rho) - gz$ est une variable de pression réduite, qui absorbe la contribution hydrostatique. β est le coefficient de dilatation thermique, ν est la viscosité cinématique et κ la diffusivité thermique de l'état de référence. La densité de référence ρ n'influence pas directement l'écoulement. ■

3.3.2 Etat de base conductif

Dans la configuration la plus simple de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, on suppose une couche de fluide au repos, confinée entre deux plaques parallèles et ici d'étendu infinie, comme le suggère le schéma de la figure 3.3. La plaque du bas est placée en $z = 0$ et on la suppose à température $T = \Delta T$ plus élevée par rapport à la référence, celle du haut en $z = H$ sera à $T = 0$. Si on suppose le fluide au repos, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, il peut se réaliser un état thermique conductif dans le fluide où la température de base $T(z)$ varie selon z uniquement. Pour trouver cet état de base, on trouve la solution de

$$\begin{cases} \kappa \partial_{zz}^2 T = 0 \\ T|_{z=0} = \Delta T \\ T|_{z=H} = 0 \end{cases} \Rightarrow T = \Delta T \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (3.11)$$

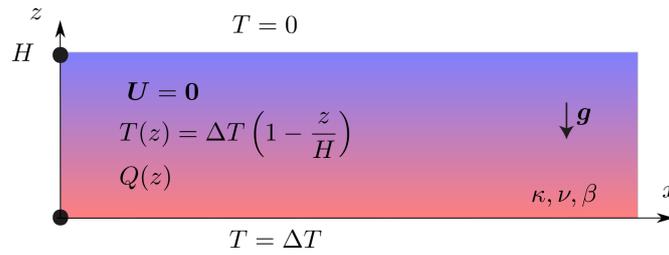


FIGURE 3.3 – Schéma du dispositif de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ce profil de température cause des forces de flottaison et ces forces s'équilibrent avec un gradient de pression opposé. Il suffit de calculer la pression dans l'état de base comme la solution de $\partial_z Q = \beta \Delta T g (1 - (z/H)) = 0$. Le champ $Q(z)$ ne nous est pas utile dans la suite, on ne le précise donc pas.

3.3.3 Linéarisation

On perturbe l'état de base par

$$\mathbf{u}_{tot} = \mathbf{0} + \mathbf{u}, \quad q_{tot} = Q + q, \quad T_{tot} = T + \theta \quad (3.12)$$

Après avoir injecté cette proposition dans les équations du modèle Boussinesq, on obtient après linéarisation

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.13a)$$

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla q + \beta \theta g \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.13b)$$

$$\partial_t \theta = u_z \frac{\Delta T}{H} + \kappa \nabla^2 \theta \quad (3.13c)$$

On veut résoudre ce problème en deux dimensions, c.a.d. on suppose que les perturbations sont invariantes selon l'axe y et que l'écoulement n'a pas de composante selon y : $u_y = 0$. Sur les plaques du haut et du bas, on doit satisfaire des conditions aux limites. Ici, selon le modèle qu'on adopte, on a plusieurs choix de conditions aux limites

1. Modèle visqueux et diffusif : conditions d'adhérence

$$\text{CL}_1 : \quad \mathbf{u}|_{z=0,H} = \mathbf{0}, \quad \theta|_{z=0,H} = 0 \quad (3.14)$$

Le choix le plus réaliste, mais avec un traitement mathématique moins facile.

2. Modèle visqueux et diffusif : conditions de glissement sans contrainte

$$\text{CL}_2 : \quad u_z|_{z=0,H} = 0, \quad \partial_z u_x|_{z=0,H} = 0, \quad \theta|_{z=0,H} = 0 \quad (3.15)$$

Le choix de Rayleigh (1916). Les plaques sont imperméables mais on suppose que le fluide n'exerce pas de contrainte dessus. L'avantage de jeu de conditions aux limites pas très réaliste est que l'analyse mathématique est bien plus facile.

3. Modèle non-visqueux et non-diffusif.

$$\text{CL}_3 : \quad u_z|_{z=0,H} = 0 \quad (3.16)$$

Si on ignore la viscosité et la diffusion thermique, on ne peut qu'imposer l'imperméabilité des plaques.

Il existe d'autres situations où on suppose par exemple que des flux thermiques s'annulent sur les surfaces $z = 0, H$, ou avec une surface libre plane en haut. Nous nous limitons à ces trois cas.

3.3.4 Les nombres de Prandtl & de Rayleigh

Les équations des perturbations dépendent de 5 paramètres ($H, \Delta T, \beta g, \nu, \kappa$) qui nécessitent 3 dimensions physiques indépendantes (longueur, temps et température). Ce problème dépend de deux paramètres sans dimension. Un premier nombre sans dimension est facilement trouvé, il s'agit du nombre de Prandtl qui fait un rapport entre deux diffusivités :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3.17)$$

Le nombre de Prandtl est une propriété du matériau. Quelques valeurs typiques sont dans le tableau suivant :

	mercure	air (25°)	eau (20°)	glycérol
Pr	0.015	0.7	7	1000

TABLE 3.2 – Nombre de Prandtl de plusieurs liquides.

Les métaux liquides sont de très bons conducteurs thermiques et ont donc des nombres de Prandtl bas. De nombreux gaz ont des nombre de Prandtl proches de 1. Le nombre de Prandtl est plus grand que 1 dans la majorité des liquides non-métalliques et devient même très grand dans les liquides plutôt visqueux comme le glycérol. Un deuxième nombre sans dimension indépendant qui est bien moins intuitif est celui de Rayleigh

$$Ra = \frac{\beta \Delta T g H^3}{\nu \kappa} \quad (3.18)$$

Ce nombre caractérise l'intensité de la force de flottaison devant les forces visqueuses et l'effet diffusif thermique. On peut identifier ce nombre en appliquant strictement la procédure de l'analyse dimensionnelle, mais cette même analyse aurait pu mener à d'autres nombres sans dimension (genre $RaPr, Ra/Pr, \sqrt{RaPr}, \dots$). Le nombre de Rayleigh est préféré en convection parce que ce nombre contient à la fois des effets de diffusivité thermique et cinématique. Le nombre de Rayleigh est également le nombre qui contrôle la position du seuil de l'instabilité. Pour le constater il suffit d'exprimer des balances les termes dans les équations du problème linéarisé (3.13). Proche du seuil de l'instabilité on estime $\partial_t \approx 0$ et excluons aussi les forces de pression de ces balances. Si on veut que les forces de flottaison déstabilisantes l'emportent devant les forces visqueuses stabilisantes, il faudra

$$[\beta g \theta e_z] > [\nu \nabla^2 \mathbf{u}] \Leftrightarrow \beta g [\theta] > \frac{\nu}{H^2} [u_z] \Leftrightarrow \frac{\beta g H^2}{\nu} > \frac{[u_z]}{[\theta]} \quad (3.19)$$

en ordre de grandeur. Dans l'équation de température, le transport de la température par le fluide devra dominer la diffusion thermique dans le cas instable. On a donc besoin d'avoir

$$[u_z \Delta T / H] > [\kappa \nabla^2 \theta] \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{H} [u_z] > \frac{\kappa}{H^2} [\theta] \Leftrightarrow \frac{[u_z]}{[\theta]} > \frac{\kappa}{H \Delta T} \quad (3.20)$$

On peut combiner ces deux inégalités pour en éliminer le rapport $[u_z]/[\theta]$ et cela donne

$$\frac{\beta g H^2}{\nu} \gg \frac{\kappa}{H \Delta T} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\beta \Delta T g H^3}{\nu \kappa}}_{Ra} \gg 1 \quad (3.21)$$

On retrouve donc le nombre de Rayleigh assez naturellement à partir de ces balances simples et ce nombre de Rayleigh devra être suffisamment grand pour avoir une déstabilisation.

3.3.5 Adimensionnement et formulation $w - \psi$

Avec si peu de paramètres sans dimension, l'adimensionnement du problème devient assez intéressant. On choisit le système d'unités suivant.

$$[r] = H \quad , \quad [t] = \sqrt{\frac{H}{\beta \Delta T g}} \quad , \quad [\mathbf{u}] = \frac{[r]}{[t]} = \sqrt{\beta \Delta T g H} \quad , \quad [\theta] = \Delta T \quad , \quad [q] = [\mathbf{u}]^2 \quad (3.22)$$

Ici $\sqrt{H/\beta\Delta Tg}$ est le temps typique qu'il faut pour parcourir une distance H en chute libre avec une accélération gravitationnelle effective $\beta\Delta Tg$. La vitesse $\sqrt{\beta\Delta TgH}$ est celle qu'on a sur le sol si on laisse tomber un objet de hauteur H dans ce même champ de gravité. L'adimensionnement du système d'équations pour les perturbations donne

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.23a)$$

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla q + \theta \mathbf{e}_z + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.23b)$$

$$\partial_t \theta = u_z + \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 \theta \quad (3.23c)$$

On ne change pas de nom de variables pour éviter des accents/tildes qui rendent la lecture moins agréable. Par contre, il est important de retenir que les taux de croissance et nombres d'ondes seront relatifs aux échelles introduites. Trop souvent on oublie cet aspect dans une formulation adimensionnée et ça peut conduire à de mauvaises interprétations. On rappelle aussi que les conditions aux limites (CL_1, CL_2 ou CL_3) doivent être imposées en $z = 0$ et 1 dans cette formulation sans dimension.

Il est intéressant de remarquer que l'adimensionnement ne produit pas directement les nombres de Rayleigh et Prandtl dans les équations, mais plutôt des combinaisons $RaPr$ et Ra/Pr qui dépendent soit que de ν soit que de κ . Il s'agit des nombres de Grashof, Gr et de Boussinesq Bo :

$$Gr = \frac{Ra}{Pr} = \frac{\beta\Delta TgH^3}{\nu^2}, \quad Bo = RaPr = \frac{\beta\Delta TgH^3}{\kappa^2} \quad (3.24)$$

qu'on aurait pu prendre à la place de Ra et Pr . Proche du seuil de l'instabilité, ce sont bien les nombres Pr et Ra qui sont les plus adaptés comme on le verra.

L'étude de stabilité en 2D est simplifiée en adoptant la formulation vorticité w - fonction de courant ψ . L'utilisation d'une fonction de courant permet de prendre en compte directement l'incompressibilité et la variable de pression q sera éliminée du problème, un autre avantage. Mettons en place ce modèle équivalent. Suite à l'invariance selon y , on propose $\mathbf{u} = \nabla \times \psi \mathbf{e}_y$ avec $\psi(x, z, t)$ la fonction de courant. De manière explicite on a $u_z = \partial_x \psi$ et $u_x = -\partial_z \psi$ comme composantes de vitesse. La vorticité $\nabla \times \mathbf{u} = w \mathbf{e}_y$ est uniquement selon y et de manière explicite égale a

$$w = \partial_z u_x - \partial_x u_z = -\nabla^2 \psi \quad (3.25)$$

On trouve ici, une première équation de la formulation $\omega - \psi$ qui relie ω et ψ . Une deuxième équation s'obtient en appliquant $\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times$ sur l'équation de Navier-Stokes. Cela donne

$$\partial_t w = -\partial_x \theta + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 w \quad (3.26)$$

qui relie ω, ψ et θ . Enfin, dans l'équation pour la température, il suffit de remplacer $u_z = \partial_x \psi$ pour obtenir la troisième équation. Si on traduit également les conditions aux limites, on obtient le problème suivant

★ **Problème de stabilité linéaire de Rayleigh-Bénard.** Trouver les solutions ψ, ω, θ de

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad \partial_t w = -\partial_x \theta + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 w, \quad \partial_t \theta = \partial_x \psi + \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 \theta \quad (3.27a)$$

pour $z \in [0, 1$ et $x \in]-\infty, +\infty[$. En présence de viscosité, on a y ajoute des conditions aux limites d'adhérence (1), ou de glissement (2). Dans le régime non-visqueux et non-diffusif (3), on n'a que des conditions d'imperméabilité

$$CL_1 : \psi|_{z=0,1} = 0, \quad \partial_z \psi|_{z=0,1} = 0, \quad \theta|_{z=0,1} = 0 \quad (3.27b)$$

$$CL_2 : \psi|_{z=0,1} = 0, \quad \omega|_{z=0,1} = 0, \quad \theta|_{z=0,1} = 0 \quad (3.27c)$$

$$CL_3 : \psi|_{z=0,1} = 0 \quad (3.27d)$$

Quelques commentaires s'imposent au sujet des conditions aux limites. Strictement parlant, l'imperméabilité ne demande que $\partial_x \psi|_{z=0,1} = 0$, mais comme cette relation est vraie pour tout x , elle s'intègre selon x et donne $\psi|_{z=0} = C_0$ et $\psi|_{z=1} = C_1$. On a le droit de fixer une des constantes à zéro, par exemple $C_0 = 0$ mais pourquoi met-on $C_1 = 0$ aussi ? Si $C_1 \neq 0$ en haut, on aurait un débit non-nul dans la tranche, car $\int_0^1 u_x dz = -\int_0^1 \partial_z \psi dz = C_0 - C_1$. Bien que cela soit possible, on comprend bien que ce débit ne peut être associé qu'à un écoulement moyen selon x , tel qu'un écoulement de Poiseuille. La convection ne déstabilise jamais ce type de mouvement invariant selon x et on peut donc prendre $C_1 = C_0 = 0$. Dans les conditions de glissement CL_2 , on a $\partial_z u_x|_{z=0,1} = -\partial_{zz}^2 \psi|_{z=0,1} = 0$ à la base. Par définition $\omega|_{z=0,1} = -\partial_{xx} \psi|_{z=0,1} - \partial_{zz} \psi|_{z=0,1}$ mais comme $\psi|_{z=0,1} = 0$ pour tout x , on déduit que $\partial_{xx}^2 \psi|_{z=0,1} = 0$. Les conditions $\partial_z u_x|_{z=0,1} = 0$ et $\omega|_{z=0,1} = 0$ sont donc équivalentes.

3.3.6 Solution non-visqueuse & non-diffusive

L'analyse de stabilité est particulièrement simple si on ignore la viscosité et la diffusion thermique, si $1/Ra = 0$. On a alors

$$w = -\nabla^2 \psi \quad , \quad \partial_t w = -\partial_x \theta \quad , \quad \partial_t \theta = \partial_x \psi \quad (3.28)$$

Il est utile de découpler ces équations. On élimine d'abord la variable θ en appliquant ∂_t sur la deuxième équation, ce qui donne $\partial_{tt}^2 w = -\partial_{xx} \psi$. Ensuite, on remplace $w = -\nabla^2 \psi$, pour obtenir

$$\partial_{tt}^2 \nabla^2 \psi - \partial_{xx}^2 \psi = 0 \quad (3.29)$$

Dans notre configuration infiniment étendue en x , on peut proposer

$$\psi = A \sin(kx + \chi) \sin(n\pi z) e^{st} \quad (3.30)$$

comme solution (on aurait pu prendre une solution $\sim e^{ikx}$ ici). A et χ sont une amplitude et une phase arbitraire qu'on ne pourra pas fixer. La fonction $\sin(n\pi z)$ assure avec $n \in \mathbb{N}$ l'imperméabilité $u_z|_{z=0,1} = \partial_x \psi|_{z=0,1} = 0$. On remarque par ailleurs que $\partial_t \theta \sim \partial_x \psi$ suggère que

$$\theta \sim \cos(kx + \chi) \sin(n\pi z) e^{st} \quad (3.31)$$

ce qui signifie que $\theta|_{z=0,1} = 0$ aussi. Ceci est une heureuse coïncidence car on n'a pas la possibilité d'imposer des conditions aux limites thermiques dans ce modèle idéal. Cette propriété nous servira dans la section suivante. Si on injecte ce ψ dans l'équation (3.29), on obtient immédiatement

$$(-s^2(k^2 + n^2\pi^2) + k^2) A \sin(kx + \chi) \sin(n\pi z) e^{st} = 0 \quad (3.32)$$

Cela confirme la bonne forme de la solution proposée et donne également la relation de dispersion :

$$s^2 = \frac{k^2}{k^2 + n^2\pi^2} \quad (3.33)$$

Dans la limite non-diffusive, il existera toujours des structures instables avec $\text{Re}(s) > 0$. La structure fondamentale avec $n = 1$ et donc un rouleau sur la hauteur sera toujours plus instable. Les structures avec grand k qui sont donc fines selon x seront les plus instables dans ce modèle non-visqueux et non-diffusif.

3.3.7 Solution visqueuse & diffusive : glissement libre

L'analyse de stabilité est à peine plus complexe avec les effets visqueux et diffusifs et si on se limite aux conditions aux limites CL_2 : des parois $z = 0, 1$ tous les deux imperméables et n'exerçant aucune contrainte tangentielle sur le fluide. Commençons par écrire les équations pour les champs ψ, ω, θ sous une forme légèrement différente :

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (3.34a)$$

$$\left(\partial_t - \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 \right) w = -\partial_x \theta \quad (3.34b)$$

$$\left(\partial_t - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 \right) \theta = \partial_x \psi \quad (3.34c)$$

Grâce à cette réécriture on voit bien comment on pourra découpler les équations. Il suffit d'appliquer l'opérateur $(\partial_t - (1/\sqrt{RaPr})\nabla^2)$ à la deuxième équation, pour arriver à éliminer $(\partial_t - (1/\sqrt{RaPr})\nabla^2)\theta$ dans le membre de droite, utilisant la troisième équation. Il suffit ensuite de remplacer $w = -\nabla^2\psi$ pour obtenir une seule, belle équation maîtresse pour ψ :

$$\left[\left(\partial_t - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 \right) \left(\partial_t - \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 \right) \nabla^2 - \partial_{xx}^2 \right] \psi = 0 \quad (3.35)$$

Suite à l'invariance en x , et la stationnarité de l'état de base, on peut proposer $\psi \sim f(z) \sin(kx + \chi) \exp(st)$ mais la structure selon z restera certainement un peu plus difficile car contrôlée par une équation différentielle d'ordre 6. C'est ici qu'on peut comprendre pourquoi les conditions aux limites CL_2 sont plus simples. Si on tente

$$\psi = A \sin(kx + \chi) \sin(n\pi z) e^{st} \quad (3.36)$$

comme solution, exactement comme dans le cas non-diffusif, alors a une proposition de solution qui satisfait toutes les conditions aux limites CL_2 : $\psi|_{z=0,1} = 0$ en effet, mais comme $\omega \sim \sin(kx + \chi) \sin(n\pi z) e^{st}$ aussi on a donc $\omega|_{z=0,1} = 0$ aussi. Puis on a déjà mentionné plus haut que $\theta|_{z=0,1} = 0$. Il s'agit donc d'une bonne suggestion de solution. Si on l'injecte dans l'équation (3.55) on arrive sur

$$\left[- \left(s + \frac{1}{\sqrt{RaPr}} K^2 \right) \left(s + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} K^2 \right) K^2 + k^2 \right] A \sin(kx) \sin(n\pi z) e^{st} = 0 \quad (3.37)$$

On note $K^2 = k^2 + n^2\pi^2$. Ceci nous informe qu'on doit avoir

$$\left(s + \frac{1}{\sqrt{RaPr}} K^2 \right) \left(s + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} K^2 \right) - \frac{k^2}{K^2} = 0 \quad (3.38)$$

clairement une généralisation de notre relation de dispersion précédente. Ce polynôme d'ordre 2 en s a deux solutions

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{1}{\sqrt{RaPr}} + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \right) K^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{RaPr}} + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \right)^2 K^4 + 4 \left(\frac{k^2}{K^2} - \frac{K^4}{Ra} \right)} \right] \quad (3.39)$$

L'instabilité exige que $Re(s) > 0$ et on voit immédiatement que cela ne sera possible que si le discriminant est positif. La racine $s_+ > 0$ si

$$\left(\frac{1}{\sqrt{RaPr}} + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \right) K^2 < \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{RaPr}} + \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \right)^2 K^4 + 4 \left(\frac{k^2}{K^2} - \frac{K^4}{Ra} \right)} \quad (3.40)$$

En prenant le carré de cette relation, on se retrouve avec deux fois le même terme des deux cotés. Après avoir annulé ce terme, il reste

$$0 < 4 \left(\frac{k^2}{K^2} - \frac{K^4}{Ra} \right) \quad (3.41)$$

comme condition d'instabilité, soit

$$Ra > \underbrace{\frac{(k^2 + n^2\pi^2)^3}{k^2}}_{Ra_c(k,n)} \quad (3.42)$$

Pour chaque onde avec $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donné, il existe donc un nombre de Rayleigh critique. Quelque soit k , il semble qu'une structure avec $n = 1$ demi longueur d'onde selon z a le Rayleigh critique le plus bas. Dans la figure (3.4), on montre la fonction $Ra_c(k, 1)$ en fonction de k . On constate qu'il y a un minimum

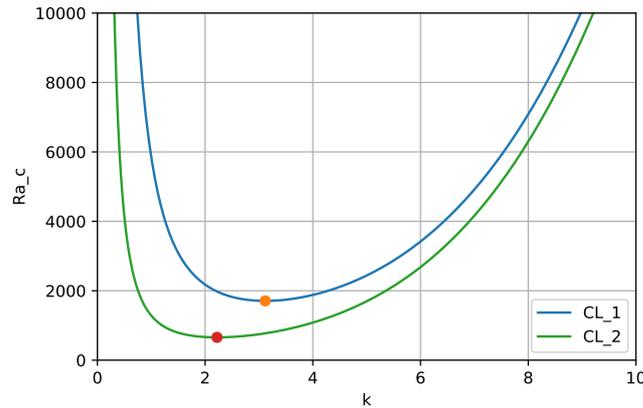


FIGURE 3.4 – Courbe de stabilité marginale de l’instabilité de Rayleigh-Bénard pour les conditions d’adhérence CL_1 et de glissement CL_2 . On affiche Ra_c en fonction de k le nombre d’onde selon x . Le minimum se trouve en $Ra_c = 1708$ et $k = 3.117$ pour les conditions limites CL_1 et en $Ra_c = 658$ et $k = \pi/\sqrt{2}$ avec CL_2 .

pour $n = 1$ et une valeur particulière de k . On appelle ce minimum, le nombre de Rayleigh critique :

$$Ra_c = \min_k \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \quad (3.43)$$

Si on appelle $k^2 = \alpha$ un instant, alors on doit trouver le minimum de $f(\alpha) = (\alpha + \pi^2)^3/\alpha$. La dérivée de cette fonction s’annule au minimum

$$f'(\alpha) = \frac{3(\alpha + \pi^2)^2\alpha - (\alpha + \pi^2)^3}{\alpha^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha - \alpha - \pi^2 = 0 \quad (3.44)$$

soit $\alpha = k^2 = \pi^2/2$ au minimum. Ainsi on trouve

$$Ra_c = \frac{(3\pi^2/2)^3}{(\pi^2/2)} = \frac{27}{4}\pi^4 = 657.511 \quad (3.45)$$

comme nombre de Rayleigh critique. C’est ce résultat qui avait été trouvé par Rayleigh en 1916 [19]. La figure 3.5 montre la fonction de courant et la température au seuil de l’instabilité pour $k_* = \pi/\sqrt{2} = 2.22$. On voit bien la structure cellulaire avec un rapport hauteur sur largeur des cellules de $1/\sqrt{2} = 0.7$. Pour la température, on a la même structure, simplement déphasée d’un quart de longueur d’onde en x .

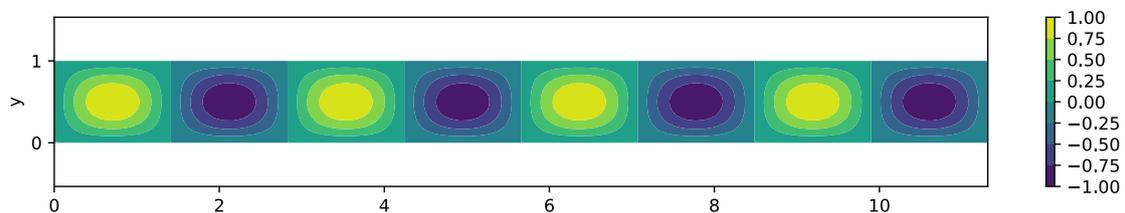


FIGURE 3.5 – Fonction de courant ψ au seuil de l’instabilité $Ra_c = 658$ et $k_* = \pi/\sqrt{2} = 2.22$ dans le cas des conditions aux limites de glissement CL_2 .

3.3.8 Solution visqueuse & diffusive : adhérence

Le cas plus réaliste avec des conditions aux limites d’adhérence est plus difficile et fait l’objet d’un exercice donné plus bas. La condition d’adhérence affecte la structure verticale des rouleaux qui cesse d’avoir

une forme simple avec que des sinus ou cosinus. En 1926, Jeffreys [14] arrive à évaluer le seuil de l'instabilité

$$Ra_c(k_*) = 1708 \quad (3.46)$$

grâce à un calcul numérique ! Au seuil de l'instabilité, le nombre d'onde vaut $k_* = 3.117$. Comparé au cas des conditions de glissement, la convection se met plus difficilement en place et les rouleaux sont légèrement moins larges (k_* est plus grand).

3.4 Au dela

3.4.1 Géométrie finie

Il est tout à fait possible de contraindre le domaine fluide à une géométrie finie. Dans le cas le plus simple d'une boîte rectangulaire $x \in [0, L]$ le confinement cause une sélection de la longueur d'onde selon x . Dans d'autres domaines, il peut y avoir des phénomènes de bords assez complexes, car les rouleaux ne sont pas forcément la structure la plus adéquate. On peut par exemple observer des petites cellules de convection comme en figure 3.6 -(a) qui montre des rouleaux de convection dans une couche de fluide cylindrique.

3.4.2 Evolution non-linéaire

L'évolution non-linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Bénard est l'une des plus étudiées. Après la première instabilité qui cause l'apparition des rouleaux de convection au delà du seuil, il y a toute une série de instabilités secondaires, tertiaires... que l'on peut décrire théoriquement (le papier de [6] est une référence à ce sujet). L'état du système passe par toute une série de bifurcations successives en augmentant le nombre de Ra ce qui donne des motifs qui deviennent de plus en plus complexes. Quelques jolis exemples de structures observées dans des cellules cylindriques, sont montrés en figure 3.6

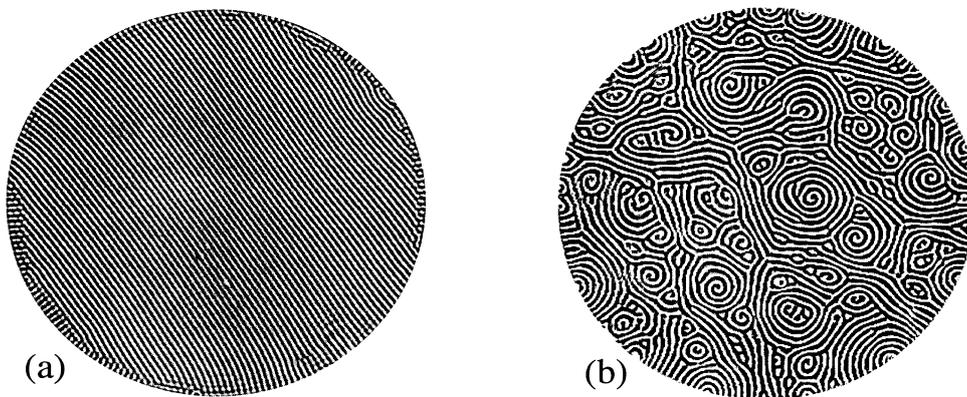


FIGURE 3.6 – Observations expérimentales de [17] en géométrie cylindrique. (a) Proche du seuil de l'instabilité, on peut observer des rouleaux de convection simples. (b) Plus loin du seuil, il peut se former des motifs très jolis mais complexes ("spiral defect chaos").

Bifurcations après bifurcations mènent l'écoulement progressivement à la turbulence. Dans cet état, l'écoulement dans le bulk est très désorganisé et on voit partir de manière non-prévisibles des plumes ou panaches depuis les bords du haut et du bas. La vidéo suivante est issue de simulations numériques très exigeantes à $Ra = 10^{13}$. C'est une belle illustration graphique de la complexité du régime turbulent, même si la vraie turbulence 3D sera très différente. En figure 3.7, on montre deux clichés issus des simulations 3D d'écoulements de convection au dessus de parois avec une rugosité de surface [4]. Il s'agit de travaux de recherche portés par A. Sergent et B. Podvin du laboratoire LISN d'Orsay. La présence des plots impacte les panaches turbulentes et cela est particulièrement bien visible à faible nombre de Rayleigh en figure 3.7-(a). A grand nombre de Rayleigh, on observe de très nombreuses structures fines et turbulentes.

Dans les situations turbulentes, les échanges de chaleur sur la paroi sont entièrement contrôlés par ce qui se passe dans les fines couches limites proches des parois. Leur étude permet de comprendre des lois de transferts (appelées lois de corrélation) qui corrént le flux de chaleur à une paroi au nombre de Rayleigh.

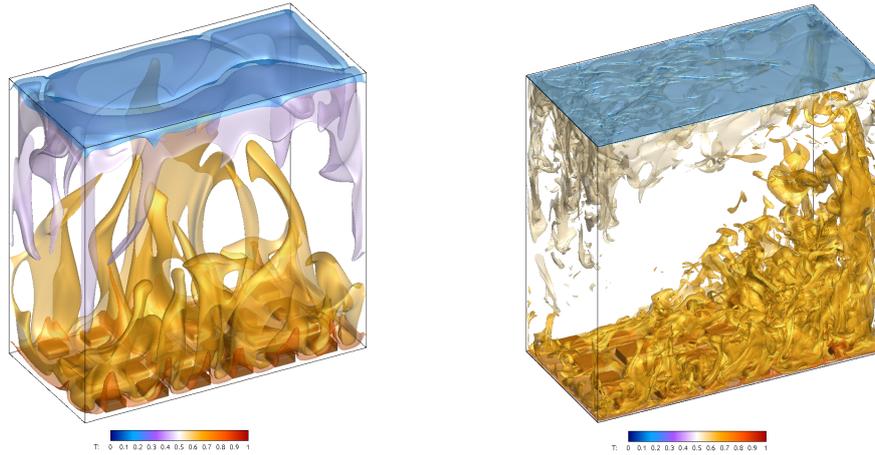


FIGURE 3.7 – Iso-surfaces de températures ($T = 0.2, 0.45, 0.65, 0.8$) issues de simulations numériques de convection de Rayleigh-Bénard en présence de rugosités [4]. Ici $Pr = 4.38$ (eau à $40^\circ C$) et (a) $Ra = 5 \times 10^7$ et (b) $Ra = 10^{10}$.

Aujourd'hui, on cherche à retrouver l'état ultime de la convection de Rayleigh dans lequel la turbulence est présente dans le bulk du fluide mais aussi dans les couches limites et les scientifiques débattent fortement sur ce sujet, cf. ce papier récent [27] et ses critiques.

3.4.3 Convection solutale

Dans la nature et de nombreuses situations industrielles, on rencontre des fluides ou plusieurs composants (A, B, C) se mélangent et où cette composition peut varier localement. Le composé (ou alliage avec des métaux) a alors une masse volumique qui est le résultat de plusieurs contributions, par exemple

$$\rho = \rho_A + \rho_B \quad (3.47)$$

pour un mélange binaire. On appelle ρ_A la concentration massique de l'espèce A dans le mélange. Si \mathbf{u} est la vitesse barycentrique du mélange et la température reste constante, alors on a les lois d'évolution

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.48a)$$

$$\rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p - \rho g e_z + \nabla \cdot (2\eta \epsilon) - \frac{2}{3} \nabla (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (3.48b)$$

$$\partial_t \rho_A + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left(D \rho \nabla \left(\frac{\rho_A}{\rho} \right) \right) \quad (3.48c)$$

A la place de l'équation de température se trouve une équation de diffusion-advection pour ρ_A . Le coefficient D est le coefficient de diffusion binaire du mélange. On aurait pu donner l'équation pour ρ_B qui est identique à celle pour ρ_A , mais de toute manière, le champ $\rho_B = \rho - \rho_A$ n'est pas indépendant. La forme un peu spéciale du terme diffusif permet de maintenir la conservation de la masse, mais souvent on le simplifie à $D \nabla^2 \rho_A$. Comme dans un gaz, les champs ρ , ρ_A et p ne sont pas indépendants mais reliés par une loi d'état :

$$F(\rho, p, \rho_A) = 0 \quad (3.49)$$

et on comprend ici qu'on peut faire les mêmes approximations que dans le problème thermique afin d'obtenir un modèle Boussinesq pour la convection dite **solutale**. On définit un état de référence $(\rho_0, p_0, \rho_{A,0})$ qu'on perturbe. On ignore l'impact de l'écart de pression sur la densité et on récrit

$$\rho = \rho_0 + \chi \rho'_A \quad (3.50)$$

une loi avec χ un coefficient sans dimension qui caractérise comment la densité varie linéairement avec l'écart ρ'_A , etc. Bref, il est possible de trouver un modèle de Boussinesq complètement équivalent pour décrire les mouvements dans un mélange binaire. Il suffit dans (3.10) de remplacer

$$T \rightarrow \rho_A \quad , \quad \kappa \rightarrow D \quad , \quad -\rho_0 \beta \rightarrow \chi \quad (3.51)$$

pour avoir le modèle qui décrit les mouvements dans un mélange binaire. Tout ceci implique aussi qu'on peut avoir la convection de Rayleigh-Bénard dans un mélange de deux liquides de composition variable. On parle alors de la convection solutale. Le coefficient de diffusion D est souvent bien plus petit que κ la diffusivité thermique. Dans le contexte de convection solutale, on utilise encore un nombre de Rayleigh qui change de définition mais pas de nom. Le nombre de Prandtl est remplacé par le nombre de Schmidt

$$Ra^{solutal} = \frac{\beta \Delta T g H^3}{\nu D}, \quad Sc = \frac{\nu}{D} \quad (3.52)$$

Ci dessus, on montre un extrait issue de recherches menées au LISN, dans notre équipe. Dans une batterie à métaux liquide qui est chargée, il se forme une fine couche plus lourde en haut de l'alliage car la composition de l'alliage change (on retire des éléments chimiques légers). Le résultat est une convection solutale assez vigoureuse, qu'on arrive à simuler et à modéliser. Ces simulations ont été réalisées avec SFEMaNS un code numérique développé au LISN depuis une dizaine d'années et c'est S. Bénard, ancienne étudiante du M2 DFE qui les avait réalisées pendant son stage.

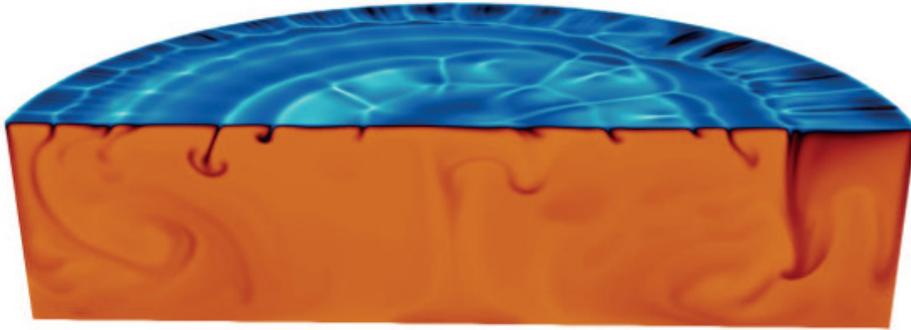


FIGURE 3.8 – Convection solutale dans l'alliage d'une batterie à métaux liquides en charge. Lors de la charge, il se forme une fine couche d'alliage lourd en haut. Assez rapidement, cette couche devient instable et forme des cellules de convection. Simulations de S. Bénard, doctorante du LISN.

3.4.4 Convection thermo-solutale

Parfois il est possible qu'un liquide change de densité avec la température et la composition qui sont variables. Cette situation existe dans la couche supérieure des eaux de mer. Suite à l'évaporation, l'eau devient plus salée et donc plus lourde proche de la surface. Par contre, la température de l'eau y est plus élevée en surface est cela rend le liquide plus léger. Les deux effets, thermiques et solutales, sont donc en compétition et il faut les considérer ensemble. On parle de la convection thermo-solutale.

La convection thermo-solutale est la convection dans le noyau terrestre. Le noyau interne de la terre en fer se solidifie progressivement et comme cette solidification retire l'élément lourd du noyau liquide, cela relâche donc du fluide léger proche de l'interface noyau interne-externe. En même temps, il fait plus chaud à l'intérieur à qu'à l'extérieur de ce noyau liquide. Comme la gravité est orientée vers l'intérieur, on se trouve dans une situation instable thermique et solutale et les deux se renforcent. Dans la terre, on estime que l'effet solutal est le plus important. L'écoulement de convection qui se réalise est par contre fortement influencé par la rotation de la terre. Dans les simulations, on voit de très nombreuses colonnes ou nappes qui s'alignent plus au moins avec l'axe de rotation. Ce sont ces mouvements qui engendrent le champ magnétique de notre planète, par l'effet dynamo.

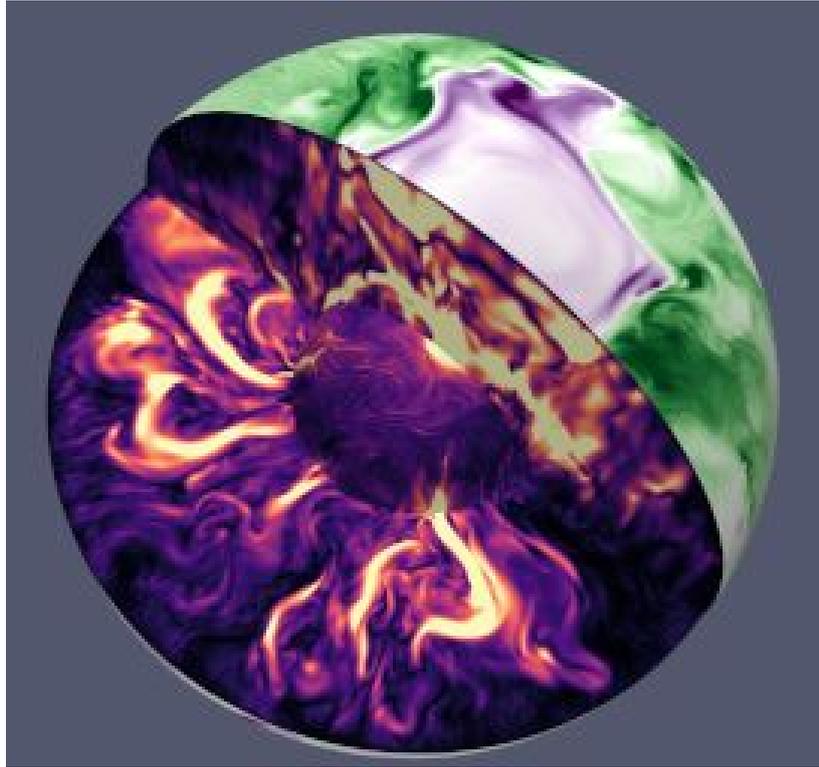


FIGURE 3.9 – Simulation de convection thermo-solutale dans le noyau liquide de la terre. Simulations de N.Schaeffer, chercheur de l’Isterre, Grenoble.

3.5 Exercices

3.5.1 Conditions d’adhérence

Dans cet exercice, on trouve la solution du problème de Rayleigh-Bénard avec des conditions limites d’adhérence (noté CL_1 auparavant). Cette situation plus réaliste est bien plus difficile. Notre objectif est de trouver la courbe de stabilité marginale $Ra_c(k)$ de la figure 3.4 et on laissera l’ordinateur réaliser une bonne partie du travail. Le problème linéaire à résoudre est

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (3.53a)$$

$$\left(\partial_t - \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 \right) w = -\partial_x \theta \quad (3.53b)$$

$$\left(\partial_t - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 \right) \theta = \partial_x \psi \quad (3.53c)$$

avec conditions aux limites d’adhérence

$$CL_1 : \psi|_{z=0,1} = 0 \quad , \quad \partial_z \psi|_{z=0,1} = 0 \quad , \quad \theta|_{z=0,1} = 0 \quad (3.53d)$$

On rappelle qu’on avait déjà réussi à découpler une équation maitresse pour ψ :

$$\left[\left(\partial_t - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 \right) \left(\partial_t - \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 \right) \nabla^2 - \partial_{xx}^2 \right] \psi = 0 \quad (3.54)$$

On peut toujours proposer $\psi = A \sin(kx + \chi) f(z) e^{st}$ comme solution, mais cette fois-ci $f(z) \neq \sin(n\pi z)$, car on ne satisfait pas les conditions aux limites d’adhérence avec ce profil sinusoïdal. Un profil plus complexe s’établit avec notamment des couches limites thermiques et visqueuses. Pour trouver ce profil il

faut résoudre l'équation différentielle d'ordre 6

$$\left[\left(s - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} (\partial_{zz}^2 - k^2) \right) \left(s - \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{Ra}} (\partial_{zz}^2 - k^2) \right) (\partial_{zz}^2 - k^2) + k^2 \right] f(z) = 0 \quad (3.55)$$

Ceci est plus difficile et nécessite un ordinateur ou une méthode perturbative. Au seuil de l'instabilité, pour $s = 0$ et $Ra = Ra_c$, l'analyse est réalisable.

1. Trouver l'équation différentielle que $f(z)$ doit satisfaire au seuil, pour $s = 0$ et $Ra = Ra_c$.
2. Que peut-on déjà dire du Ra_c et de sa dépendance en nombre de Prandtl Pr .
3. L'équation différentielle pour le profil $f(z)$ peut être réécrite comme

$$(\nabla_k^2 - \lambda_1) (\nabla_k^2 - \lambda_2) (\nabla_k^2 - \lambda_3) f(z) = 0 \quad (3.56)$$

où on note $\nabla_k^2 = \partial_{zz}^2 - k^2$. Les nombres λ_i sont alors les racines d'un polynôme caractéristique $P(\lambda)$ qu'on déterminera

4. Trouver les trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (deux sont complexes).
5. On introduit la notation

$$K_n^2 = k^2 + \lambda_n \quad (3.57)$$

qu'on utilisera dans toute la suite. Proposer une solution $f(z)$ qui exprime structure la verticale de la fonction de courant. Cette solution dépendra de 6 constantes arbitraires.

6. La solution $f(z)$ trouvée à l'étape précédente permet en principe d'aller chercher la solution. Toutefois, on peut simplifier le problème en prenant en compte la symétrie des conditions aux limites sur les plaques du haut et du bas. Suite à cette symétrie, il peut exister deux classes de solutions. 1) des solutions qui ont $f_S(z)$ symétriques par rapport au plan $z = 1/2$ et des solutions $f_A(z)$ antisymétriques par rapport à ce plan.

$$f_S(z) = \sum_{n=1}^3 C_n g_S(K_n(z - 1/2)) \quad , \quad f_A(z) = \sum_{n=1}^3 D_n g_A(K_n(z - 1/2)) \quad (3.58)$$

Dans cette solution, les constantes C_n et D_n sont arbitraires, mais pas les fonctions g_S, g_A . Comment donc les choisir ?

7. Rappeler les deux propositions de solutions ψ_S et ψ_A qu'on vient de trouver.
8. On peut maintenant trouver les autres champs utilisant les équations fondamentales (3.34a), bien sur au seuil $\partial_t = 0$ et $Ra = Ra_c$ car on s'était mis dans ces conditions. On rappelle que $\lambda_n = K_n^2 - k^2$ par définition. Calculer les champs de vorticité w_S et w_A à l'aide de l'équation qui relie fonction de courant et vorticité.
9. Pour trouver les perturbation de la température θ_S et θ_A , utiliser $\sqrt{Pr/Ra_c} \nabla^2 w = -\partial_x \theta$
10. Finalement, pour exprimer les conditions aux limites, il nous faut aussi la dérivée verticale de la fonction de courant. Donner donc $\partial_z \psi_S$ et $\partial_z \psi_A$.
11. On peut maintenant imposer les conditions aux limites. Suite à la symétrie ou anti-symétrie des champs par rapport au plan $z = 1/2$, il suffit de poser les condition aux limites, uniquement en une paroi, par exemple $z = 0$ et pour les classes S et A séparément. Cela donne deux systèmes linéaires algébriques homogènes, pour les coefficients C_n et D_n :

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

12. Des solutions non-triviales, $C_n \neq 0$ et $D_n \neq 0$ n'existent que lorsque les déterminants des matrices des coefficients de ci-dessus s'annulent, c.a.d. lorsque

$$F_S(k, Ra_c) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad F_A(k, Ra_c) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

Ces deux relations définissent de manière implicite les branches Ra_c en fonction de k .

13. Pour trouver la courbe de stabilité marginale $Ra_c(k)$ il faut de manière numérique trouver les racines des fonctions $F_S(k, Ra_c)$ et $F_A(k, Ra_c)$, comme on le montre dans le notebook Jupyter `Rayleigh_benard_seuil.ipynb`. Ceci nous a permis de retrouver la courbe de l'instabilité marginale de la figure 3.4.

3.5.2 Couche de liquide en contact avec un gaz

Dans certaines expériences de convection, on maintient le liquide en bas à température fixe T_0 et on le met en contact avec un gaz plus froid à température T_{gaz} au dessus. Ceci était notamment le cas dans certaines expériences de Bénard. Les conditions aux limites sur la surface du bas $z = 0$ restent celles d'adhérence et température imposée, donc

$$\mathbf{u}_{tot}|_{z=0} = \mathbf{0} \quad , \quad T_{tot}|_{z=0} = T_0 \quad (3.61)$$

pour la vitesse et température totale. Sur la surface $z = H$ en contact avec le gaz, on impose des conditions de surface libre indéformable

$$u_{tot,z}|_{z=H} \quad , \quad \partial_z u_{tot,x}|_{z=H} = 0 \quad (3.62)$$

Pour la température, on utilise une loi de refroidissement de Newton qui corrèle le flux thermique sortant à la différence de température entre le liquide à la surface et le gaz.

$$-\lambda \partial_z T^{tot}|_{z=H} = h(T^{tot}|_{z=H} - T_{gaz}) \quad (3.63)$$

Ici λ est la conductivité thermique et h un coefficient d'échange.

1. Spécifier l'état de base $T(z)$ qui peut se réaliser. Faire un graphe qui montre T en fonction de z . Que vaut ΔT , la différence de température entre les plaques du bas et du haut.
2. Donner les équations pour les perturbations linéaires, ainsi que les conditions aux limites.
3. Adapter la méthode de l'exercice précédent pour trouver une relation $F(k, Ra_c) = 0$ qui permet de localiser la courbe de l'instabilité marginale.

4. Instabilité de Rayleigh-Plateau

4.1 Introduction

Dés lors que deux liquides immiscibles sont en contact, il se forme une interface entre les deux. Cette interface a un cout énergétique, car les molécules des liquides 1 et 2 préfèrent ne pas se mettre à coté les unes des autres. Un système physique cherchera naturellement à minimiser cette énergie potentielle. Cela peut engendrer ou forcer des mouvements (comme l'air qui sort d'un ballon baudruche), mais ça peut être une source d'instabilité aussi. Une interface en équilibre peut devenir instable et changer de forme, si une nouvelle forme énergiquement favorable est atteignable.

Chaque matin (ou presque), on peut observer l'instabilité de Rayleigh-Plateau, instabilité capillaire la plus connue sous la douche. Comme le montre la figure 4.1-(a) ci-dessous, les fins filaments d'eau qui quittent la tête de douche se déstabilisent rapidement pour donner des gouttes, simplement parce que cette configuration en gouttes est énergiquement favorable.



(a)



(b)

FIGURE 4.1 – (a) des fins filaments d'eau qui quittent une tête de douche se déstabilisent rapidement en goutelettes (b) un filament de miel ne se déstabilise pas si facilement

La vidéo [suivante](#) montre quelques vidéos expérimentales de ligaments qui se déstabilisent. On y force une certaine fréquence de détachement des gouttes à l'aide de haut-parleurs. L'instabilité de Rayleigh-Plateau ne se produit pas toujours ou pas toujours suffisamment rapidement, comme le montre l'expérience du filament miel de la figure 4.1-(b). Malgré le très fin diamètre et la longueur du ligament de miel, on ne distingue aucune formation de gouttes.

4.2 Critère énergétique : un seul ligament ou N gouttes

Avant de se lancer dans une analyse de stabilité quantitative, on réalise un exercice simple qui compare l'énergie de surface d'un ligament cylindre de rayon R et de longueur L à l'énergie de surface d'un ensemble de N gouttes sphériques de rayon R_s . On exige bien évidemment que volume de liquide est le même dans les deux configurations. Sous quelles conditions un ligament aura-t-il une énergie de surface plus grande, permettant potentiellement sa déstabilisation comme illustrée la figure (4.3)

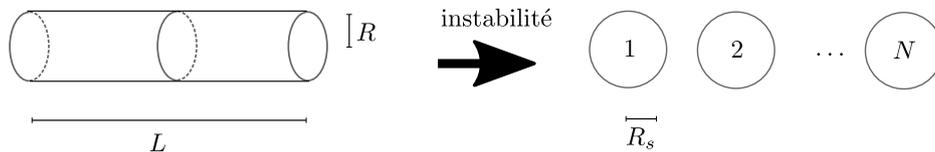


FIGURE 4.2 – Un ligament cylindrique peut se déstabiliser en N gouttes. On compare l'énergie potentielle des deux configurations à volume fixe.

On calcule l'énergie potentielle surfacique de la configuration cylindrique E_γ^c et l'énergie potentielle surfacique de la configuration avec N sphères E_γ^s

$$E_\gamma^c = \gamma 2\pi R L \quad , \quad E_\gamma^s = \gamma N 4\pi R_s^2 \quad (4.1)$$

Si la masse se conserve, on doit avoir

$$\pi R^2 L = N \frac{4\pi R_s^3}{3} \quad \Rightarrow \quad R_s = \left(\frac{3R^2 L}{4N} \right)^{1/3} \quad (4.2)$$

La configuration cylindrique peut être instable si $E_\gamma^c/E_\gamma^s > 1$. Cette inégalité peut être réécrite comme

$$\frac{L}{R} > \frac{9N}{2} \quad , \quad N \text{ sphères ont une énergie de surface plus petite} \quad (4.3)$$

Selon ce raisonnement il devient intéressant de briser le ligament L de R en gouttes dès lors que $L/R > 4.5$. Un ligament suffisamment long est donc toujours moins favorable qu'un ensemble de sphères.

Les deux configurations, filament cylindrique et N gouttes sphériques, ne sont pas connectées par un déplacement infinitésimal de la matière. Il faut un mouvement fini pour que la transformation se fasse et ce mouvement doit se faire à l'encontre de l'inertie. On ressent naturellement qu'il sera moins facile de déstabiliser un fluide lourd qu'un fluide léger et cet ingrédient physique manque pour l'instant dans l'argument énergétique : la vigueur de l'instabilité doit dépendre de la densité du liquide.

4.3 Stabilité linéaire d'un ligament de fluide non-visqueux

Pour aller plus loin, on étudie sous quelles conditions un ligament de fluide cylindre de rayon R présentant une surface libre devient linéairement instable. On se place dans le référentiel qui bouge avec le fluide et on a donc $U = 0$ dans l'état de base. On imagine des déformations comme dans le schéma de la figure 4.3. où

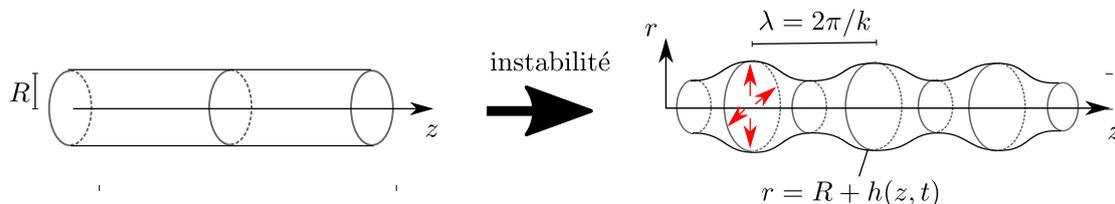


FIGURE 4.3 – Un ligament cylindrique peut se déstabiliser en une forme ondulée $r = R + h(z, t)$. On étudie la stabilité temporelle de perturbations $h(z, t) = B e^{ikz} e^{st}$.

le ligament se déforme de manière axisymétrique et sinusoïdale. Dans l'analyse qui suit, on aligne l'axe z avec le ligament et on utilisera des coordonnées polaires.

4.3.1 Etat de base

On sait déjà que $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. En absence de gravité, la pression doit être constante dans tout le ligament. Grâce à la loi de Young-Laplace, on sait qu'elle vaut

$$P = p_0 + \frac{\gamma}{R} \quad (4.4)$$

à l'intérieur du ligament, si p_0 est la pression atmosphérique de l'air ambiant.

4.3.2 Perturbations linéaires axisymétriques

On admet une perturbation de l'écoulement \mathbf{u} non-visqueux dans le ligament. La pression est modifiée en $P + p(r, z, t)$. La surface du ligament est elle aussi, perturbée. On la place en $r = R + h(z, t)$ avec h la déviation de l'équilibre. La loi d'Euler et l'incompressibilité exigent que

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = -\nabla p \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.5)$$

Cette structure des équation suggère que l'écoulement sera encore une fois potentiel ici. On note $\mathbf{u} = \nabla \phi$ avec ϕ une fonction harmonique. Sur la surface, on doit exprimer deux conditions aux limites. Une condition cinématique, qui devient

$$\partial_t h = u_r|_{r=R} \quad (4.6)$$

après linéarisation. La condition dynamique ou loi de Young-Laplace, donne

$$P^{tot}|_{r=R+h} = p_0 + \gamma \kappa \quad (4.7)$$

avec P^{tot} la pression totale et κ la courbure. Cette courbure a une expression analytique plus complexe ici. La normale unitaire sortant du fluide vaut $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ avec $F = r - R - h(z, t)$. Ainsi

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_r - \partial_z h \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_z h)^2}} \quad (4.8)$$

Par définition $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$. En coordonnées polaires, ça donne

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{n} &= r^{-1} \partial_r \left(\frac{r}{\sqrt{1 + (\partial_z h)^2}} \right) + \partial_z \left(\frac{-\partial_z h}{\sqrt{1 + (\partial_z h)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_z h)^2}} - \frac{\partial_{zz}^2 h}{(1 + (\partial_z h)^2)^{3/2}} \\ &\approx \frac{1}{r} - \partial_{zz}^2 h \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dans la dernière simplification, nous avons ignoré les termes non-linéaires $(\partial_z h)^2$ devant 1. Afin de trouver l'expression dominante de la courbure κ , il faut encore exprimer cette équation sur $r = R + h$, puis utiliser un DL ou série binomiale :

$$\kappa \approx \frac{1}{R+h} - \partial_{zz}^2 h \approx \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{R}} \right) - \partial_{zz}^2 h \approx \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \partial_{zz}^2 h \quad (4.10)$$

On retrouve $1/R$ la courbure de l'état de base, comme terme dominant, puis une perturbations linéaire de la courbure, causée par la perturbation h de la forme du ligament . On injecte cette expression linéarisée dans la loi de Young

$$p_0 + \frac{\gamma}{R} + p|_{r=R} = p_0 + \gamma \left(\frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \partial_{zz}^2 h \right) \quad (4.11)$$

En annulant les termes qui relèvent de l'état de base, on aboutit sur la condition dynamique

$$p|_{r=R} = -\gamma \left(\frac{h}{R^2} + \partial_{zz}^2 h \right) \quad (4.12)$$

pour la perturbation de pression.

En résumé

★ **Problème d'instabilité de Rayleigh-Plateau.** Trouver la solution de

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.13a)$$

$$\partial_t h = u_r|_{r=R}, \quad p|_{r=R} = -\gamma \left(\frac{h}{R^2} + \partial_{zz}^2 h \right) \quad (4.13b)$$

4.3.3 Solution

On cherche des solutions modales

$$[\phi, h, p] = [\hat{\phi}, \hat{h}, \hat{p}] e^{st} \quad (4.14)$$

Le potentiel ϕ est Laplacien $\nabla^2 \phi = 0$ et comme le ligament est invariant le long de z , on peut proposer $\hat{\phi} = f(r) e^{ikz}$ avec $k > 0$. Cela signifie que

$$\partial_{rr}^2 f + r^{-1} \partial_r f - k^2 f = 0 \quad (4.15)$$

Cette équation est une équation de Bessel modifiée (cf. page [wikipédia](#)). La solution, régulière à l'axe est la fonction $I_0(kr)$. Cette fonction est toujours positive, $I_0(0) = 1$ et au loin, elle ressemble une exponentielle croissante. La structure spatiale du potentiel sera donc

$$\hat{\phi} = A I_0(kr) e^{ikz} \quad (4.16)$$

avec A une constante arbitraire pour l'instant. De l'équation d'Euler, on déduit la pression : $\hat{p} = -\rho s \hat{\phi}$. La déformation de la surface sera nécessairement de la forme

$$\hat{h} = B e^{ikz} \quad (4.17)$$

et dépend de B , une deuxième constante arbitraire. Exprimons maintenant nos deux conditions aux limites sur la surface libre. La vitesse radiale vaut $\hat{u}_r = \partial_r \hat{\phi} = A \partial_r (I_0(kr)) e^{ikz} = A k I_0'(kr) e^{ikz}$. On utilise la propriété $I_0' = I_1$ pour la dérivée de la fonction de Bessel modifiée afin d'obtenir de la condition cinématique

$$sB = A k I_1(kR) \quad (4.18a)$$

Cette première relation relie les constantes A et B . On injecte les profils trouvés dans la condition dynamique linéarisé. Après avoir remplacé $\partial_{zz}^2 h = -k^2 h$, cela donne

$$-\rho s A I_0(kR) = -\gamma \left(\frac{1}{R^2} - k^2 \right) B \quad (4.18b)$$

comme deuxième relation entre A et B . L'élimination de A ou B des équations (4.18) donne la relation de dispersion

$$s^2 = \frac{\gamma k}{\rho} \left(\frac{1}{R^2} - k^2 \right) \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)} \quad (4.19)$$

Comme les fonctions I_1 et I_0 sont toujours positives et uniformément croissantes, on comprend qu'on trouve

$$kR < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{instable} \quad (4.20)$$

Autrement-dit, tout ligament non-visqueux est instable vis à vis de déformations sinusoïdales pour des longueurs d'onde $\lambda > 2\pi R$. Une échelle naturelle pour le taux de croissance est

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}} \quad (4.21)$$

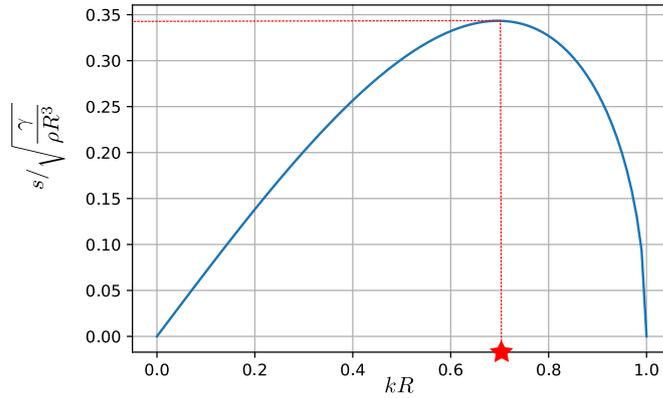


FIGURE 4.4 – Taux de croissance de l’instabilité de Rayleigh-plateau (ligament cylindrique de rayon R)

et on voit bien l’impact de l’inertie ici. Plus ρ est grand, plus le taux de croissance sera faible. Si on adimensionne la relation de dispersion et notant $\sigma = s\sqrt{\rho R^3}/\gamma$, $\kappa = kR$, on a

$$\sigma = \sqrt{\kappa(1 - \kappa^2) \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}} \quad (4.22)$$

comme formule pour le taux de croissance adimensionné. Cette fonction est montrée en figure 4.4 et elle atteint son maximum en $kR = 0.697$ soit une longueur d’onde adimensionnée de $\lambda/R = \frac{2\pi}{0.697} = 9.01$. On n’est pas très loin du critère précédent $L/R > 9N/2$ avec, apparemment $N = 2$.

4.3.4 Inclure la viscosité

La viscosité ralentit la déstabilisation du ligament. Il est possible, moyennant quelques efforts, de généraliser l’analyse de stabilité temporelle menée pour y inclure les effets visqueux. Ceci fait l’objet d’un autre exercice proposé plus bas mais cet exercice sera sans doute ressenti comme assez difficile par la plupart entre vous.

4.3.5 Au dela..

Une analyse de stabilité linéaire ne décrit que le début de l’instabilité. Une fois déstabilisée, le ligament terminera par se fragmenter, mais les processus physiques qui contrôlent le pinch-off, la séparation du ligament en plusieurs gouttes, sont loin d’évidents. Ils ne mènent par exemple pas toujours à des gouttes qui ont la même taille et cela se voit bien dans les expériences, cf. figure 4.5.

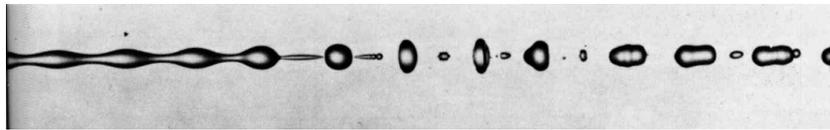


FIGURE 4.5 – Déstabilisation d’un ligament de liquide, issu de [20]

La déstabilisation et l’évolution non-linéaire de jets liquides sont discutés en grand détail dans le papier de revue [12], dont on conseille fortement la lecture aux intéressés.

4.4 Exercices

4.4.1 Effet d’une rotation du ligament

Faire une étude de stabilité temporelle sur un ligament de fluide cylindrique qui tourne autour de l’axe. On fera cette analyse de stabilité dans le référence en mouvement de translation. L’écoulement de base est

donc $\mathbf{U} = \Omega r \mathbf{e}_\theta$. Cette rotation affecte principalement la pression P de base qui existe dans le ligament et c'est à travers cette pression que la forme peut être affectée.

1. Calculer la pression de base $P(r)$ dans le ligament.
2. Ecrire les équations pour les perturbations. Est-ce que l'écoulement reste potentiel ?
3. On identifie d'abord les champs hydrodynamiques admissibles dans le ligament
 - (a) On propose une solution de la forme

$$[\mathbf{u}, p] = [\mathbf{v}(r), q(r)] e^{ikz} e^{st} \quad (4.23)$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

- (b) Ecrire v_θ en fonction de v_r , Ω et s .
 - (c) Injecter ce v_θ dans l'équation pour v_r . Exprimer v_r en fonction de $\partial_r q$, s , Ω .
 - (d) Exprimer v_z en fonction de q , s , k .
 - (e) Injecter ces profils de vitesse dans $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, pour trouver une équation maîtresse pour p .
 - (f) On note $\Delta = k\sqrt{1 + 4(\Omega^2/s^2)}$. Proposer une solution pour $q(r)$ (nécessite une fonction de Bessel modifiée) qui dépend d'une constante arbitraire A .
 - (g) Retrouver les profils v_r , v_z associés à ce q (utiliser $I'_0 = I_1$)
4. La surface du ligament est toujours en $r = R + h(z, t)$ avec $h(z, t) = B e^{ikz} e^{st}$. On doit y exprimer les conditions aux limites linéarisés.
 - (a) Ecrire la nouvelle condition cinématique linéarisée (qui prend en compte la rotation).
 - (b) Exprimer cette condition cinématique pour notre perturbation supposée axisymétrique. Est-ce que la rotation influence ici ? (Cette étape fournit un premier lien entre A et B).
 - (c) Ecrire la nouvelle condition dynamique linéarisée (contrairement au cas non tournant, la pression de base aura un impact ici).
 - (d) Exprimer cette condition dynamique pour trouver une deuxième condition qui lie A et B .
 5. Eliminer A ou B pour trouver la relation de dispersion.
 6. La rotation, est-elle stabilisante ou déstabilisante.
 7. Que se passe-t-il dans la limite de très forte rotation, de tension de surface négligeable ?

4.4.2 Effets visqueux

Faire une étude de stabilité temporelle d'un ligament de fluide cylindrique visqueux. On se place dans le référentiel ou $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Physiquement, la viscosité ne peut pas être responsable d'un caractère ondulatoire. Le taux de croissance $s \in \mathbb{R}$ nécessairement. On s'attend à trouver un effet stabilisant de la viscosité.

1. Ecrire les équations pour les perturbations linéaires visqueuses.
2. Comme dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, on peut proposer une solution $\mathbf{u} = \nabla \phi + \tilde{\mathbf{u}}$ où $\tilde{\mathbf{u}}$ satisfait une équation de diffusion. Dans un premier temps, on cherche des champs admissibles
 - (a) Proposer une solution adéquate pour le potentiel ϕ . Cette solution a la même forme que dans le problème inviscide et dépend d'une constante arbitraire A .
 - (b) Ecrire les composantes r et z de l'équation de diffusion pour $\tilde{\mathbf{u}}$. Montrer que u_r s'exprime à l'aide d'une fonction de Bessel-modifiée I_1 alors que u_z avec I_0 . Proposer des solutions, qui dépendent de deux constantes C_r, C_z et dépendent d'un nombre d'onde $K = \sqrt{k^2 + s/\nu}$.
 - (c) Exprimer l'incompressibilité de $\tilde{\mathbf{u}}$. Utiliser la propriété de récurrence $I'_1(x) + x^{-1} I_1(x) = I_0$ pour montrer que $C_r = C/K$ et $C_z = iC/k$ avec C arbitraire.
 - (d) Ecrire les composantes de la vitesse u_r, u_z et p . Il restera deux constantes arbitraires A et C .
3. Sur la surface libre $r = R + h(z, t)$ on doit imposer des conditions limites. On peut proposer $h(z, t) = B e^{ikz} e^{st}$ comme avant
 - (a) Exprimer la condition cinématique linéarisée. Cette relation relie A, B et C .
 - (b) Exprimer la composante tangentielle de la condition dynamique linéarisée (contrainte tangentielle). Cette relation relie A et C .
 - (c) Exprimer la composante normale de la condition dynamique linéarisée (contrainte normale). Cette relation relie A, B et C .

4. Afin de trouver la relation de dispersion $D(s, k, R, \gamma, \rho, \eta) = 0$ le plus simple est d'éliminer d'abord C au profit de A . Ensuite, on élimine A ou B des équations restantes.
5. Ecrire une fonction python qui calcule D . Le premier argument doit être s .
6. Avec la fonction `f_solve` de Python on peut calculer les racines s de la relation de dispersion. Trouver comment. La fonction `f_solve` nécessite une estimation de la solution $s \in \mathbb{C}$ pour fonctionner. Comme, en absence de viscosité, on connaît s analytiquement on a donc dans la relation de dispersion inviscide, une estimation.
7. On fixe $R = 0.5\text{mm}$. Prenez les valeurs de densité, de viscosité et de tension de surface de l'eau dans l'air. Choisir $k = 0.697/R$ et calculer le taux de croissance maximal et inviscide. Utiliser votre programme pour calculer s visqueux.
8. Faire une suivie de branche dans laquelle k varie dans l'intervalle $k \in [0, R^{-1}]$. Le but est de réaliser le diagramme qui montre le taux de croissance visqueux en fonction de k .
9. Refaire l'exercice pour un ligament de miel et comparer les deux.

5. Instabilité de Bénard-Marangoni

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons vu un exemple d'une instabilité dont le moteur est la capillarité. Pour abaisser E_γ l'énergie de surface, on changeait la forme et la topologie de l'interface entre les deux liquides. Ce changement de forme n'est qu'une possibilité pour abaisser l'énergie de surface si on prend en considération que la tension de surface γ n'est pas partout constante sur l'interface. Cette dépendance spatiale de γ apparaît en pratique à travers la température, la composition du liquide ou la présence de tensio-actifs (savon).

En mécanique des fluides on parle de **l'effet Marangoni** quand des gradients de tension de surface génèrent des écoulements. Une belle démonstration de l'effet est la vidéo [suivante](#). On y voit un bateau qui est propulsé par une goutte de surfactant placée sur son arrière. La séquence avec le poivre montre bien comment une goutte de surfactant crée un écoulement divergent et radiale sur la surface, comme on le schématise dans la figure 5.1. Avant l'époque des lave-vaisselles, on voyait souvent ce type de mouvement dans les pubs pour liquide vaisselle.

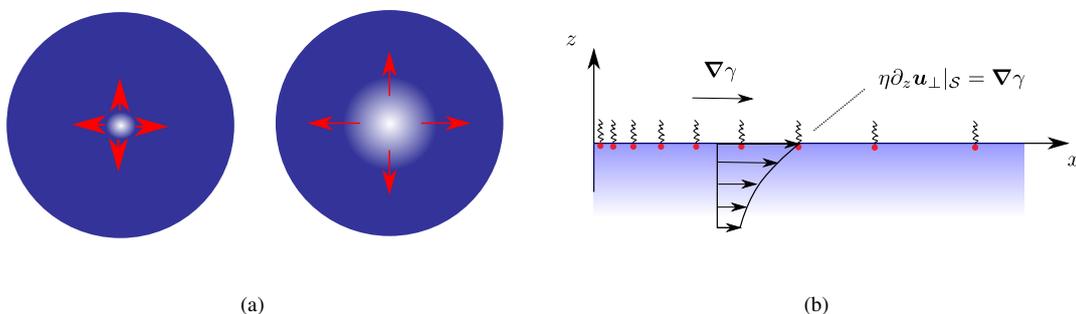


FIGURE 5.1 – (a) Une goutte de surfactant déposée au milieu d'une surface d'eau provoque une baisse soudaine et locale de la tension de surface. La surface au loin est plus tendue et tire radialement sur cette zone, ce qui crée un écoulement radial u à la surface, dans le sens de $\nabla\gamma$. (b) L'effet Marangoni apparaît dans les équations à travers la condition dynamique, qui corrèle la dérivée verticale de l'écoulement tangentielle à la surface au gradient gradient de tension de surface.

L'effet Marangoni entre dans les équations du problème à travers la condition dynamique. Pour une surface libre plane comme celle de la figure 5.1-(b), on montre que

$$\eta \partial_z \mathbf{u}_\perp |_{z=H} = \nabla \gamma \quad (5.1)$$

résulte de la condition dynamique. Ici \mathbf{u}_\perp est la vitesse tangentielle à la surface. Dans la figure 5.1-(b), on schématise comment cette condition impacte l'écoulement juste en dessous de l'interface. A la surface, la dérivée verticale de la vitesse tangentielle est non-nulle et proportionnelle au gradient de tension de surface. Plus il y a de tensio-actifs, moins la tension de surface sera grande, d'où la direction du gradient.

5.2 Instabilité Bénard-Marangoni

5.2.1 Convection dans un liquide refroidi par un gaz

L'effet Marangoni ne peut pas seulement forcer des écoulements, il peut aussi avoir un rôle déstabilisant et engendrer dans des écoulements de convection. On parle de convection thermo-capillaire. Dans l'instabilité de Bénard-Marangoni, l'écoulement de convection se met partiellement en place à cause de la tension de surface qui varie avec la température.

Une condition nécessaire pour pouvoir parler de convection Marangoni est qu'il y ait une interface entre deux liquides, sur laquelle la température peut varier. Ceci était le cas des expériences de Bénard, dans lesquelles un liquide était chauffé par le bas et refroidi par le haut à l'aide d'un gaz (ou vapeur) thermalisé. C'est à peu près la situation de cuisine où une couche d'huile d'olive est chauffée par le bas dans une poêle et on la schématise ici en figure 5.2.

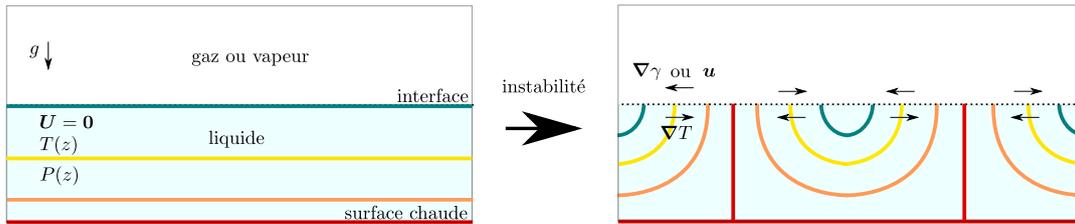


FIGURE 5.2 – Instabilité de Bénard-Marangoni dans une couche de fluide chauffée par en bas et en contact avec sa vapeur ou un gaz. Des cellules de convection sont en partie dues aux gradients de tension de surface qui existent en surface

L'échange de chaleur entre la phase gazeuse à température T_{gaz} et la phase liquide est contrôlé par la loi de refroidissement de Newton :

$$-\lambda \partial_z T = h(T|_{z=H} - T_{gaz}) \quad (5.2)$$

Ici on reconnaît le flux thermique pariétal à gauche et h est un coefficient d'échange. Une telle loi d'échange permet une température de surface non-uniforme ce qui est très différent de la convection de Rayleigh-Bénard où la température de la paroi supérieure est fixe. Le fait que la température peut varier sur l'interface, rend possible une variation de la tension de surface, par exemple à travers la loi linéaire

$$\gamma = \gamma_0(1 - \alpha(T|_{z=H} - T_0)) \quad (5.3)$$

Ici $\alpha > 0$ afin que cette loi traduise que des zones de températures plus chaudes ont une tension de surface plus petite. Cette dépendance de la tension de surface avec la température crée un nouveau mécanisme déstabilisant.

5.2.2 Mécanisme physique

La figure 5.3-(a) illustre le mécanisme physique qui est à l'oeuvre. On imagine une particule de fluide plus chaude qui vient du volume en dessous et qui se place à la surface. La montée locale en température provoque une baisse locale de la tension de surface. Comme avec des surfactants, ceci crée un écoulement divergent à la surface. Suite à l'incompressibilité du fluide, cet écoulement divergent en surface cause une

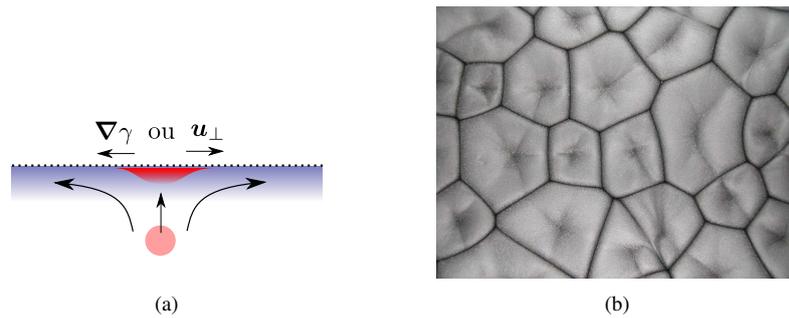


FIGURE 5.3 – (a) Mécanisme d'instabilité de Bénard-Marangoni. Si on déplace une particule chaude du bulk vers la surface, cela crée une baisse locale de la tension de surface qui va forcer un écoulement divergent en surface. Suite à l'incompressibilité du fluide, cet écoulement surfacique agit comme un aspirateur et renforce donc le déplacement initial supposé. (b) Instabilité de Bénard-Marangoni dans un mélange huile/poudre d'aluminium vue de dessus. Les lignes noires sont les zones d'écoulement descendant et les sortes d'étoile au centre des cellules sont les zones d'écoulement montant.

aspiration du fluide vers le haut. Ce mouvement va donc renforcer le déplacement initial supposé et on a donc bien un caractère déstabilisant. Il est intéressant de faire le raisonnement avec une particule de fluide du bulk qui monte à la surface mais est plus froide. Cette situation est stable car la particule sera repoussée dans le fluide à cause de l'effet Marangoni.

5.2.3 Au delà

Dans les expériences originales de Bénard, la gravité et l'effet Marangoni déstabilisant agissent simultanément. Ce n'est qu'après avoir pris en compte les effets Marangoni que les seuils mesurés dans les expériences coïncidaient avec la théorie. Cette analyse de stabilité suit les mêmes lignes que celui pour la convection de Rayleigh Bénard, mais est un peu plus difficile. Dans la figure 5.3-(b), on montre quelques images de cellules de convection Bénard-Marangoni à la surface d'un liquide. Ces structures cellulaires sont typiques pour la convection de Bénard-Marangoni.

La convection de Marangoni ou convection thermo-capillaire est un sujet en soit car même en absence de gravité, l'effet Marangoni permet d'avoir des mouvements de convection. Il suffit qu'il y ait une interface entre deux liquides et que la température dans le bulk du fluide soit plus chaud qu'à la surface. Des conditions où la gravité ne joue presque aucun rôle sont assez faciles à obtenir : il suffit de considérer des petits volumes de liquides tels que des gouttes. Un exemple d'une étude qui s'intéresse à la convection dans des gouttes est l'article [24].

5.3 Exercice

On se limite à quelques questions physiques. On considère la convection de Bénard-Marangoni et on place donc un liquide en contact avec un gaz plus froid. La plaque du bas est ΔT plus chaude que la surface du haut.

1. Proposer une échelle de vitesse U_g maximale que l'on pourrait atteindre par convection Rayleigh-Bénard (la gravité est le seul moteur).
2. Proposer une échelle de vitesse U_γ maximale que l'on pourrait atteindre par convection Bénard (la tension de surface est le seul moteur).
3. Proposer un nombre sans dimension qui contrôle si la convection est dominée par les effets capillaires ou par les effets gravitationnels.
4. Proposer un nombre sans dimension, équivalent au nombre de Rayleigh, mais adapté au contexte de la convection thermo-capillaire.

6. Instabilité centrifuge

6.1 Introduction

Les mouvements de rotation sont omniprésents dans les écoulements. Ils sont générés dans le sillage d'ailes, ils s'amplifient spontanément dans l'atmosphère (tornades, ouragans) et même dans les écoulements les plus turbulents, on trouve des tourbillons qui survivent comme structures cohérentes. La stabilité de ces écoulements en rotation rapide n'est pour autant pas toujours garantie. Dans ce chapitre, on discute l'instabilité centrifuge qui est certainement l'instabilité la plus connue dans les écoulements tournants. Dans les sections suivantes, on focalise sur l'écoulement de Taylor-Couette, écoulement archétype pour l'étude de l'instabilité centrifuge qui a été le sujet de très nombreuses études.

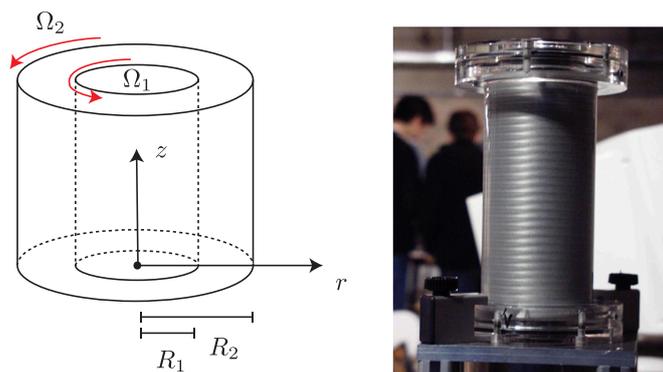


FIGURE 6.1 – L'écoulement de Taylor-Couette est celui qui se développe entre deux cylindres co-axiales de rayon $R_1 < R_2$, qui tournent à vitesse de rotation Ω_1, Ω_2 . Le plus souvent, on ne tourne que le cylindre intérieur $\Omega_2 = 0$. Au delà d'un certain seuil en Ω_1 , on observe des rouleaux de Taylor qui peuvent être rendu visibles par des écailles nacrantées.

L'instabilité centrifuge et plus spécifiquement instabilité de l'écoulement Taylor-Couette a été la première instabilité à être décrite aussi finement et quantitativement utilisant l'outil de l'analyse de stabilité linéaire. Cette analyse a été formulée en 1923 par Taylor [25]. La figure 6.1 montre un schéma de l'écoulement de Taylor-Couette. Le liquide se trouve entre deux cylindres co-axiales de rayon $R_1 < R_2$ différent. Ces cylindres tournent à vitesse de rotation différente, $\Omega_1 \neq \Omega_2$. La structure de l'écoulement est ici rendue

visible par des plaquettes réfléchissantes (opalescentes) qu'on retrouve également dans de nombreux lessives ou liquides vaisselle et même certaines peintures ou plastics (boules de Bowling). Ces plaquettes ont tendance à s'orienter d'une manière préférentielle dans le référentiel local de déformation (directions propres du tenseur des taux de déformation). Illuminées, elles réfléchissent une structure cohérente dans l'écoulement.

Cette ancienne vidéo montre l'écoulement de Couette qui se forme avec un cylindre extérieur qui ne tourne pas. Au delà d'une certaine vitesse de rotation du cylindre intérieur, des rouleaux stationnaires se forment, comme dans la figure 6.1. En augmentant la vitesse de rotation, ces rouleaux deviennent d'abord oscillants, puis elles se déstabilisent encore pour donner lieu à des motifs turbulents. Une deuxième vidéo dans le même genre est celle-ci. La vitesse de rotation du cylindre intérieur augmente progressivement, puis redescend. L'écoulement transite progressivement à la turbulence, puis redevient laminaire.

Contrairement aux chapitres précédents, on rencontre ici pour la première fois une situation où il n'y a plus vraiment une énergie potentielle "extérieure", qui cherche à se minimiser. Ici l'énergie cinétique nécessaire à la mise en place d'un écoulement nouveau, vient tout simplement du réservoir d'énergie cinétique que constitue l'écoulement de base et que l'on maintient parfois de l'extérieur (on doit bien fournir un travail pour tourner les cylindres dans l'expérience de Taylor-Couette). Cette absence d'énergie potentielle "extérieure" explique pourquoi le mécanisme physique de l'instabilité est moins simple.

6.2 Stabilité linéaire

6.2.1 Etat de base : écoulement de Taylor-Couette

Pour trouver l'écoulement de Taylor-Couette, commençons par écrire les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et axisymétrique. En coordonnées cylindriques :

$$\rho(\partial_t u_r + u_r \partial_r u_r + u_z \partial_z u_r) - \frac{\rho u_\theta^2}{r} = -\partial_r p + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r \quad (6.1a)$$

$$\rho(\partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + u_z \partial_z u_\theta) + \frac{\rho u_\theta u_r}{r} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_\theta \quad (6.1b)$$

$$\rho(\partial_t u_z + u_r \partial_r u_z + u_z \partial_z u_z) = -\partial_z p + \eta \nabla^2 u_z \quad (6.1c)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \partial_z u_z = 0 \quad (6.1d)$$

Le terme $\rho u_\theta^2/r$ est la densité de force centrifuge et on voit qu'il agit dans la partie radiale de l'équation. L'écoulement de Taylor-Couette de base est tournant donc $\mathbf{u} = U_\theta(r) \mathbf{e}_\theta$. Il est aussi stationnaire et invariant selon z . Ainsi on doit avoir

$$\left(\partial_{rr}^2 + \frac{\partial_r}{r} - \frac{1}{r^2} \right) U_\theta = \partial_r \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_\theta = \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r (r U_\theta) \right) = 0 \quad (6.2)$$

selon la composante θ des équations. Deux intégrations successives permettent d'obtenir

$$U_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad (6.3)$$

comme possibilité avec A, B des constantes arbitraires. On fixe ces constantes par les conditions aux limites d'adhérence :

$$U_\theta|_{r=R_1} = AR_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 R_1 \quad , \quad U_\theta|_{r=R_2} = AR_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 R_2 \quad (6.4)$$

Au bout de quelques calculs algébriques, cela donne

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad , \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.5)$$

La pression de base qui existe dans le fluide est telle que le gradient radial s'oppose à la force centrifuge

$$-\frac{\rho U_\theta^2}{r} = -\partial_r P \quad \Rightarrow \quad P = C + \rho \left(\frac{A^2 r^2}{2} + 2AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2} \right) \quad (6.6)$$

★ **Couette cylindrique.** Ecoulement entre deux cylindres co-axiaux de rayon R_1 et R_2 , qui tournent à des vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 .

$$U_\theta(r) = \left(\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) r + \left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \frac{1}{r} \quad (6.7)$$

Le gradient de pression s'oppose à la force centrifuge. ■

6.2.2 Mécanisme physique & critère de Rayleigh

Le mécanisme physique de l'instabilité centrifuge n'est pas si évident même si il va de soi que la force centrifuge y est pour quelque chose. Le critère de Rayleigh donne une première condition nécessaire pour avoir une instabilité non-visqueuse.

Le critère de Rayleigh repose en partie sur le théorème de circulation de Kelvin (dans un écoulement parfait et incompressible, la circulation le long de tout contour matériel se conserve). Physiquement, ce théorème exprime que le moment orbital de toute parcelle de fluide parfait et incompressible se préserve lors du mouvement. Dans notre contexte d'un écoulement supposé axisymétrique, ce théorème est assez bien visible dans les équations de mouvement (6.2.2). On introduit

$$L(r) = r u_\theta(r) \quad (6.8)$$

comme variable à la place $u_\theta(r)$. Il s'agit ici d'une densité de moment orbital (selon z). Si on multiplie la composante θ , c.a.d., par r , on peut constater en absence de viscosité que

$$r(\partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + u_z \partial_z u_\theta) + \frac{u_\theta u_r}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\partial_t (r u_\theta)}_L + \mathbf{u} \cdot \nabla \underbrace{(r u_\theta)}_L = 0 \quad (6.9)$$

La quantité L est donc matérielle, c'est à dire préservée par le mouvement. Ceci est en effet une manifestation du théorème de circulation de Kelvin. Si on imagine un contour matériel, initialement circulaire qui contourne l'axe de symétrie, alors on peut comprendre qu'un écoulement axisymétrique peut déplacer ce contour, mais il restera toujours circulaire. Selon Kelvin, la circulation selon ce contour de rayon variable sera constante et égale à $\Gamma = 2\pi r u_\theta(r) = 2\pi L$, sa valeur initiale. Dire que Γ se préserve matériellement est identique à ce qu'exprime la loi de conservation (6.9). Plus terre à terre, cela signifie que u_θ sur le contour matériel varie de manière inversement proportionnelle avec le rayon du contour r , afin de préserver L .

Ecrivons un instant, le système des équations (non-visqueuses) avec les variables u_r, u_z, L :

$$\partial_t u_r + \mathbf{u} \cdot \nabla u_r = -\rho^{-1} \partial_r p + \frac{L^2}{r^3} \quad (6.10a)$$

$$\partial_t L + \mathbf{u} \cdot \nabla L = 0 \quad (6.10b)$$

$$\partial_t u_z + \mathbf{u} \cdot \nabla u_z = -\rho^{-1} \partial_z p \quad (6.10c)$$

Ici on écrit $\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \partial_r + u_z \partial_z$. La force centrifuge a été déplacée sur la droite. Cette écriture, permet de voir notre écoulement tournant sous un autre angle. Il semble que r et z se comportent comme des variables Cartésiennes. Le champ L est matériel et selon sa distribution spatiale, il exercera une force sur cet écoulement. En quelque sorte, on a ici une situation semblable à celle de Rayleigh-Bénard, ou il y avait une force de flottabilité causé par une distribution de température, elle aussi matérielle en absence de diffusion thermique et viscosité. Plus loin, on montre que la similitude est plus grand qu'on l'imagine.

Pour formuler le critère de Rayleigh, on commence par supposer un écoulement de base $U_\theta(r)$ arbitraire (pas uniquement le profil de Taylor-Couette). Cette vitesse angulaire cause une densité de moment angulaire $L(r) = r U_\theta(r)$ qui doit être préservée si un écoulement u_r, u_z se mette en place. A l'équilibre le gradient de pression doit s'opposer à la force centrifuge, c.a.d. la pression est telle que

$$0 = -\rho^{-1} \partial_r P(r) + \frac{L^2(r)}{r^3} \quad (6.11)$$

Comme dans l'explication du mécanisme physique de convection, on s'imagine particule de fluide un instant, ou plutôt anneau fin de fluide car on a supposé l'axisymétrie. Un petit écoulement radial u_r déplacera l'anneau de r à $r + \Delta r$, comme en figure 6.2. La question est de savoir si l'anneau revient vers sa position d'équilibre, ou au contraire, il s'en écarte. On calcule donc la force radiale qui s'exerce sur l'anneau déplacé.

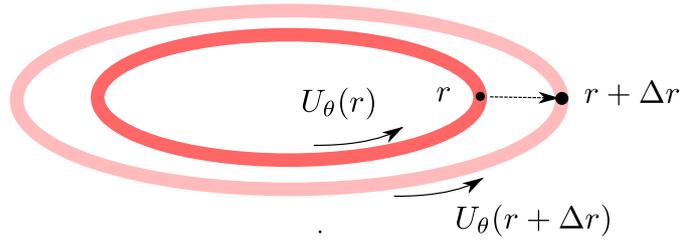


FIGURE 6.2 – Pour retrouver le critère de Rayleigh de l’instabilité centrifuge, on calcule la force qui s’exerce sur un anneau infinitésimal de rayon r et de volume δV , qui tourne à vitesse $U_\theta(r)$ et se déplace matériellement vers $r + \Delta r$.

Suite au théorème de Kelvin ou eq. (6.9), l’anneau déplacé doit conserver son moment orbital $L(r)$ pendant se déplacement. Il arrive donc en $r + \Delta r$ avec un moment qui vaut $L(r)$. Par contre, à cette nouvelle position $r + \Delta r$ est différente ce qui impacte la force centrifuge et le gradient de pression y est différent aussi. On évalue la force radiale nette qui s’exerce sur l’anneau déplacé a

$$\Delta F_r = \left(-\rho^{-1} \partial_r P(r + \Delta r) + \frac{L^2(r)}{(r + \Delta r)^3} \right) \delta V \quad (6.12)$$

On peut ici utiliser l’expression du gradient de pression à l’équilibre (6.11) en $r + \Delta r$, pour simplifier l’équation à

$$\Delta F_r = \left(-\frac{L^2(r + \Delta r)}{(r + \Delta r)^3} + \frac{L^2(r)}{(r + \Delta r)^3} \right) \delta V \quad (6.13)$$

La force ne sera pas une force de rappel, si $\Delta F_r > 0$ car dans ce cas, le petit déplacement radial supposé pourra se renforcer. La condition $\Delta F_r > 0$ ou

$$L^2(r) - L^2(r + \Delta r) > 0 \quad (6.14)$$

correspond donc à une situation instable. Dans la limite d’un déplacement infinitésimal, $\Delta r \rightarrow 0$, on retrouve ici le célèbre critère de Rayleigh pour l’instabilité centrifuge.

★ **Critère de Rayleigh.** Un anneau de fluide de rayon r , tournant à vitesse $U_\theta(r)$ est localement instable si le moment orbital par unité de masse $L(r) = rU_\theta(r)$ est tel que .

$$\partial_r (L^2) < 0 \quad (6.15)$$

Le critère de Rayleigh donne une condition nécessaire, mais pas une condition suffisante pour l’instabilité centrifuge. Un anneau de fluide peut être instable à un endroit mais stable à un autre et il faut prendre en considération toute la distribution de $U_\theta(r)$. L’argument de ci-dessus est également donné dans [8] et historiquement il est dû à [Karman1934]. Il est très utile de voir le parallèle entre ce critère et $d\rho/dz < 0$ de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans le travail original de Rayleigh, ce critère est plutôt trouvé par un raisonnement énergétique (échange de deux anneaux donne lieu à une basse d’énergie potentielle de *rotation*), mais cet argument est un peu moins parlant.

Appliqué à l’écoulement de Couette, le critère de Rayleigh donne

$$\partial_r (Ar^2 + B)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad 4Ar (Ar^2 + B) < 0 \quad (6.16)$$

Si on remplace A et B par leur définition :

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \underbrace{\frac{\Omega_2 R_2^2 (r^2 - R_1^2) + \Omega_1 R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{(R_2^2 - R_1^2)^2}}_{>0} < 0 \quad (6.17)$$

Le préfacteur $(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)$ est le seul à pouvoir être négatif car $r \in [R_1, R_2]$. Ainsi l'écoulement de Taylor-Couette pourra devenir instable selon le critère de Rayleigh si

$$\Omega_2 R_2^2 < \Omega_1 R_1^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Instable ?} \quad (6.18)$$

Cette condition définit la célèbre ligne de Rayleigh, qu'on retrouvera plus bas dans le diagramme de stabilité. Pour l'écoulement de Taylor-Couette, on constate encore que $\partial_r(L^2)$ est toujours de signe défini, partout dans tout le domaine. Les anneaux de fluide élémentaires sont donc soit stables, soit instables et on ne peut pas avoir une situation stable et instable localement en même temps. C'est pour cette raison, que le critère de Rayleigh marche assez bien pour l'écoulement de Taylor-Couette.

6.2.3 Analyse de stabilité linéaire

Pour aller plus loin que le critère de Rayleigh et notamment inclure les effets visqueux, on doit formuler une analyse de stabilité linéaire. Si on se limite aux perturbations axisymétriques de l'état de base, les équations linéarisées sont

$$\partial_t u_r - 2(A + Br^{-2})u_\theta = -\partial_r q + \nu(\nabla^2 - r^{-2})u_r \quad (6.19a)$$

$$\partial_t u_\theta + 2Au_r = \nu(\nabla^2 - r^{-2})u_\theta \quad (6.19b)$$

$$\partial_t u_z = -\partial_z q + \nu\nabla^2 u_z \quad (6.19c)$$

$$r^{-1}\partial_r(ru_r) + \partial_z u_z = 0 \quad (6.19d)$$

Ici on note $q = p/\rho$. Les coefficients A et B sont ceux de l'écoulement de Taylor-Couette ($U_\theta = Ar + Br^{-1}$ avec A et B définis en (6.5)) Sur les bords, on a des conditions d'adhérence

$$CL : \mathbf{u}|_{R_1} = \mathbf{0}, \mathbf{u}|_{R_2} = \mathbf{0} \quad (6.20)$$

Ce problème linéaire reste malgré tout assez complexe à résoudre et c'est un véritable tour de force que Taylor a réussi à trouver la solution en 1923 [25]. Taylor y utilise une expansion de type Fourier-Bessel où la structure radiale des perturbations est décomposées sur une base de fonctions de Bessel, par exemple

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ q \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} a_j J_1(k_j r) \\ b_j J_1(k_j r) \\ c_j J_0(k_j r) \\ d_j J_0(k_j r) \end{bmatrix} e^{ikz} e^{st} \quad (6.21)$$

avec k_j t.q. $J_1(k_j R) = 0$ et similaire pour les autres composantes. En injectant cette proposition de solution, on peut trouver un système linéaire qui relie les coefficients a_j, b_j, c_j, d_j . Le problème initial aux fonctions propres est alors transformée en un problème aux valeurs propres algébriques. En quelque sorte, il s'agit d'une méthode "numérique" sauf que les calculs sont tous menés à la main. Cette analyse n'a rien d'évident et nécessite une grande expertise mathématique. Ceci explique pourquoi l'instabilité centrifuge n'est pas traité en grand détail dans la plupart des cours sur les instabilités hydrodynamiques. Les livres [7, 10] contiennent de nombreux détails par contre. On se limite à l'étude d'une limite bien particulière.

6.2.4 Limite small gap & faible rotation différentielle : analogie avec Rayleigh-Bénard

Si on suppose que les cylindres tournent à peu près à la même vitesse et qu'ils ont à peu près le même rayon, on peut simplifier les équations. Cette limite est d'autant plus intéressante à étudier car elle permet d'identifier une analogie entre le problème de Taylor-Couette et le problème de convection de Rayleigh-Bénard.

Pour simplifier les équations, on ajoute des hypothèses. Dans la limite small-gap, on suppose que les deux cylindres ont quasiment le même rayon. On introduit un rayon moyen et une largeur du gap entre les deux cylindres

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}, \quad d = R_2 - R_1 \quad (6.22)$$

et on exige que

$$\text{Hypo 1 : } \frac{d}{R} \ll 1 \quad (6.23)$$

Le confinement de l'écoulement dans la fine couche entre les deux cylindres permet d'ignorer de nombreux termes liés à la courbure. Par exemple :

$$\begin{aligned}(\nabla^2 - r^{-2})u_r &\approx \partial_{rr}^2 u_r + \partial_{zz}^2 u_r \\(\nabla^2 - r^{-2})u_\theta &\approx \partial_{rr}^2 u_\theta + \partial_{zz}^2 u_\theta \\ \nabla^2 u_z &\approx \partial_{rr}^2 u_z + \partial_{zz}^2 u_z \\ r^{-1}\partial_r(ru_r) &\approx \partial_r u_r\end{aligned}\tag{6.24}$$

Tous les opérateurs différentiels se simplifient dans des expressions "Cartésiennes". Afin de rendre ceci plus claire, on introduit des nouvelles coordonnées Cartésiennes, centrées sur le milieu de la couche liquide :

$$r = R + Z \quad , \quad z = X\tag{6.25}$$

Ce choix de notation bizarre, Z selon la direction radiale, X selon la direction z , sert uniquement à simplifier l'analogie avec le problème de convection de Rayleigh-Bénard. Les parois des cylindres sont donc placées en $Z = \pm d/2$ dans ces coordonnées nouvelles. Pour les composantes de vitesse on renomme $u_r = u_Z$ et $u_z = u_X$. Pour les opérateurs de dérivation on a $\partial_r = \partial_Z$ et $\partial_z = \partial_X$. Dans la limite small-gap, $d \ll R$, l'écoulement de base de Taylor-Couette devient un simple écoulement de Couette,

$$U_\theta \approx U - \Delta U \frac{Z}{d}\tag{6.26a}$$

dans la nouvelle variable Z . Ici on note

$$U = (\Omega_1 R_1 + \Omega_2 R_2)/2 \quad , \quad \Delta U = \Omega_1 R_1 - \Omega_2 R_2\tag{6.26b}$$

la vitesse moyenne et l'écart de vitesse des cylindres. Si on remplace $\Omega_1 R_1 = U + (\Delta U/2)$, $\Omega_2 R_2 = U - (\Delta U/2)$, $R_1 = R - (d/2)$ et $R_2 = R + (d/2)$ alors les coefficients A et B sont trouvés comme

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \left(\frac{U}{R} - \frac{\Delta U}{d} \right) \\ B &= \frac{1}{2} \left(UR + \frac{\Delta UR^2}{d} \right) \left(1 - \frac{d^2}{4R^2} \right) \approx \frac{1}{2} \left(UR + \frac{\Delta UR^2}{d} \right)\end{aligned}\tag{6.27}$$

Quelques lignes de calcul sont nécessaires pour arriver à ces formules. Dans B , on peut déjà comprendre que le terme $d^2/4R^2 \ll 1$ dans la limite small-gap. On peut l'ignorer dans la suite. Par contre, dans les équations on a plus spécifiquement besoin de développer le terme $\frac{B}{r^2}$ dans la limite small gap. Cela donne

$$\frac{B}{r^2} = \frac{B}{(R+Z)^2} \approx \frac{1}{R^2} \left(1 - 2\frac{Z}{R} \right) B \approx \frac{1}{2} \left(\frac{U}{R} + \frac{\Delta U}{d} \right) - \frac{Z}{R} \left(\frac{U}{R} + \frac{\Delta U}{d} \right)\tag{6.28}$$

On rappelle que $Z \sim d$ ce qui donne le droit d'utiliser ce DL. Au final, cela signifie qu'on peut remplacer

$$A + \frac{B}{r^2} \approx \frac{U}{R} - \frac{Z}{R} \left(\frac{U}{R} + \frac{\Delta U}{d} \right)\tag{6.29}$$

dans la composante radiale des équations de perturbations. Ce terme a une dépendance spatiale en Z et rend la recherche de solutions plus difficile. Comme $|Z/R| = O(d/R) \ll 1$ dans la limite small-gap, il peut être intéressant d'ignorer cette dépendance spatiale, mais alors il faut s'assurer que $\frac{Z}{R} \frac{\Delta U}{d} \ll \frac{U}{R}$. Cela nécessite une deuxième hypothèse, l'hypothèse de faible rotation différentielle :

$$\text{Hypo 2 : } \frac{\Delta U}{U} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad A + \frac{B}{r^2} \approx \frac{U}{R}\tag{6.30}$$

Avec ces hypothèses et les changements de notations, on arrive sur un jeu d'équations simplifié

$$\begin{aligned}\partial_t u_Z &\approx -\partial_Z q + \frac{2U}{R} u_\theta + \nu (\partial_{ZZ}^2 + \partial_{XX}^2) u_Z \\ \partial_t u_\theta + u_Z \left(\frac{U}{R} - \frac{\Delta U}{d} \right) &\approx \nu (\partial_{ZZ}^2 + \partial_{XX}^2) u_\theta \\ \partial_t u_X &\approx -\partial_X q + \nu (\partial_{ZZ}^2 + \partial_{XX}^2) u_X \\ \partial_Z u_Z + \partial_X u_X &\approx 0\end{aligned}\tag{6.31}$$

qui est à tout point similaire à celui rencontré dans l'analyse de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Il suffit de renommer

$$u_\theta \leftrightarrow \Theta \quad , \quad d \leftrightarrow H \quad , \quad -\frac{U}{R} + \frac{\Delta U}{d} \leftrightarrow \frac{\Delta T}{H} \quad , \quad \frac{2U}{R} \leftrightarrow \beta g \quad (6.32)$$

afin d'obtenir

$$\partial_t u_Z \approx -\partial_Z q + \beta g \Theta + \nu (\partial_{ZZ}^2 + \partial_{XX}^2) u_Z \quad (6.33a)$$

$$\partial_t \Theta \approx u_Z \frac{\Delta T}{H} + \nu (\partial_{ZZ}^2 + \partial_{XX}^2) \Theta \quad (6.33b)$$

$$\partial_t u_X \approx -\partial_X q + \nu (\partial_{ZZ}^2 + \partial_{XX}^2) u_X \quad (6.33c)$$

$$\partial_Z u_Z + \partial_X u_X \approx 0 \quad (6.33d)$$

Ce jeu d'équations est maintenant identique à celui trouvé dans la convection de Rayleigh-Bénard cf. (3.13) avec $\kappa = \nu$. En plus, les conditions limites sont ceux de l'adhérence, qui s'identifient à

$$CL_1 : \mathbf{u}|_{Z=-d/2,+d/2} = 0, \quad \Theta|_{Z=-d/2,+d/2} = 0 \quad (6.34)$$

La similitude des deux problèmes permet de réutiliser les résultats. Dans la limite des hypothèses small-gap et faible rotation différentielle, on sait notamment que le seuil de l'instabilité sera

$$Ta_c = 1708 \quad (6.35)$$

pour un nombre d'onde critique $k = 3.117$ en unités d^{-1} . Ce nombre Ta est le nombre de Taylor qui remplace le nombre de Rayleigh. On peut l'obtenir en remplaçant dans le nombre Rayleigh $Ra = g\beta\Delta TH^3/\nu\kappa$, $g\beta \rightarrow \frac{2U}{R}$, $\Delta T/H \rightarrow (-U/R) + (\Delta U/d)$, $H \rightarrow d$, $\kappa \rightarrow \nu$. Cela donne

$$Ta = \frac{2U (\Delta U \frac{R}{d} - U) d^4}{\nu^2 R^2} \quad (6.36)$$

ou

$$Ta = \frac{4(\Omega_1 R_1 + \Omega_2 R_2)}{\nu^2 (R_1 + R_2)} \left[(\Omega_1 R_1 - \Omega_2 R_2) \frac{R_1 + R_2}{2(R_2 - R_1)} - \frac{\Omega_1 R_1 + \Omega_2 R_2}{2} \right] (R_2 - R_1)^4 \quad (6.37)$$

dans les variables originales. Au delà du $Ta_c = 1708$ on s'attend à une structure cellulaire exactement comme dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Le champ u_θ agit de la même manière que l'écart de température dans ce problème. Le champ de vitesse au voisinage du seuil donne lieu à un écoulement comme en figure 6.3. Dans la structure selon $r - z$ on décompte un certain nombre de rouleaux et ces rouleaux sont accompagnés d'une vitesse $u_\theta \neq 0$. Les lignes de courant s'enroulent sur des tores.

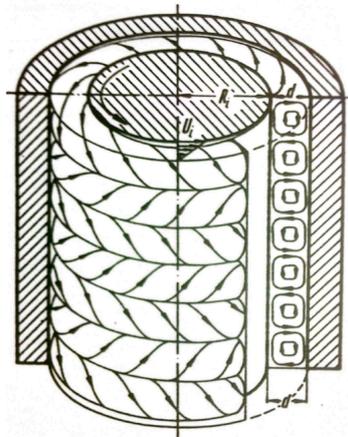


FIGURE 6.3 – Schéma qui illustre l'écoulement dans les rouleaux de Taylor-Couette, issue de [22]

Le modèle donné ici n'est pas identique à celui de Taylor et comment est-ce que ce résultat se compare à son analyse ? Dans son article, Taylor utilise deux nombres de Reynolds et un rapport d'aspect définis comme

$$Re_1 = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad , \quad Re_2 = \frac{\Omega_2 R_2 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad , \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1} \quad (6.38)$$

Notre nombre de Taylor trouvé plus haut se réécrit comme

$$Ta = (Re_1^2 - Re_2^2) \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha + 1} - \frac{1}{2} (Re_1^2 + Re_2^2) \left(\frac{2(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \right)^2 \quad (6.39)$$

Sur la figure 6.4-(b) on trace la ligne $Ta = Ta_c = 1708$ dans le plan Re_1 - Re_2 . On choisit $\alpha = 4.035/3.55 = 1.137$ comme dans l'expérience originale de [25]. A priori, notre analyse n'est que adapté au voisinage de la première bissectrice ($\Omega_1 R_1 \approx \Omega_2 R_2$) car on a supposé une faible rotation différentielle. Sur ce même graphe, on montre la ligne de Rayleigh. Selon le critère de Rayleigh, l'instabilité est possible dès lors que

$$\frac{\Omega_1 R_1^2}{\Omega_2 R_2^2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad Re_1 > \alpha Re_2 \quad (6.40)$$

On constate déjà que notre modèle visqueux se rapproche bien de cette ligne de Rayleigh. Sous les mêmes hypothèses 1 et 2, Taylor exprime le seuil de l'instabilité à l'aide d'un nombre de Taylor légèrement différent :

$$\overline{Ta} = \frac{2(\Omega_1 + \Omega_2)(\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2)(R_2 - R_1)^3}{\nu^2(R_1 + R_2)} \quad (6.41)$$

cf. §17.1 de [10]. A l'ordre dominant, cette définition est équivalente à notre expression Ta dans la limite du small gap. Ce nombre résulte d'une gestion différente de la vitesse moyenne. L'analyse originale de Taylor [25] place le seuil en

$$\overline{Ta}_c \approx \frac{\pi^4}{0.0571} = 1706 \quad , \quad 0 \ll \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \ll 1 \quad (6.42)$$

dans cette limite, tout ça, cinq ans **avant** que le problème de convection de Rayleigh-Bénard avec des conditions d'adhérence soit résolu (Jeffreys1928) et bien avant que cette analogie entre les deux problèmes soit connue. Exprimons ce critère de Taylor avec les nombres Re_1, Re_2, α :

$$\overline{Ta} = (Re_1^2 - \alpha^2 Re_2^2) \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \quad (6.43)$$

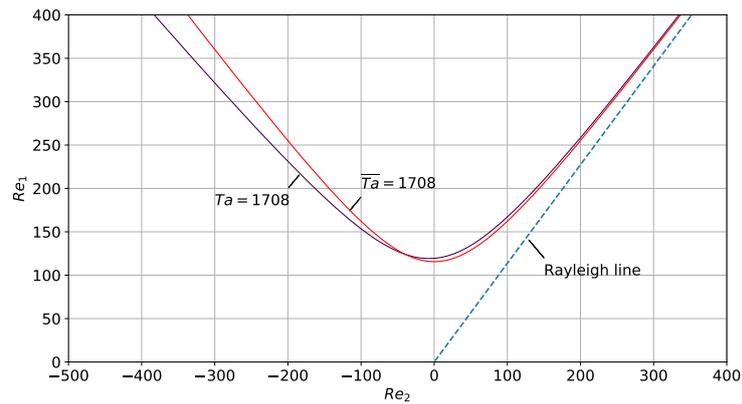
La ligne $\overline{Ta} = \overline{Ta}_c = 1706$ peut maintenant être été ajoutée sur la figure 6.4-(b). Elle s'écarte très peu de la ligne $Ta = Ta_c$ produite par le modèle qui a été donnée ci-dessus. Des écarts apparaissent plutôt dans la région où $Re_1 < 0$ où, de toute manière, on sait que l'analyse n'est pas adaptée (hypothèse 2 n'est plus satisfaite). Pour améliorer la description théorique, il faut laisser tomber l'hypothèse 2 de faible rotation différentielle.

Dans son article [25], Taylor donne des prédictions théoriques très précises du seuil de l'instabilité et sans l'hypothèse H2, ni H1. Ces prédictions sont en très bon accord avec les expériences, comme le montre la figure 6.4-(b). Il s'agit ici d'une des grande réussites de l'analyse de stabilité linéaire quantitative en hydrodynamique et c'est une des raisons qui explique pourquoi la méthode de l'analyse de stabilité linéaire a été ensuite utilisée dans de nombreux autres problèmes (avec plus au moins de succès). Plus bas, on propose un exercice sur ordinateur qui cherche à reproduire les résultats de Taylor de manière numérique.

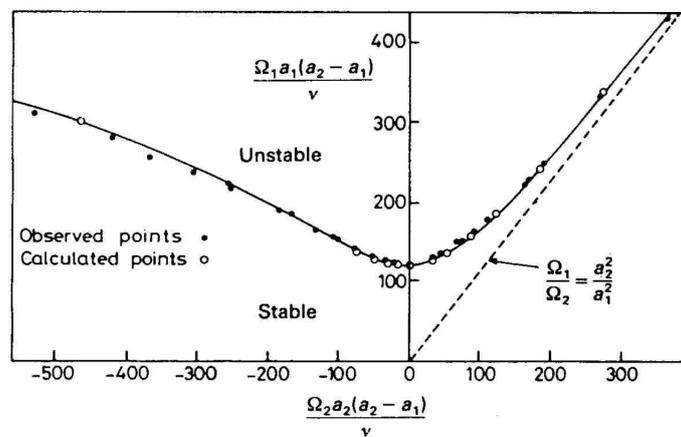
6.3 Au delà

6.3.1 Evolution non-linéaire

L'écoulement de Taylor-Couette est très probablement l'écoulement le plus populaire dans des études fondamentaux. La figure 6.5 montre le diagramme de phase de l'article de [1]. Au dessus de la ligne de stabilité marginale, il existe une multitude de différents états qu'on cartographie depuis des générations. Aujourd'hui on arrive à reproduire quelques uns de ces états parfois très turbulents dans des simulations numériques.



(a) Estimation théorique du seuil



(b) Théorie plus précise et comparaison à l'expérience

FIGURE 6.4 – Instabilité centrifuge de Taylor-Couette : (a) Le seuil selon le modèle précisé ici ensemble avec la prédiction de Taylor et la ligne de Rayleigh . (b) Résultat théorique de Taylor et comparaison à l'expérience [25].

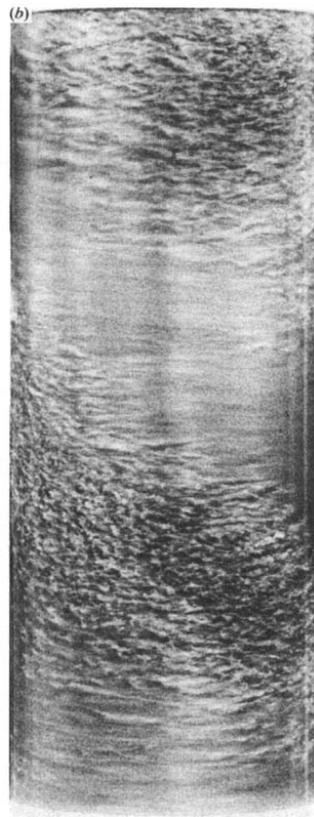
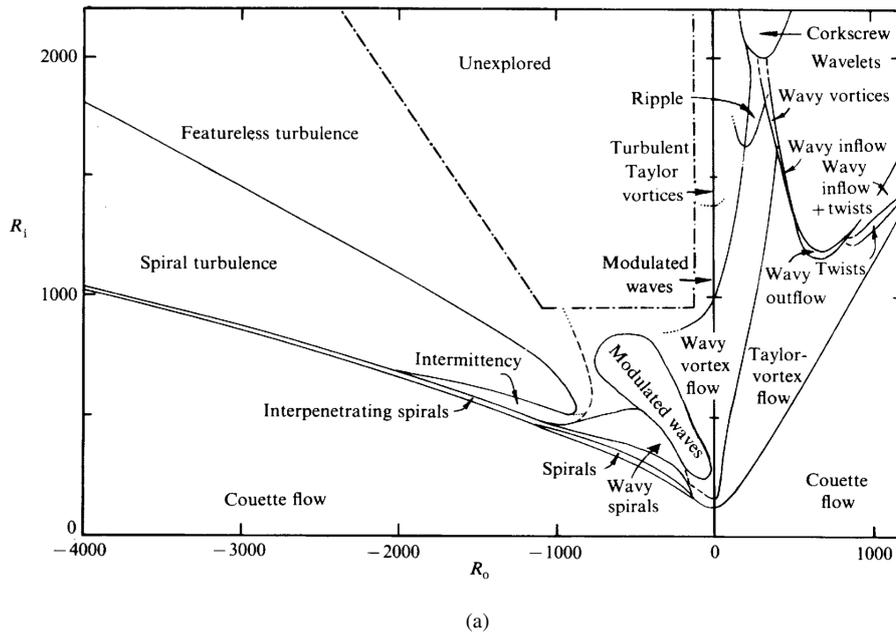


FIGURE 6.5 – (a) Diagramme de phase de l'écoulement de Taylor-Couette. En abscisse $R_o = \Omega_2 R_2^2 / \nu$ (Reynolds outer) et en ordonnée $R_i = \Omega_1 R_1^2 / \nu_1$. Au dessus d'une courbe de stabilité marginale, on observe des états hydrodynamiques très variés. (b) Régime de turbulence en spirales (l'image à été tournée). Issu de [1].

6.3.2 Autres manifestations de l'instabilité centrifuge

L'instabilité de Taylor-Görtler se manifeste souvent par l'apparition spontanée de tourbillons dans la couche limite sur une paroi courbée. Comme le montre le schéma de la figure 6.6-(a), ces tourbillons tournent autour d'un axe qui longe la paroi. Une belle vidéo qui montre ces tourbillons de Görtler est [celle-ci](#), réalisé par J. Aurnou de Spinlab (UCLA). Physiquement, ces tourbillons de Taylor-Görtler ont exactement la même origine que l'instabilité centrifuge.

Dans de nombreux écoulements industriels ou domestiques, on transporte les liquides à l'aide de tuyaux, parfois courbés. Dans ces régions courbées, il peut se réaliser une instabilité dans l'écoulement, qui au lieu d'aller tout droit, créer une paire de tourbillons contrarotatifs comme schématisé en figure 6.6-(b). On parle de l'instabilité de Dean qui avait décrit le phénomène en 1927 [9]. Cette même instabilité peut conduire aux méandres dans les lits de rivières.

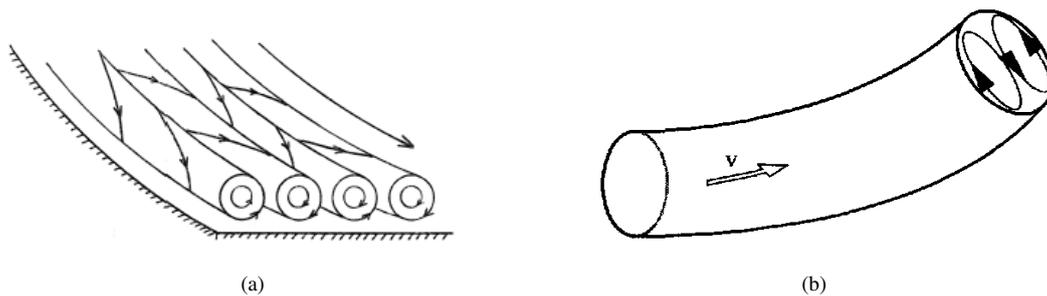


FIGURE 6.6 – (a) Tourbillons de Taylor-Görtler sur une paroi courbée. Schéma issue de [22]. (b) Instabilité de Dean dans un coude d'un tuyau. Schéma issue de [18].

6.4 Exercice

6.4.1 Analyse de stabilité numérique

Le cas de l'écoulement de Taylor-Couette montre qu'il est fréquent dans des problèmes de stabilité de tomber sur des équations différentielles qui ne sont pas si facilement résolues. Avant l'ère du calcul numérique ceci présentait un blocage, mais plus aujourd'hui. Il existe en effet toute une série de méthodes numériques qui permettent de résoudre ces problèmes de stabilité.

Dans le notebook Jupyter fourni, `TC_num.ipynb` et discuté en cours, on montre comment mettre en place une telle étude de stabilité numérique. On utilise la méthode des différences finies, qui est la plus simple à coder. Un exercice défi, consiste à retrouver la courbe de Taylor pour le seuil de l'instabilité, mais ne penser pas que c'est un exercice simple.

7. Instabilité de Kelvin-Helmholtz

7.1 Introduction

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz ou instabilité de la couche de cisaillement est un autre grand classique en mécanique des fluides. On peut l'apercevoir dans de nombreux écoulements car les conditions nécessaires pour sa mise en place sont assez minimales. Comme le montre la figure 7.1-(a), on imagine un écoulement parallèle, avec une zone rapide (vitesse U_1) et une zone lente (vitesse $U_2 < U_1$), séparées par une zone de transition de fine épaisseur δ , qu'on appelle couche de cisaillement. Cette situation de changement de vitesse abrupte est très instable et on parle de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

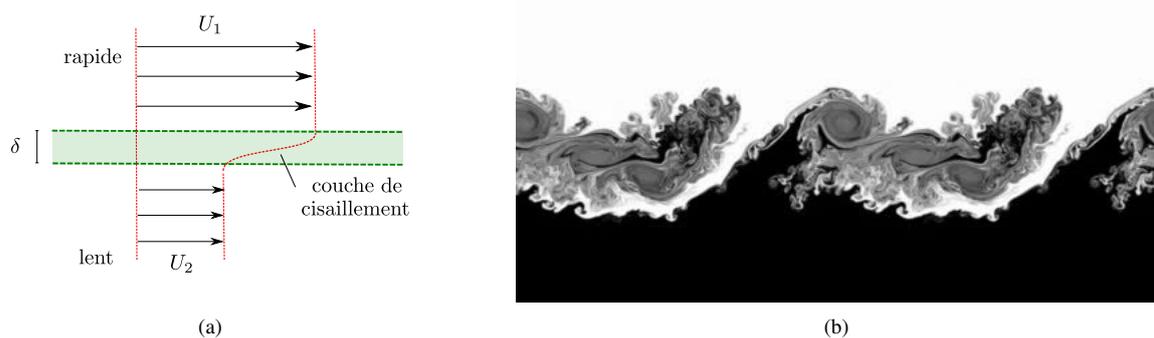


FIGURE 7.1 – (a) Schéma d'une couche de cisaillement . (b) Cliché issu d'une simulation non-linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (source wikipédia)

La figure 7.1-(b) montre un possible devenir de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette image est issue de simulations numériques bidimensionnelles et l'écoulement est clairement devenu très turbulent. Dans ce chapitre, on formule la théorie linéaire et non-visqueuse qui capture l'essentiel de l'instabilité. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz permet également de comprendre la génération de vagues par le vent (dans certaines conditions) et ceci fera l'objet d'un exercice.

7.2 Etat de base & mécanisme physique

L'instabilité de Kelvin Helmholtz est essentiellement non-visqueuse et le mécanisme physique qui conduit à l'instabilité se comprend à l'aide de la loi de Bernoulli. En absence de viscosité, on peut idéaliser la couche de cisaillement comme une couche infiniment fine $\delta \rightarrow 0$ Même si le fluide est le même partout,

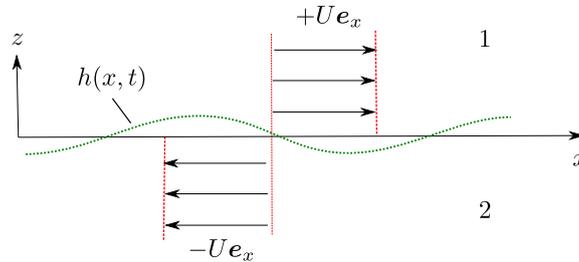


FIGURE 7.2 – Couche de cisaillement idéalisée. Dans l'état de base, le fluide bouge à vitesse $+U$ en haut et $-U$ en bas et la couche a une épaisseur infiniment fine.

de densité ρ , on distinguera les zones de dessus (zone 1) et de dessous (zone 2). On symétrise également l'écoulement en

$$\mathbf{U}_1 = U \mathbf{e}_x \quad , \quad \mathbf{U}_2 = -U \mathbf{e}_x \quad (7.1)$$

On aurait pu considérer deux vitesses U_1 et U_2 arbitraires, mais suite à l'invariance Galiléenne, il est toujours possible de se placer dans le référentiel qui se déplace à la vitesse moyenne $(U_1 + U_2)/2$ et alors on a $U = (U_1 - U_2)/2$. Suite à l'invariance Galiléenne, seule cette différence des vitesses peut influencer le taux de croissance de l'instabilité. La surface de séparation entre les deux zones est placée en $z = 0$ à l'équilibre mais se déformera comme une surface matérielle. Avec un seul fluide, la gravité ne peut avoir aucun effet et on peut donc l'ignorer ici. La pression de base $P = P_0$ sera constante dans tout le domaine.

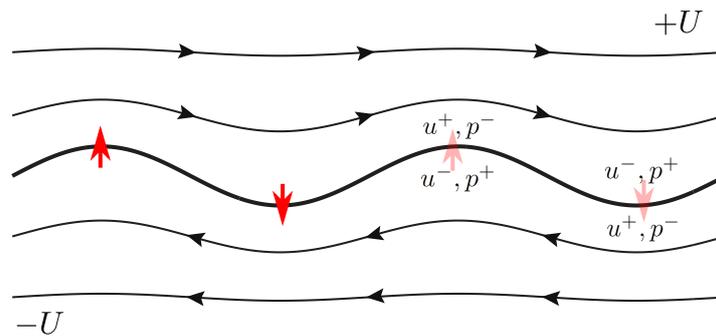


FIGURE 7.3 – Lignes de courants autour d'une couche de cisaillement au début de sa déstabilisation. La déformation de l'interface crée des zones de basse et de haute vitesse, u_- et u_+ , qui s'accompagnent d'une sur- ou sous-pression, p_+ et p_- . La pression pousse dans le sens de flèches rouges (de p_+ à p_-) et amplifie ainsi la déformation.

Le schéma de la figure 7.3 permet de comprendre le mécanisme physique qui rend instable cette situation d'équilibre non-visqueux. Une faible déformation de l'interface, crée des zones de basse u_- d'un côté et de haute vitesse u_+ de l'autre côté. La loi de Bernoulli nous indique que la pression sera respectivement plus élevée p_+ ou plus basse p_- des deux côtés. Une petite déformation de l'interface crée donc des gradients de pression verticaux qui semblent toujours vouloir amplifier la déformation initiale supposée (cf. flèches).

7.3 Analyse de stabilité linéaire

7.3.1 Analyse dimensionnelle

Le but de l'analyse de stabilité est de calculer le taux de croissance s comme une fonction de U , ρ et k le nombre d'onde de la perturbation. Par analyse dimensionnelle, on montre que seul

$$\frac{s}{Uk} = C \quad (7.2)$$

avec C une constante est admis. En particulier, cela signifie que la densité ρ n'a aucun impact sur le taux de croissance. Faire l'exercice pour vous en convaincre.

7.3.2 Perturbations linéaires

On perturbe l'état de base avec \mathbf{u}_i pour la vitesse p_i pour la pression. La surface de séparation est déformée en $z = h(x, t)$. Les équations pour les perturbations linéaires sont

$$\rho \partial_t \mathbf{u}_1 + \rho U \partial_x \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 \quad (7.3a)$$

$$\rho \partial_t \mathbf{u}_2 - \rho U \partial_x \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 \quad (7.3b)$$

et $\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0$. Ceci suggère encore une fois que l'écoulement est potentiel $\mathbf{u}_i = \nabla \phi_i$. Sur l'interface, on doit exprimer deux conditions cinématiques et une continuité de la pression. Après linéarisation ça donne

$$\partial_t h + U \partial_x h = u_{1,z}|_{z=0} \quad , \quad \partial_t h - U \partial_x h = u_{2,z}|_{z=0} \quad , \quad p_1|_{z=0} = p_2|_{z=0} \quad (7.4)$$

comme conditions à l'interface. Attention à ne pas oublier le terme advectif $\pm U \partial_x h$.

7.3.3 Solution

Comme dans l'instabilité de Rayleigh-Taylor, les potentiels hydrodynamiques sont

$$\phi_1 = A_1 e^{ikx} e^{-kz} e^{st} \quad , \quad \phi_2 = A_2 e^{ikx} e^{kz} e^{st} \quad (7.5)$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Ils sont associées à des pressions

$$p_1 = -\rho(s + ikU)A_1 e^{ikx} e^{-kz} e^{st} \quad , \quad p_2 = -\rho(s - ikU)A_2 e^{ikx} e^{kz} e^{st} \quad (7.6)$$

L'interface se déforme en $h = B e^{ikx} e^{st}$. Les trois conditions aux limites à l'interface, fixent trois équations qui relient A_1 , A_2 et B :

$$(s + ikU)B = -kA_1 \quad (7.7a)$$

$$(s - ikU)B = kA_2 \quad (7.7b)$$

$$\rho(s + ikU)A_1 = \rho(s - ikU)A_2 \quad (7.7c)$$

Dans la troisième relation, ρ se trouve des deux cotés et disparaît donc du problème : ρ ne peut effectivement pas influencer le taux de croissance. Avec la première et deuxième équation, on exprime A_1 et A_2 en fonction de B . Ensuite on injecte ces expressions dans la troisième équation, ce qui donne la relation de dispersion

$$-\frac{1}{k}(s + ikU)^2 = \frac{1}{k}(s - ikU)^2 \quad \Rightarrow \quad s = \pm Uk \quad (7.8)$$

On trouve le taux de croissance sous la forme prédite par l'analyse dimensionnelle, la constante $C = 1$. Plus la déformation est de courte longueur d'onde de grand k , plus le taux de croissance sera grand. Le fait que s ne décroît pas à grand k est le résultat de l'hypothèse de couche de cisaillement infiniment fin.

7.4 Au dela...

7.4.1 Kelvin-Helmholtz à l'interface entre 2 fluides différents

Si la couche de cisaillement existe à l'interface entre deux fluides différents et immiscibles, alors l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est toujours possible. Par contre, les densités différentes ρ_1 et $\rho_2 > \rho_1$, la gravité g et la tension de surface γ impactent la relation de dispersion et l'instabilité n'a plus toujours lieu pour tout nombre d'onde k . L'étude de ce cas physique est proposé en tant qu'exercice, plus bas.

7.4.2 Effets visqueux

Dans un fluide réel, un profil de vitesse discontinu ne peut pas rester stationnaire. L'écoulement de base visqueux $\bar{U} = \bar{U}(z, t)e_x$ est solution du problème

$$\partial_t \bar{U} = \nu \partial_{zz}^2 \bar{U} \quad , \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \bar{U} = \pm U \quad (7.9)$$

qui a comme solution

$$\bar{U} = U \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) \quad \text{ou} \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (7.10)$$

La vitesse varie comme une fonction d'erreur. La couche de cisaillement s'épaissit à un taux $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ par la diffusion. Pour étudier la stabilité de cet écoulement instationnaire, on ne dispose pas de techniques mathématiques simples. Par une étude numérique, il reste possible de calculer le taux d'amplification maximale atteignable.

7.4.3 Kelvin-Helmholtz comme instabilité secondaire

Des zones ou des parcelles de fluides qui sont cisailés fortement apparaissent spontanément dans de nombreux écoulements. Dans la figure 7.4, on donne deux exemples de situations dans lesquelles on dévie fortement de l'état de base parallèle idéalisé. A gauche, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz apparaît comme une instabilité secondaire après une première instabilité de type Rayleigh-Taylor. A droite, on voit un jet libre qui, arrivant dans du fluide au repos développe des couches de cisaillement cylindriques. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz, fait apparaître des vortex annulaires.

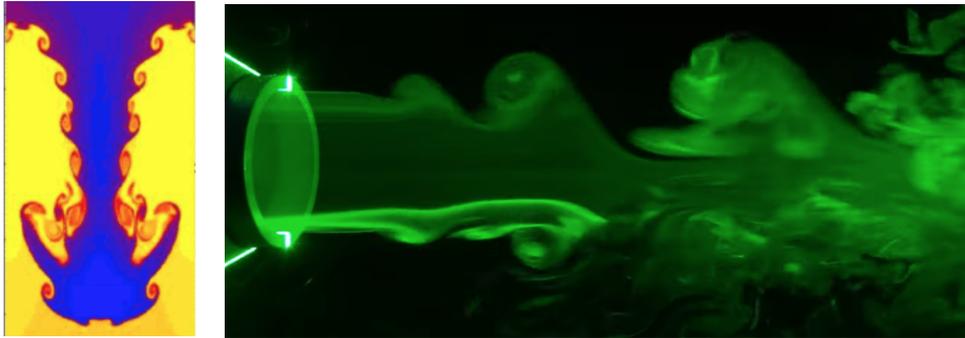


FIGURE 7.4 – (gauche) Après l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui fait plonger le liquide lourd, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz se manifeste sur l'interface, suite au fort cisaillement qui y existe. (droite) Instabilité de Kelvin-Helmholtz sur un jet libre issue de cette vidéo.

Finalement, il serait dommage de se priver des très belles images de l'atmosphère de Jupiter, issues des missions spatiales Juno (2018) et Voyager 1 (1979). Suite à la rotation rapide, l'atmosphère de Jupiter développe une structure en bandes, caractéristiques de jets équatoriales. Sur la figure de gauche, on peut voir une couche de mélange avec ses structures qui ressemblent fortement à celles créées par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. La figure de droite, montre un zoom refjupiter, on montre deux clichés

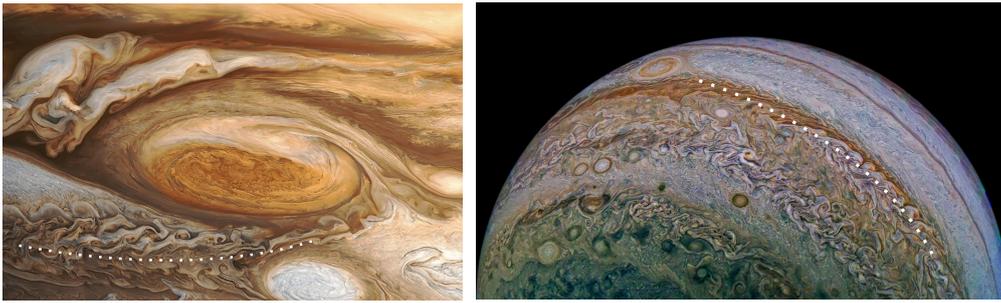


FIGURE 7.5 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz sur Jupiter. A gauche, on aperçoit des allées de tourbillons dans des couches de mélange entre deux bandes. A droite, on aperçoit le même type de vortices au voisinage de la grande tâche rouge. Ces photos sont issues des missions Juno (2018) et Voyager 1 en (1979).

7.5 Exercice : Génération de vagues

On s'intéresse à la génération de vagues sur une surface d'eau par action du vent. Pour cela, on considère le système de la figure 7.6.

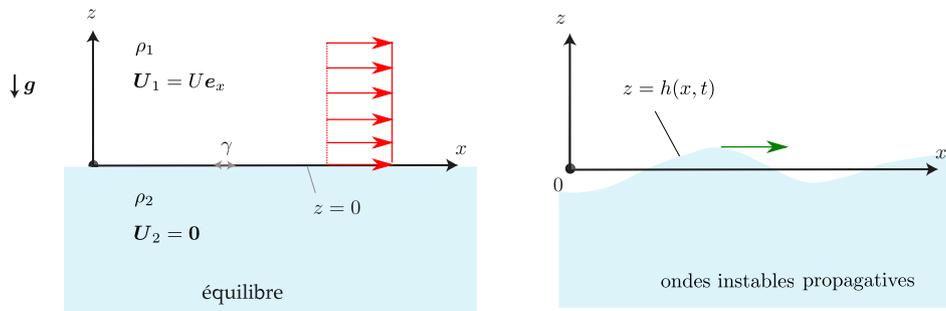


FIGURE 7.6 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec deux fluides différents et en présence de gravité et de tension de surface.

Un fluide léger 1 (de l'air) est placée au dessus d'un fluide lourd 2 (de l'eau). Des deux cotés, ces domaines de fluide sont semi-infinies. Dans l'état de base, le fluide léger se déplace à vitesse $U_1 = U e_x$ avec $U > 0$. Le fluide en bas est au repos $U_2 = 0$. On note ρ_1 et $\rho_2 > \rho_1$ la densité des liquides. Le système est soumis à la gravité g et la tension de surface vaut γ . On ignore la viscosité. Au delà d'une certaine vitesse critique, des ondes vont se déstabiliser.

1. Selon vous, quelle est l'échelle de vitesse U typique nécessaire pour déstabiliser de la surface en absence de tension de surface ?
2. Selon vous, quelle est l'échelle de vitesse U typique nécessaire pour déstabiliser de la surface en absence de gravité ?
3. Mettre en place une analyse de stabilité linéaire pour trouver la relation de dispersion
 - (a) Etat de base de pression
 - (b) Equations pour les perturbations
 - (c) Relation de dispersion
4. Faire une étude numérique de cette relation de dispersion. On étudie de l'air et de l'eau. On veut identifier la vitesse critique U pour l'apparition en place de vagues. Que vaut la vitesse de phase et de groupe ?
5. Proposer un adimensionnement adéquat qui facilite l'étude de la relation de dispersion.

Si vous aimez les défis, vous pouvez tenter de trouver la relation de dispersion dans le cas où le liquide 2 en bas est supposé visqueux. Le liquide 1 en haut reste parfait dans le modèle. Ce calcul a été réalisé par Taylor en 1940.

8. Instabilité de Saffmann-Taylor

8.1 Introduction

Si on repousse un liquide plus visqueux avec un liquide moins visqueux, dans un milieu poreux, l'interface entre les deux phases ne garde pas une forme simple. Elle se tordra et forme des figures très ramifiées, comme on le schématise en figure 8.1. Cette instabilité rend l'extraction de pétrole des roches bitumeuses difficile car il n'est pas possible d'extraire la totalité du pétrole caché.

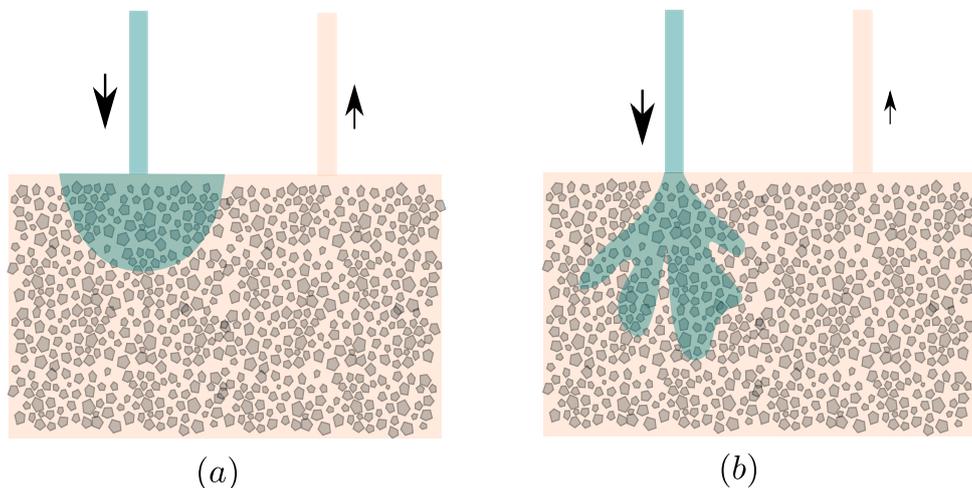


FIGURE 8.1 – Dans certains procédés d'extraction du pétrole, on pompe un liquide moins visqueux à haute pression dans la roche qui contient le pétrole plus visqueux. L'interface entre les deux phases liquides ne reste pas simple comme en figure (a) mais subit des digitations comme en (b).

Pour apercevoir cette instabilité plus clairement, il est préférable de se placer dans une cellule appelée de Hele-Shaw. On imagine deux plaques planes parallèles séparées d'une petite distance b . Des liquides visqueux qui se trouvent entre les deux plaques vont fortement ressentir la friction avec les parois. On montre, que le champ de vitesse est directement corrélé au gradient de pression, exactement comme dans les milieux

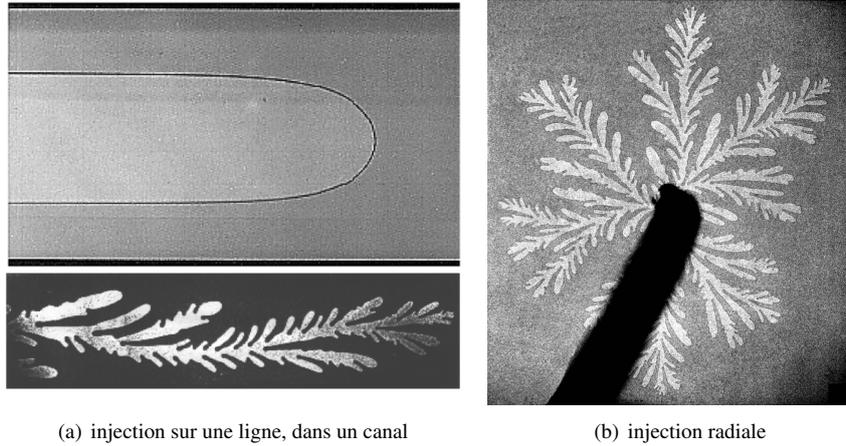


FIGURE 8.2 – Instabilité de Saffmann-Taylor ou digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw (deux plaques parallèles placées proches). Si un liquide moins visqueux est poussé dans un liquide plus visqueux, l'interface se déstabilise et peut donner lieu à des formes très ramifiées.

poreux. La figure 8.2 montre ce qui se passe si un liquide peu visqueux repousse un liquide plus visqueux. L'interface entre les liquides, initialement plate va spontanément se déformer et donner lieu à une formation de lobes, appelés doigts. Selon les fluides, la tension de surface et la vitesse des deux phases, on peut voir un seul doigt se former, le doigt de Saffmann-Taylor, ou au contraire une structure très ramifiée qui fait effectivement penser à une algue.

L'explication du mécanisme physique n'est pas si évident, mais il y a quelques ressemblances avec l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Dans l'instabilité de Rayleigh-Taylor, la gravité s'équilibre avec un gradient de pression et ce gradient de pression est instable si le fluide au dessus est plus lourd. Ici le mouvement de base crée un même genre de gradient de pression instable.

8.2 Écoulements dans les cellules Hele-Shaw

Un écoulement dans un milieu poreux est fortement ralenti par la viscosité de ce fluide et il est nécessaire de maintenir un gradient de pression suffisamment fort pour créer un écoulement. La loi de Darcy est la loi la plus simple qui corrèle l'écoulement dans le poreux au gradient de pression :

$$\mathbf{u} = -\mu \nabla p \quad (8.1)$$

Ici on nomme μ la mobilité. Si la mobilité est constante dans l'espace, cela traduit que la taille des pores est à peu près uniforme partout. Avec μ un nombre est pas un tenseur d'ordre 2, on suppose que le matériau poreux est isotrope : les pores n'ont pas de direction privilégiée.

Dans une cellule de Hele-Shaw, le liquide est fortement contraint en une direction d'espace (direction z). On note b , la petite distance qui sépare les deux plaques, L la longueur typique dans les autres directions, U une échelle typique de vitesse et T un temps typique de variation de l'écoulement. Sous les 3 hypothèses

$$\text{H1 : } \frac{b}{L} \ll 1 \quad , \quad \text{H2 : } \frac{Ub}{L} \ll \frac{L}{b} \quad , \quad \text{H3 : } \frac{b^2}{\nu T} \ll 1 \quad (8.2)$$

on peut utiliser un modèle de lubrification. En absence de gravité, les équations à l'ordre dominant sont

$$\begin{cases} 0 \approx -\nabla_{\perp} p + \eta \partial_{zz}^2 \mathbf{u}_{\perp} \\ 0 \approx -\partial_z p \end{cases} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{\perp} + \partial_z u_z = 0 \quad (8.3)$$

Ici $\mathbf{u}_{\perp} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$ l'écoulement dans le plan. On reconnaît que tous les effets inertiels (accélération et terme NL) sont absents et que seule la partie ∂_{zz}^2 du Laplacien visqueux survit dans ce modèle. L'équation $\partial_z p = 0$ informe que la pression est constante dans la fine section. On peut alors intégrer l'équation pour la

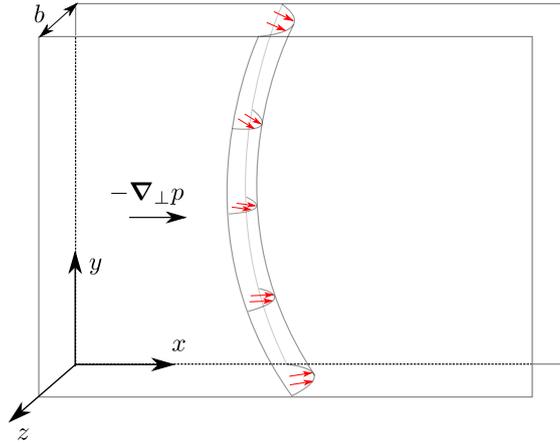


FIGURE 8.3 – Dans une cellule de Hele-Shaw, le liquide visqueux est spatialement confiné par deux plaques parallèles, placée à petite distance b . Dans la direction fine, l'écoulement est plutôt parabolique et s'aligne avec le gradients de pression dans le plan $x - y$, $-\nabla_{\perp} p$.

partie \perp selon z . Si on exige des conditions d'adhérence $\mathbf{u}_{\perp}|_{z=0,b} = 0$ sur les parois, on trouve

$$\mathbf{u}_{\perp} = -\nabla_{\perp} p \left[\frac{z(b-z)}{2\eta} \right] \quad (8.4)$$

comme solution, soit un écoulement qui a la structure parabolique typique selon z , de l'écoulement de Poiseuille. On calcule la vitesse moyenne sur la tranche, par l'intégrale suivante :

$$\bar{\mathbf{u}}_{\perp} = \frac{1}{b} \int_0^b -\nabla_{\perp} p \left[\frac{z(b-z)}{2\eta} \right] dz = -\underbrace{\frac{b^2}{12\eta}}_{\mu} \nabla_{\perp} p \quad (8.5)$$

Cette relation suggère que l'écoulement moyen $\bar{\mathbf{u}}_{\perp}$ satisfait à une loi de Darcy avec une mobilité effective de $\mu = b^2/12\eta$. Les cellules de Hele-Shaw sont un modèle idéal pour étudier le comportement des écoulements dans les milieux poreux. Le gradient de pression $\nabla_{\perp} p$ ne dépend pas de z et il peut encore varier dans le plan $x - y$. La seule contrainte est que la masse est conservée. On intègre $\nabla \cdot \mathbf{u}$ entre $z \in [0, b]$ et on divise par b . Comme les parois $z = 0, b$ sont imperméables, on en déduit l'incompressibilité de l'écoulement moyen.

$$\frac{1}{b} \int_0^b \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp} dz + \frac{1}{b} \underbrace{\int_0^b \partial_z u_z dz}_{u_z|_{z=b} - u_z|_{z=0} = 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\perp} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\perp} = 0 \quad (8.6)$$

Cette loi de conservation permet de calculer P comme la solution d'un problème de Laplace.

★ **Écoulements dans une cellule de Hele-Shaw.** Sous les hypothèses (8.2) du modèle de lubrification, l'écoulement moyen $\bar{\mathbf{u}}_{\perp} = b^{-1} \int_0^b \mathbf{u} dz$ entre deux plaques séparées de distance b , satisfait les lois d'évolution

$$\bar{\mathbf{u}}_{\perp} = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla_{\perp} p \quad , \quad \nabla_{\perp} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\perp} = 0 \quad (8.7)$$

Ici η est la viscosité dynamique. ■

Il est intéressant de remarquer que l'écoulement moyen est donc un écoulement potentiel, avec $\phi = -\mu p$. Dans des cellules de Hele-Shaw, il est possible de retrouver la structure des écoulements potentiels qu'on rencontre plus habituellement dans un contexte de fluide parfait (sans viscosité).

Le modèle réduit vient avec des conditions aux limites réduites. Si dans la cellule de Hele-Shaw, l'écoulement peut heurter une paroi solide Σ au repos, à la normale \mathbf{n} on doit imposer l'imperméabilité sur

toute la surface

$$\text{sur une surface solide : } \bar{\mathbf{u}}_{\perp} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} = 0 \quad (8.8)$$

Il n'est pas possible d'exiger en plus l'annulation de la vitesse tangentielle, comme on en a l'habitude avec les fluides visqueux. Sur une interface \mathcal{S} entre deux liquides, de viscosité différente, spécifiée par la fonction $\bar{F}(x, y, t) = 0$ il faut également se limiter aux conditions "non-visqueuses". On a alors

$$\begin{aligned} \text{sur une interface : } & \text{cond. cinématique (des deux cotés } i = 1, 2) : \partial_t \bar{F} + \bar{\mathbf{u}}_{i\perp}|_{\mathcal{S}} \cdot \nabla_{\perp} \bar{F} \approx 0 \\ & \text{cond. dynamique (loi de Young) : } p_2|_{\mathcal{S}} - p_1|_{\mathcal{S}} \approx \gamma \bar{\kappa} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Ici, la courbure $\bar{\kappa}$ est la courbure de la *ligne* de séparation entre les deux liquides. La démonstration que c'est bien ces conditions limites effectives qui s'appliquent n'est pas immédiate mais relève de bon sens. Une modélisation plus fine montre qu'une correction est toutefois nécessaire, comme on le verra plus bas. Dans la suite, on laisse tomber les notations $_{\perp}$. L'écoulement sera l'écoulement moyen et il se fait unique selon $x - y$.

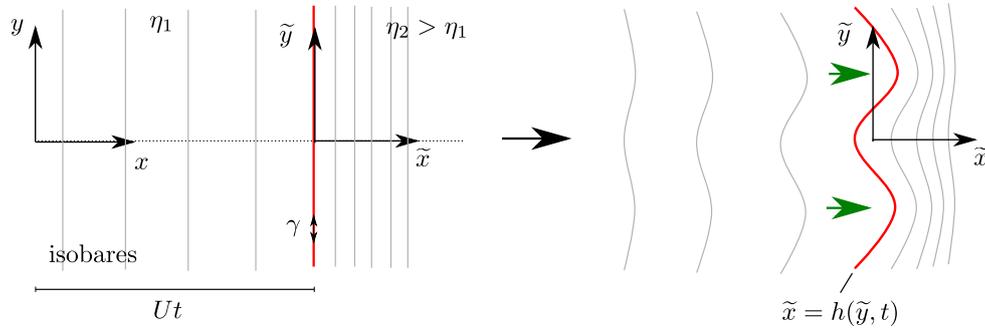


FIGURE 8.4 – Etat de base plan et instabilité de Saffmann-Taylor. Un liquide 1 peu visqueux est poussé dans un liquide 2 plus visqueux. L'interface de séparation entre les deux fluides ne restera pas rectiligne, mais se déformera pour donner naissance à des doigts. On étudie l'instabilité dans le référentiel en mouvement \tilde{x}, \tilde{y} .

8.3 Analyse de stabilité

8.3.1 Etat de base (dans un canal)

On propose d'étudier l'instabilité de Saffmann-Taylor dans un canal. Comme le suggère le schéma de la figure 8.4, un fluide 1 moins visqueux repousse un fluide 2, plus visqueux dans une cellule de Hele-Shaw à vitesse U . Dans l'état de base, on suppose que la ligne de séparation entre les deux liquides reste verticale et se translate à la vitesse moyenne U . La fonction qui localise la l'interface est donc

$$\bar{F} = x - Ut = 0 \quad (8.10)$$

Le liquide 1, se situe en $x - Ut < 0$, le liquide 2 en $x - Ut > 0$. L'écoulement moyen dans ces deux zones est

$$\mathbf{U}_i = U \mathbf{e}_x \quad (8.11)$$

Si on intègre la loi de Darcy $U = -(b^2/12\eta_i)\partial_x P_i$ et on impose la continuité de la pression sur l'interface mobile, c.a.d. $P_1 - P_2|_{x=Ut} = 0$, on trouve la pression dans l'état de base comme

$$P_i = C - \frac{\eta_i U}{12b^2}(x - Ut) \quad (8.12)$$

La constante C peut dépendre du temps, mais sa valeur n'est pas importante.

8.3.2 Problème pour les perturbations linéaires

Pour mener l'analyse de stabilité, il est pratique de se placer dans le référentiel en mouvement avec le fluide. On utilisera les coordonnées

$$\tilde{x} = x - Ut \quad , \quad \tilde{y} = y \quad (8.13)$$

Dans ce référentiel, le fluide est au repos à l'état de base $\tilde{U}_i = \mathbf{0}$ mais il y a bien une pression $\tilde{P}_i = C - \frac{\eta_i U}{12b^2} X$. La loi de Darcy n'est pas invariant par translation Galiléenne et prend la forme suivante pour l'écoulement total (base + perturbation) :

$$U e_x + \tilde{u}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i} (\tilde{\nabla} P_i + \tilde{\nabla} p_i) \quad (8.14)$$

On en déduit

$$\tilde{u}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i} \tilde{\nabla} p_i \quad (8.15)$$

pour les perturbations. La surface perturbée est placée en

$$F = \tilde{x} - h(\tilde{y}, t) \quad (8.16)$$

On doit y satisfaire des condition dynamiques et cinématiques linéarisées :

$$\partial_t h = \tilde{u}_{i,\tilde{x}}|_{\tilde{x}=0} \quad (8.17)$$

$$\underbrace{P_2|_{\tilde{x}=h}}_{-12\eta_2 U h/b^2} + \tilde{p}_2|_{\tilde{x}=0} - \underbrace{P_1|_{\tilde{x}=h}}_{-12\eta_1 U h/b^2} - \tilde{p}_1|_{\tilde{x}=0} = \gamma \partial_{yy}^2 h \quad (8.18)$$

En résumé

★ **Problème de stabilité de Saffmann-Taylor.** Trouver les solutions instables de

$$\tilde{u}_i = -\frac{b^2}{12\mu_i} \tilde{\nabla} p_i \quad , \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}_i = 0 \quad (8.19a)$$

avec les CL

$$\partial_t h = \tilde{u}_{i,\tilde{x}}|_{\tilde{x}=0} \quad (8.19b)$$

$$\tilde{p}_2|_{\tilde{x}=0} - \tilde{p}_1|_{\tilde{x}=0} = \frac{12U(\eta_2 - \eta_1)}{b^2} h + \gamma \partial_{yy}^2 h \quad (8.19c)$$

Structurellement ce problème est très proche de celui de Rayleigh-Taylor. On aura encore un écoulement potentiel et le saut de densité fait place pour un saut de viscosité cinématique.

8.3.3 Solution

Combinant les équations dans le volume du fluide, on constate que la perturbation de pression satisfait à un problème de Laplace dans les deux zones : $\tilde{\nabla}^2 p_i = 0$. On peut proposer

$$p_1 = A_1 e^{k\tilde{x}} e^{ik\tilde{y}} e^{st} \quad (8.20)$$

$$p_2 = A_2 e^{-k\tilde{x}} e^{ik\tilde{y}} e^{st} \quad (8.21)$$

suite à l'invariance de l'état de base selon y . Le nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$ et $k > 0$ par hypothèse ici. La perturbation de l'interface, compatible avec ces profils sera

$$h = B e^{iky} e^{st} \quad (8.22)$$

On impose les 3 conditions aux limites.

$$sB = -\frac{b^2 k}{12\eta_1} A_1 \quad , \quad sB = \frac{b^2 k}{12\eta_2} A_2 \quad , \quad A_2 - A_1 = \left(\frac{12U(\eta_2 - \eta_1)}{b^2} - \gamma k^2 \right) B \quad (8.23)$$

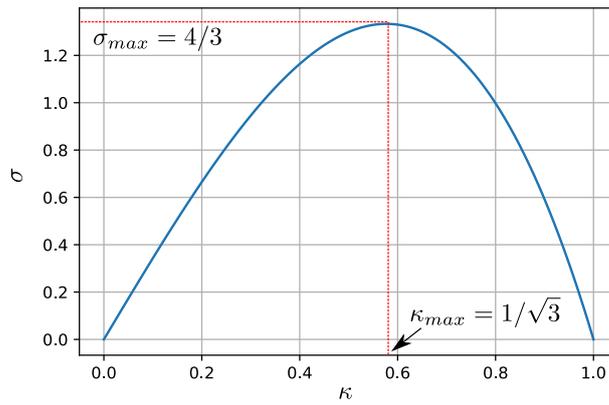


FIGURE 8.5 – Taux de croissance adimensionné σ de l'instabilité de Saffmann-Taylor en fonction du nombre d'onde adimensionné κ

Elimination de A_1 et A_2 donne la relation de dispersion

$$s = Uk \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right) - \frac{\gamma k^3 b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \quad (8.24)$$

L'instabilité requiert très clairement que $\eta_2 > \eta_1$: la viscosité du milieu 2 repoussée doit être inférieure que la viscosité du milieu 1. La tension de surface est stabilisante pour des petites longueurs d'ondes. Pour avoir une instabilité, il faut que

$$kl_v < 0 \quad \text{avec} \quad l_v = b \sqrt{\frac{\gamma}{12U(\eta_2 - \eta_1)}} \quad (8.25)$$

On peut récrire la relation de dispersion sous forme adimensionnée. On introduit $\kappa = kl_v$, nombre d'onde adimensionnée et σ taux de croissance adimensionnée, défini par

$$s = \frac{U^{3/2}(\eta_2 - \eta_1)^{3/2}}{\gamma^{1/2}(\eta_1 + \eta_2)b} \sigma \quad (8.26)$$

Ainsi

$$\sigma = 2\sqrt{3} \kappa(1 - \kappa^2) \quad (8.27)$$

Le maximum de taux de croissance est atteint en $\kappa_{max} = 1/\sqrt{3}$ pour une valeur de $\sigma_{max} = 4/3$ dans ces échelles.

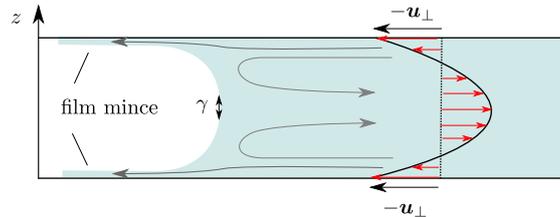


FIGURE 8.6 – L'écoulement dans la section fine $z \in [0, b]$ dévie d'un profil parabolique proche de l'interface. Un fin film de fluide visqueux est laissé derrière sur la surface des plaques. Ceci donne lieu a des corrections dans le modèle, qu'on peut prendre en compte.

8.3.4 Au delà

Correction de Park & Homsy

Une étude plus détaillée de ce qui se passe lorsqu'un fluide repousse un autre montre qu'une correction est nécessaire [Park]. Comme le suggère la figure 8.6, il se forme un film fin sur les interfaces et il existe une zone de transition entre le profil parabolique idéalisé et l'interface.

Doigt de Saffmann-Taylor

Même en régime non-linéaire, les écoulements dans des cellules de Hele-Shaw maintiennent la structure d'un écoulement potentiel. Ceci permet d'utiliser de l'analyse complexe pour aller chercher la forme ultérieure de l'interface, dans un régime très non-linéaire. Utilisant l'analyse complexe, Saffmann et Taylor ont réussi à trouver toute une famille de solutions du problème non-linéaire. En régime stationnaire, la forme de l'interface est

$$h = \frac{W(1-\lambda)}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi y}{\lambda W} \right) \right) \right) \quad (8.28)$$

Ici W est la largeur du canal et λ la largeur du doigt. Sans tension de surface il n'y a rien qui fixe la largeur du doigt.

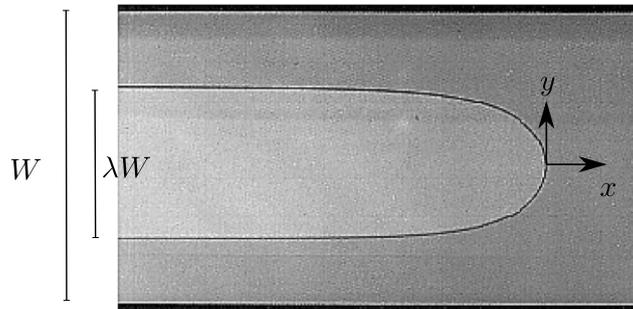


FIGURE 8.7 – Doigt de Saffmann-Taylor : exemple d'une solution non-linéaire qu'on peut obtenir via l'analyse complexe.

Tip-splitting

Le régime où le doigt de Saffmann-Taylor est observé est assez spécifique. Si on pousse le liquide plus fortement, l'influence stabilisant de la tension de surface baisse et il est possible que les doigts formés deviennent instables eux-mêmes et quasiment selon le même mécanisme qu'on vient d'étudier. On peut ressentir physiquement qu'il suffit que le rayon de courbure des petits doigts qui croissent devienne plus grand que l_v pour que la pointe du doigt se déstabilise de nouveau.

8.4 Exercice : digitation radiale

En figure 8.2-(b), le liquide peu visqueux entre par un petit orifice dans la cellule de Hele-Shaw. On suppose le débit injecté. Juste après l'orifice qu'on assimile avec l'origine d'un système de coordonnées cylindriques, l'écoulement U_i devient purement radial et axisymétrique. L'interface entre les deux liquides est un cercle de rayon $R(t)$ variable qui pourra devenir instable et changer de forme.

1. L'écoulement de base est purement radial. Montrer qu'un tel écoulement doit décroître comme r^{-1} pour être incompressible.
2. Calculer le débit (par section transverse) passant par un cercle de rayon r . Ce débit doit être égal à Q . Utiliser cette information pour exprimer U_i en fonction du temps et du débit Q .
3. Calculer la distribution de pression dans les deux liquides, utilisant la loi de Darcy en cellule de Hele-Shaw.
4. Calculer le rayon $R(t)$ de l'interface. A l'instant $t = 0$ on utilisera la condition initiale $R(0) = a$ le rayon du trou par lequel on injecte le liquide

5. On perturbe l'écoulement par u_i , la pression par p_i et l'interface par $r = R + h(\theta, t)$. Exprimer les équations linéarisées pour ces perturbations dans les deux liquides. Donner les conditions aux limites sur l'interface.
6. On suppose que la première déstabilisation a lieu suffisamment loin du centre et suffisamment loin des bords de la cellule (grand r). Proposer des conditions de régularité en $r = 0$ et $r \rightarrow +\infty$.
7. Est-ce qu'on peut proposer une solution exponentiellement croissante ?
8. Suite à la loi de Darcy, l'écoulement est potentiel dans les deux zones. Proposer une solution adéquate qui est régulière au centre et à l'infinie et qui dépend d'un nombre d'onde azimutale m entier. Ces potentiels dépendront de fonctions $A_1(t)$ et $A_2(t)$ inconnues.
9. Propose une déformation adéquate $h(\theta, t)$ de l'interface qui dépend d'une troisième fonction $B(t)$. Imposer les conditions aux limites à l'interface.
10. Éliminer $A_1(t)$ et $A_2(t)$ pour trouver une équation différentielle unique pour $B(t)$.
11. Faire un programme qui calcule numériquement l'amplitude équation dans le temps, pour des différentes valeurs de m . Comme condition initiale, on utilisera $B(0) = a \times 10^{-4}$. Utiliser ce programme pour tracer graphiquement l'évolution des amplitudes $B(t)$ pour les différents m .
12. Étudier le cas du ...

9. Instabilité de Faraday

9.1 Introduction

L'instabilité de Faraday est une instabilité classique qui a été beaucoup étudiée en laboratoire. Le montage expérimental est plutôt simple à réaliser : il suffit de mettre un réservoir de liquide à surface libre sur un pot vibrant. Si on oscille cet ensemble à la bonne fréquence, on s'aperçoit qu'une petite amplitude d'oscillation peut déjà provoquer des ondes d'amplitude considérable. La figure 9.1, montre un exemple d'une onde qui s'est formée par instabilité de Faraday à la surface d'un liquide dans un réservoir cylindrique (figure issue de 9.1).

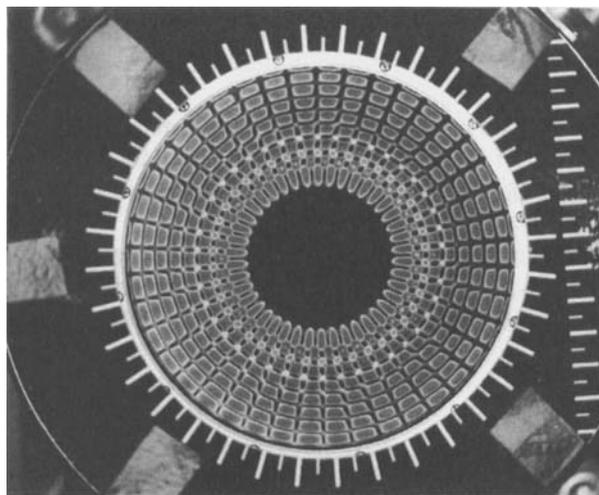


FIGURE 9.1 – Onde de surface déstabilisée par instabilité de Faraday sur une couche cylindrique de liquide issue de [edwards_fauve].

Il est tentant de penser que les ondes de Faraday apparaissent lorsque la fréquence d'oscillation du réservoir coïncide avec la fréquence naturelle d'une onde, qu'il s'agit d'un phénomène de forçage résonant. Par contre, cette vision est bien fautive. Même en oscillant le liquide, il est toujours admissible que la surface peut rester plate avec un fluide au repos. Les ondes apparaissent donc d'une toute autre manière, à travers une

instabilité. L'instabilité de Faraday est un exemple d'une résonance paramétrique d'ondes. Au lieu de forcer directement les ondes, l'oscillation du réservoir introduit un couplage déstabilisant entre paires d'ondes. On montrera ici que la déstabilisation d'une onde à fréquence naturelle ω se fait le plus efficacement si on secoue le réservoir à 2ω ?

Afin de caractériser quantitativement cette croissance des ondes et afin de délimiter les conditions nécessaire pour avoir une instabilité, on a besoin d'introduire de nouveaux outils mathématiques. Dans ce chapitre, on discutera l'analyse de Floquet qui permet d'étudier la stabilité d'état de bases périodiques en temps. On formulera également une théorie perturbative pour mieux comprendre la raison d'être de la fréquence 2ω . Ces techniques se transposent dans d'autres situations où des ondes interagissent faiblement entre eux et font partie des méthodes théoriques plus avancées qu'on utilise encore dans les laboratoires.

Dans le référentiel du réservoir, ce déplacement se manifeste par la présence d'une gravité effective qui est oscillante dans le temps. Pour certaines fréquences bien particulières, il est possible de déstabiliser des ondes de gravité qui vont spontanément apparaître et croître à des grandes amplitudes. dans laquelle des ondes

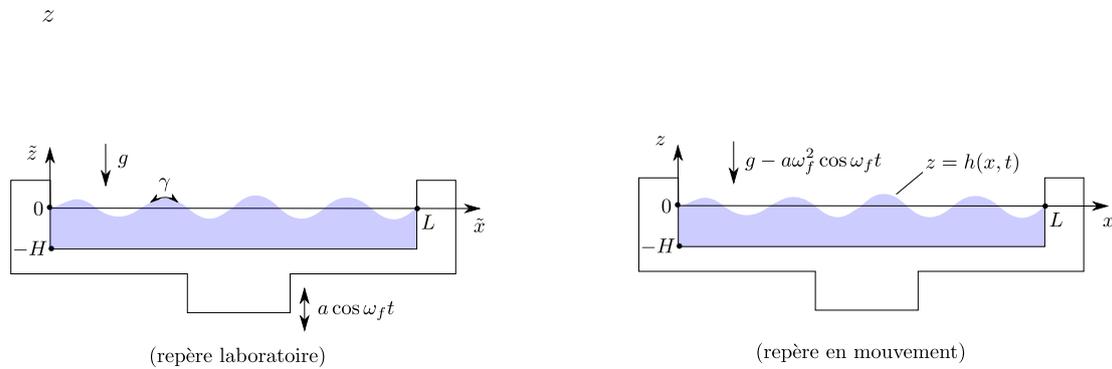


FIGURE 9.2 – Instabilité de Faraday. Un réservoir de liquide à surface libre est placé sur un pot vibrant. Des ondes de surface apparaissent spontanément à la surface au delà d'une certaine amplitude d'oscillation et pour certaines fréquences d'oscillation. On étudie l'instabilité dans le référentiel non-inertiel en mouvement, solidaire avec le pot vibrant. Dans ce référentiel, il existe une gravité apparente oscillatoire.

9.2 Analyse de stabilité linéaire

9.2.1 Etat de base

Comme le montre la figure 9.2, on étudie un réservoir rectangulaire de largeur L et de profondeur H , placé sur un pot vibrant. Le réservoir est rempli avec un liquide de densité ρ , soumis à la gravité g . La tension de surface vaut γ . Au dessus du liquide se trouve un gaz à pression p_0 , on modélise l'interface comme une surface libre. Le pot vibrant impose un mouvement vertical

$$z_{pot}(t) = a \cos(\omega_f t) \mathbf{e}_z \quad (9.1)$$

à l'ensemble. Ici on note a l'amplitude de l'élévation et ω_f est la fréquence de forçage. Pour étudier l'écoulement qui se produit, on se place dans le référentiel non-inertiel en mouvement avec le pot (référentiel sans tildes). Dans ce référentiel non-inertiel, l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \underbrace{\rho \ddot{z}_{pot} \mathbf{e}_z}_{\text{force fictive}} = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z \quad (9.2)$$

soit

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p - \underbrace{\rho (g - a \omega_f^2 \cos(\omega_f t))}_{g_{\text{eff}}(t)} \mathbf{e}_z \quad (9.3)$$

Le mouvement oscillatoire du référentiel se manifeste dans les équations à travers une gravité effective $g_{\text{eff}}(t)$ qui oscille dans le temps.

Maintenant que nous avons trouvé l'équation pour l'écoulement, il est clair que $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ est une solution de base avec une interface liquide-gaz horizontale en $z = 0$. Dans le référentiel non-inertiel, le liquide peut donc ne pas bouger et n'avoir aucune onde à sa surface. Il suffit que la pression de base P soit telle que

$$\partial_z P = -\rho(g - a\omega_f^2 \cos(\omega_f t)) \Rightarrow P = p_0 - \rho(g - a\omega_f^2 \cos(\omega_f t))z \quad (9.4)$$

Ici on a utilisé la condition limite $P|_{z=0} = p_0$.

9.2.2 Perturbations linéaires

On écrit les équations pour les perturbations linéaires également dans le repère en mouvement. En absence de viscosité, on a

$$\rho \partial_t \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (9.5)$$

L'écoulement sera de nouveau potentiel, $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Afin de rendre le système plus réaliste, on ajoute également les conditions aux limites sur les bord solides du réservoir qui doivent être imperméables :

$$u_x|_{x=0,L} = 0, \quad u_z|_{z=-H} = 0 \quad (9.6)$$

Sur la surface libre qu'on place en $z = h(x, t)$ on doit poser une condition cinématique et une condition dynamique. Ces conditions se dérivent exactement comme dans le traitement l'instabilité de Rayleigh-Taylor. On a

$$\partial_t h = u_z|_{z=0} \quad (9.7)$$

comme condition cinématique linéarisée et

$$-\rho(g - a\omega_f^2 \cos(\omega_f t))h + p|_{z=0} = -\gamma \partial_{xx}^2 h \quad (9.8)$$

comme condition dynamique linéarisée.

9.2.3 Solution (spatiale)

Un potentiel hydrodynamique ϕ admissible qui satisfait les conditions d'imperméabilité est de la forme

$$\phi = A(t) \cos(kx) \cosh(k(z + H)) \quad (9.9)$$

Ici $k = n\pi/L$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$, entier et positif. La perturbation de pression, compatible avec ce potentiel est donnée par $p = -\rho \partial_t \phi$, soit

$$p = -\rho \dot{A}(t) \cos(kx) \cosh(k(z + H)) \quad (9.10)$$

Une déformation de la surface compatible avec cette structure aura la forme

$$h = B(t) \cos(kx) \quad (9.11)$$

Si on exprime les conditions cinématiques et dynamiques, on obtient

$$\dot{B}(t) = kA(t) \sinh(kH) \quad (9.12a)$$

$$-\rho(g - a\omega_f^2 \cos(\omega_f t))B(t) - \rho \dot{A}(t) \cosh(kH) = \gamma k^2 B(t) \quad (9.12b)$$

Elimination de $A(t)$ donne une équation différentielle de second ordre pour l'amplitude $B(t)$ de l'onde.

$$\ddot{B}(t) + \left[\left((g - a\omega_f^2 \cos(\omega_f t))k + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh(kH) \right] B(t) = 0 \quad (9.13)$$

En absence de déplacement verticale, pour $a = 0$, on trouve un comportement attendu. L'équation différentielle $\ddot{B} + \omega^2 \dot{B} = 0$ suggère des solutions ondulatoires avec fréquence fixée par la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires en profondeur finie :

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh(kH)} \quad (9.14)$$

Ceci permet de récrire l'équation pour l'amplitude $B(t)$ dans un format plus court.

$$\partial_{tt}^2 B + \omega^2 (1 - \epsilon \cos(\omega_f t)) B = 0 \quad (9.15)$$

avec

$$\epsilon = \frac{a\omega_f^2}{g + \frac{\gamma k^2}{\rho}} \quad (9.16)$$

un paramètre sans dimension. Il est enfin commode d'introduire une variable de temps adimensionné. On choisit le plus fréquemment $\tau = \omega_f t/2$ comme temps adimensionné et cela donne le problème suivant.

★ **Instabilité de Faraday.** Utilisant une variable de temps adimensionnée, $\tau = \omega_f t/2$, l'amplitude $B(\tau)$ d'une onde gravito-capillaire est solution de

$$\partial_{\tau\tau}^2 B + \Omega^2 (1 - \epsilon \cos(2\tau)) B = 0 \quad (9.17)$$

Cette équation dépend de deux paramètres sans dimension

$$\Omega = \frac{2\omega}{\omega_f}, \quad \epsilon = \frac{a\omega_f^2}{g + \frac{\gamma k^2}{\rho}} \quad (9.18)$$

qui varient selon l'onde considérée. ■

Une onde est instable si son amplitude croit de manière non-bornée dans le temps. On peut mettre l'équation (9.17) sous la forme d'une équation de Mathieu :

$$\partial_{\tau\tau}^2 B + (p + 2q \cos 2\tau) B = 0 \quad \text{avec} \quad p = \Omega^2, \quad q = -\epsilon\Omega^2 \quad (9.19)$$

Cette équation a été très étudiée sous cette forme et on connaît bien la partie du plan des paramètres p et q dans laquelle existent des solutions croissantes. Par contre, il est instructif pour vous de montrer comment on obtient en pratique des solutions de ce type d'équation (9.17), d'abord exactement par analyse de Floquet, puis de manière approchée par une approche perturbative.

9.2.4 Analyse de Floquet

L'équation différentielle (9.17) est une équation différentielle linéaire à coefficients non-constants et périodiques (période $T = 2\pi/2 = \pi$). La théorie de Floquet permet de trouver une solution d'une équation différentielle à coefficients périodiques. On commence par récrire notre équation comme un système, par le processus de réduction d'ordre. On appelle

$$\mathbf{X}(\tau) = \begin{bmatrix} X_1(\tau) \\ X_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ \partial_\tau B \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

le vecteur d'état. Ses composantes X_1 et X_2 donne l'amplitude et la vitesse de la surface. L'équation de Mathieu est équivalent à

$$\partial_\tau \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2(1 - \epsilon \cos(2\tau)) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\tau)} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

un système linéaire instationnaire. Les solutions de ce système peuvent croître ou décroître et c'est la distinction entre les deux qui nous intéresse dans le problème de stabilité.

Rappelons quelques propriétés générales de ce type de système d'équations différentielle instationnaires (pour $\mathbf{A}(\tau)$ quelconques). On sait que la solution générale sera dans un espace vectoriel de solutions de dimension 2. Cela signifie qu'il existe une base de 2 solutions du problème, $\Psi_1(\tau)$ et $\Psi_2(\tau)$ qui permettent d'écrire la solution générale comme une superposition

$$\mathbf{X}(\tau) = C_1 \Psi_1(\tau) + C_2 \Psi_2(\tau) \quad (9.22)$$

Ces coefficients C_i dépendent uniquement de la condition initiale. Si on connaît deux solutions $\Psi_1(\tau)$ et $\Psi_2(\tau)$ linéairement indépendantes, on connaît donc la solution générale dans tous les cas. Pour trouver ces fonctions $\Psi_1(\tau)$ et $\Psi_2(\tau)$ dans le cas $\mathbf{A}(\tau)$ général, il suffit d'intégrer numériquement le système différentiel, partant de deux conditions initiales sympathiques (et linéairement indépendantes) :

$$\partial_\tau \Psi_1(\tau) = \mathbf{A}(\tau) \Psi_1(\tau) \quad , \quad CI : \Psi_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.23a)$$

et

$$\partial_\tau \Psi_2(\tau) = \mathbf{A}(\tau) \Psi_2(\tau) \quad , \quad CI : \Psi_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.23b)$$

Ceci est équivalent à trouver une fonction matricielle $\mathbf{M}(\tau)$ (2 x 2), solution du problème

$$\partial_\tau \mathbf{M}(\tau) = \mathbf{A}(\tau) \mathbf{M}(\tau) \quad , \quad CI : \mathbf{M}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

Les colonnes de $\mathbf{M}(\tau)$ seront les fonctions $\Psi_i(\tau)$. On appelle $\mathbf{M}(\tau)$ matrice de système fondamental de solutions. Numériquement, ceci ne pose aucun problème et on a donc toujours accès aux fonctions $\Psi_i(\tau)$ quelque soit $\mathbf{A}(\tau)$. Leur croissance temporelle caractérise la stabilité du problème. Il suffit que l'une des deux fonctions $\Psi_i(\tau)$ croît indéfiniment en magnitude pour avoir un système instable.

Dans la théorie de Floquet, on exploite le côté périodique de la matrice $\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau + T)$. Suite à cette périodicité, on montre que les fonctions $\Psi_i(\tau)$ sont nécessairement de la forme

$$\Psi_i(\tau) = \Phi_i(\tau) e^{\sigma_i \tau} \quad \text{avec} \quad \Phi_i(\tau) = \Phi_i(\tau + T) \quad (9.25)$$

c'est à dire, composées d'une fonction T -périodique et d'un facteur exponentiel. Les exposants $\sigma_i \in \mathbb{C}$ sont les exposants de Floquet et on les calcule comme

$$\sigma_i = T^{-1} \ln(\lambda_i) \quad (9.26)$$

avec λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice de monodromie $\mathbf{M}(T) = [\Psi_1(T) | \Psi_2(T)]$. Cette matrice est celle qu'on obtient en mettant sur les colonnes les solutions $\Psi_1(T)$ et $\Psi_2(T)$ temps T . Mettre en place une analyse de stabilité de Floquet, se fait donc suivants les pas précis

1. Mettre l'équation différentielle sous la forme d'un système d'ordre 1, comme en (9.21).
2. Intégrer numériquement les systèmes (9.23) ou son équivalent matriciel (9.24) pour $\tau \in [0, T]$, pour trouver la matrice $\mathbf{M}(T)$ de monodromie.
3. Calculer les valeurs propres λ_i de cette matrice
4. Définir les exposants de Floquet μ_i avec la formule (9.26)

Pour qu'un système soit instable, il faut au moins un exposant avec $Re(\sigma_i) > 0$. Ceci est équivalent à avoir au moins une valeurs propre λ_i plus grande que 1 en magnitude. Il est encore utile de préciser que les exposants de Floquet sont non-uniques. Suite à la périodicité de la fonction $\Phi_i(\tau)$, une valeur d'un exposant σ_i donne lieu à une infinité de valeurs

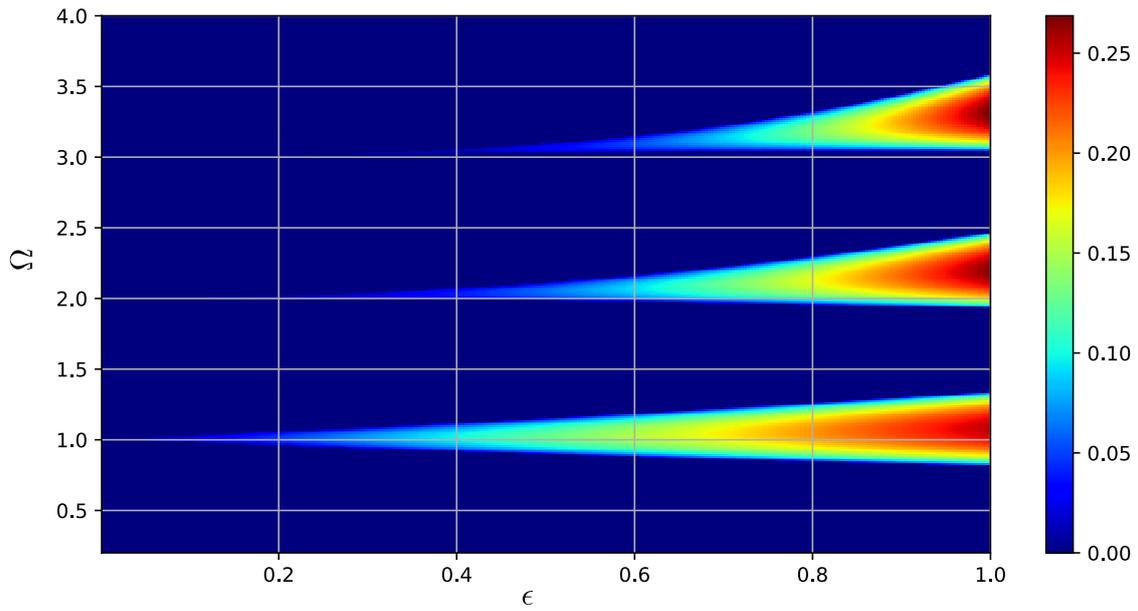
$$\sigma_i + i \frac{2\pi m}{T} \quad , \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9.27)$$

La partie imaginaire de σ_i n'est donc pas unique, mais la partie réelle l'est bien et c'est elle qui détermine la stabilité du problème.

Il n'est pas si difficile d'encoder le calcul des exposants de Floquet pour notre équation (9.17) qui contrôle l'amplitude des ondes de Faraday. Ceci est fait dans le notebook Jupyter `Floquet.ipynb`. Dans ce notebook, on calcule ces exposants sur tout un maillage de 300×300 points dans le domaine de paramètres $(\epsilon, \Omega) \in [0, 1] \times [0.2, 4]$. Le résultat est la figure 9.3 qui montre le taux de croissance en code couleur.

On observe des langues de résonance proche des fréquences

$$\Omega \approx 1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad \text{ou} \quad 3 \quad \text{ou} \quad \dots \quad (9.28)$$



(a)

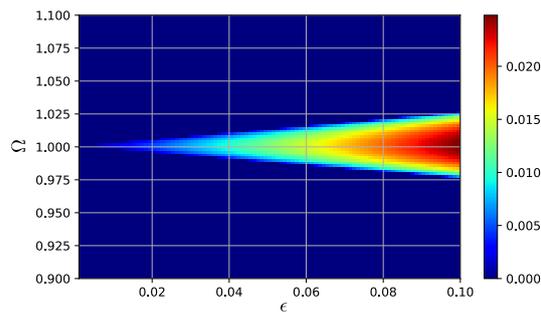
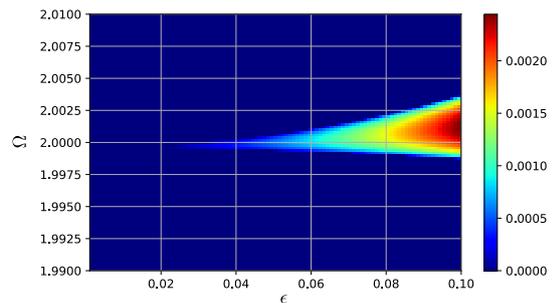
(b) Zoom première résonance $\Omega = 1 + O(\epsilon)$ (c) Zoom Première résonance $\Omega = 2 + O(\epsilon^2)$

FIGURE 9.3 – (a) Taux de croissance σ ou exposant de Floquet de l'équation de Mathieu (9.17) dans le plan $\epsilon - \Omega$. (b-c) Zoom sur les premières et deuxième branches au voisinage de $\Omega = 1, 2$ et à petit $\epsilon \ll 1$. Le taux de croissance de la première résonance est bien plus grande et la langue de résonance est bien moins fine.

Plus que ϵ est large, plus qu'on peut dévier de ces valeurs et maintenir un taux de croissance positif. Par contre, il semble que les taux de croissance sont bien plus faibles avec des Ω plus grand, surtout à petit ϵ . Ceci est encore mieux visible sur les zooms de la figure 9.4.

Retournant vers le monde dimensionné, on se rend compte que la fréquence de forçage doit donc être proche de

$$\omega_f \approx 2\omega \text{ ou } \omega \text{ ou } 2\omega/3 \text{ ou } \dots \quad (9.29)$$

pour déstabiliser une onde à fréquence naturelle ω . Si on veut exciter la première résonance, $\omega_f \approx 2\omega$ veut donc dire le pot vibrant doit osciller à une fréquence proche de deux fois la fréquence naturelle d'une onde de gravité, pour espérer déstabiliser cette onde de gravité. Pour comprendre la raison d'être de cela, il est instructif de trouver une solution approchée de l'équation (9.17), valable dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

9.2.5 Taux de croissance dans la limite $\epsilon \ll 1$: méthode perturbative

On cherche à trouver une solution approchée de l'équation différentielle adimensionnée

$$\partial_{\tau\tau}^2 B + \Omega^2(1 - \epsilon \cos(2\tau)) B = 0 \quad (9.30)$$

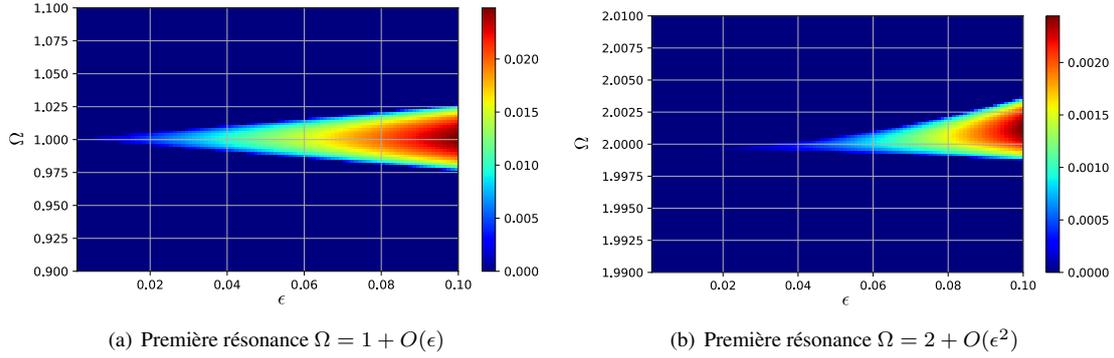


FIGURE 9.4 – Taux de croissance σ ou exposant de Floquet de l'équation de Mathieu (9.17). Zoom sur les premières et deuxième branches au voisinage de $\Omega = 1, 2$. A petit $\epsilon \ll 1$, le taux de croissance de la première résonance est bien plus grande et la langue bien moins fine.

dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Tout analyse perturbative commence par la solution non-perturbée. En absence de vibration verticale, pour $\epsilon = 0$, la solution du problème est tout simplement

$$\epsilon = 0 : B(\tau) = C_+ e^{i\Omega\tau} + C_- e^{-i\Omega\tau} \quad (9.31)$$

On retrouve les ondes libres, marginalement stables avec fréquences $\pm\Omega$. Dans ce qui suit, on étudie comment cette solution est légèrement perturbée par $\epsilon \ll 1$ et on sait déjà, qu'il faut que $\Omega \approx 1, 2, 3, \dots$ pour permettre une instabilité.

Première résonance : $\Omega \approx 1$

On s'intéresse à la première résonance $\Omega \approx 1$. Supposant $\epsilon \ll 1$, on admet que

$$\Omega = 1 + \delta = 1 + \epsilon\tilde{\delta} \quad (9.32)$$

La fréquence naturelle s'écarte un peu de 1 et on peut toujours supposer que ce δ est connu (après tout, on connaît ω et ω_f dans le problème). On le réécrit comme $\epsilon\tilde{\delta}$ avec $\tilde{\delta} = O(1)$ pour spécifier que cet écart est du même ordre que le terme déstabilisant dans l'équation différentielle. On appelle δ le detuning en fréquence ou écart à la résonance parfaite. Si $\delta = 0$, on dit que la résonance est parfaite. Dans l'approche perturbative, on propose la solution suivante à l'équation (9.30)

$$\epsilon \ll 1 : B(\tau) = \underbrace{(C_+ e^{i\tau} + C_- e^{-i\tau} + \epsilon D(\tau))}_{2\pi\text{-périodique}} e^{\epsilon\tilde{\delta}\tau} \quad (9.33)$$

Cette solution préserve la structure générale de la solution de Floquet (facteur périodique \times facteur exponentiel) et reste proche de la solution non-perturbée. On y admet une petite modification $\epsilon D(\tau)$ avec $D(\tau)$ une fonction qui contiendra des fréquences autres que ± 1 et qui sera précisée dans la suite. Le taux de croissance

$$\sigma = \epsilon\tilde{\sigma} \quad (9.34)$$

est supposé faible, d'ordre ϵ et comme avec δ on le réécrit avec ce $\tilde{\sigma} = O(1)$ pour faire apparaître explicitement cette petitesse. La solution se présente donc comme un paquet de modes croissant (ou décroissant). On propose cette solution à l'équation, c'est à dire, on exige

$$\left[\partial_{\tau\tau}^2 + (1 + \epsilon\tilde{\delta})^2 (1 - \epsilon \cos(2\tau)) \right] (C_+ e^{i\tau} + C_- e^{-i\tau} + \epsilon D(\tau)) e^{\epsilon\tilde{\sigma}\tau} = O(\epsilon^2) \quad (9.35)$$

Au lieu de 0, on place $O(\epsilon^2)$ dans le membre de droite car la solution approchée ne sera que correcte jusqu'à l'ordre ϵ . Avant d'évaluer les différents termes de l'équation, on regarde l'effet du terme $\epsilon \cos(2\tau)$ déstabilisant qui était ignoré dans le modèle non-perturbé.

$$\epsilon \cos(2\tau) (C_+ e^{i\tau} + C_- e^{-i\tau}) = \frac{\epsilon}{2} \left(C_+ e^{i3\tau} + \underbrace{C_+ e^{-i\tau} + C_- e^{i\tau}}_{\text{termes résonants}} + C_- e^{-3i\tau} \right) \quad (9.36)$$

Les termes soulignés sont appelés "termes résonants" car ils ont la même dépendance temporelle, $\sim e^{\pm i\tau}$ que les parties dominantes de la solution ($C_{\pm}e^{\pm i\tau}$). A travers le terme $\epsilon \cos(2\tau)$, les ondes à fréquence ± 1 génèrent des termes avec d'autres fréquences

$$\begin{aligned} \text{onde } +1 & \xrightarrow{\text{force à travers } \epsilon \cos(2\tau)} \text{onde } -1 \quad (\text{et } +3) \\ \text{onde } -1 & \xrightarrow{\text{force à travers } \epsilon \cos(2\tau)} \text{onde } +1 \quad (\text{et } -3) \end{aligned}$$

Les fréquences ± 3 qui sont générées sont moins importantes. Ce qui est important de constater est qu'un paquet d'ondes contenant les fréquences ± 1 interagit avec lui même à travers ce couplage. On dit qu'il y a résonance à l'ordre ϵ . Physiquement, ceci signifie que si on oscille le réservoir à la bonne fréquence, on couple les ondes gravito-capillaires par pair et c'est ce couplage qui est potentiellement déstabilisant. Le taux de croissance de l'instabilité sera d'ordre ϵ . Ayant remarqué ceci, on développe (9.35) en ordres de ϵ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{(i^2 + 1)}_{=0} C_+ e^{i\tau} + \underbrace{((-i)^2 + 1)}_{=0} C_- e^{-i\tau} \\ & + \epsilon \left[\left(2(i\tilde{\sigma} + \tilde{\delta})C_+ - \frac{1}{2}C_- \right) e^{i\tau} + \left(2(-i\tilde{\sigma} + \tilde{\delta})C_- - \frac{1}{2}C_+ \right) e^{-i\tau} \right] \\ & + \epsilon \left[(\partial_{\tau\tau}^2 + 1)D - \frac{1}{2}C_+ e^{3i\tau} - \frac{1}{2}C_- e^{-3i\tau} \right] + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (9.37)$$

Les fonctions $e^{\pm i\tau}$, $e^{\pm 3i\tau}$ étant linéairement indépendantes, on déduit plein d'information de cette équation. Premièrement, la fonction $D(\tau)$ peut être calculée comme la solution particulière de

$$(\partial_{\tau\tau}^2 + 1)D = \frac{1}{2}C_+ e^{3i\tau} + \frac{1}{2}C_- e^{-3i\tau} \quad (9.38)$$

Clairement $D(\tau)$ est là uniquement pour absorber les dépendances temporelles à fréquence ± 3 . Plus important est le fait qu'on doit aussi avoir

$$\begin{aligned} 2(i\tilde{\sigma} + \tilde{\delta})C_+ - \frac{1}{2}C_- &= 0 \\ -\frac{1}{2}C_+ + 2(-i\tilde{\sigma} + \tilde{\delta})C_- &= 0 \end{aligned} \quad (9.39)$$

Ce système linéaire algébrique homogène a des solutions non-triviales, uniquement si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule, c.a.d. si

$$4(i\tilde{\sigma} + \tilde{\delta})(-i\tilde{\sigma} + \tilde{\delta}) - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\delta}^2 = \frac{1}{16} \quad (9.40)$$

Ainsi, on trouve ici une formule approchée pour le taux de croissance de l'instabilité de Faraday, valable dans la limite $\epsilon \ll 1$

$$\sigma = \epsilon\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{16} - \delta^2} \quad (9.41)$$

A la résonance parfaite, pour $\delta = 0$, ce taux de croissance est maximal et il vaut $\epsilon/4$. Tout écart δ de la résonance parfaite abaisse le taux de croissance et définit un seuil en ϵ . On a

$$\epsilon_c = 4\delta = 4(\Omega - 1) \quad (9.42)$$

Sur la figure 9.5, on montre le taux de croissance $\sigma = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{16} - (\Omega - 1)^2}$ calculé par cette approche, pour la première résonance en échelle de couleur. Cette figure peut directement être comparée aux figures 9.3 et 9.4-(a), issues de l'analyse de Floquet. Notre modèle perturbatif reproduit très bien la première langue de résonance autour de $\Omega \approx 1$. Les différences entre l'analyse de Floquet exacte et le modèle approché deviennent visibles à grand ϵ . Ceci n'est pas une surprise : le modèle perturbatif a été construit sur l'hypothèse que $\epsilon \ll 1$ et on doit se mettre dans cette limite pour appliquer la formule approximative.

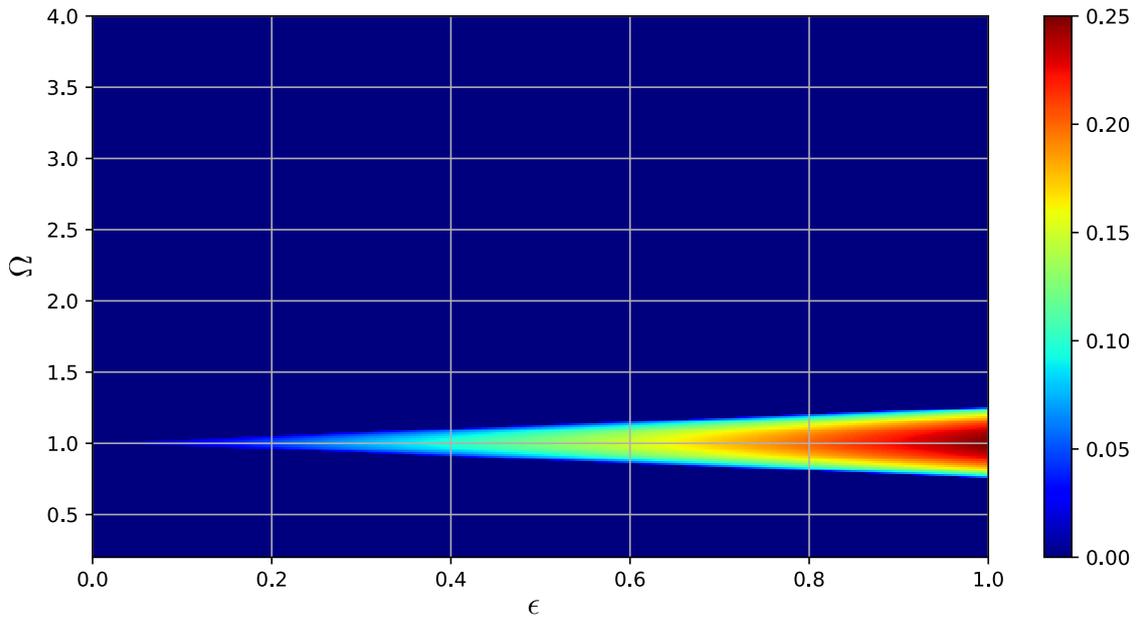


FIGURE 9.5 – Taux de croissance $\sigma = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{16} - (\Omega - 1)^2}$ de la première résonance $\Omega \approx 1$ de l’instabilité de Faraday selon la théorie perturbative.

Autres résonances : $\Omega \approx 2, 3, \dots$

Il est possible de construire un modèle similaire pour les autres langues de résonance, mais le taux de croissance des autres résonances sera toujours bien plus faible dans la limite $\epsilon \ll 1$, comme nous l’avons trouvé dans l’analyse de Floquet, figure 9.4. Pour comprendre ceci, regardons la seconde résonance avec $\Omega \approx 2$. Sans perturbation, la fréquence naturelle des ondes sera donc ± 2 . Le facteur qui cause des couplages entre ondes reste toujours de la forme $\epsilon \cos(2\tau)$ et on peut ici imaginer un schéma d’interaction différent

$$\begin{array}{l}
 \text{onde } +2 \xrightarrow{\text{force à travers } \epsilon \cos(2\tau)} \text{ondes } 0, +4 \xrightarrow{\text{force à travers } \epsilon \cos(2\tau)} \text{ondes } -2, +2, (\text{et } +6) \\
 \text{onde } -2 \xrightarrow{\text{force à travers } \epsilon \cos(2\tau)} \text{ondes } 0, -4 \xrightarrow{\text{force à travers } \epsilon \cos(2\tau)} \text{ondes } 2, -2, (\text{et } -6)
 \end{array}$$

Une paire d’ondes à fréquences ± 2 peut, à travers le couplage $\epsilon \cos(2\tau)$ agir sur elle-même, mais seulement au bout de deux étapes d’interaction. Ceci indique que le taux de croissance de la résonance autour de $\Omega \approx 2$ sera d’ordre ϵ^2 , c.a.d.

$$\sigma = \epsilon^2 \hat{\sigma} \tag{9.43}$$

Dans la limite $\epsilon \ll 1$, le taux de croissance de la seconde résonance sera donc bien plus faible que celui de la première résonance et cela est bien visible dans la légende des couleurs de la figure 9.4-(b), comparé à celle pour (a). Comme pour la première résonance, on peut admettre un petit décalage en fréquence naturelle du même ordre

$$\Omega = 2 + \delta = 2 + \epsilon^2 \hat{\delta} \tag{9.44}$$

A faible $\epsilon \ll 1$, ceci a pour conséquence que la langue de résonance de la deuxième résonance sera bien plus fine. Ceci est également bien visible dans la figure 9.4 : il suffit de comparer les graduations de l’axe Ω dans les panneaux (a) et (b). Techniquement, il convient pour la deuxième résonance de proposer la solution approchée sous la forme

$$\epsilon \ll 1 : B(\tau) = \underbrace{(C_+ e^{i2\tau} + C_- e^{-i2\tau} + \epsilon D(\tau) + \epsilon^2 E(\tau))}_{\pi\text{-périodique}} e^{\epsilon^2 \hat{\sigma} t} \tag{9.45}$$

Si on injecte cette proposition de solution dans l’équation (9.30), on trouvera à l’ordre ϵ , une équation qui détermine $D(\tau)$ composé de fréquences $0, \pm 4$. Ce $D(\tau)$ apparaitra dans les équations à l’ordre ϵ^2 et y mène

vers un système algébrique homogène pour les coefficients C_{\pm} qui mène ensuite à la valeur de $\hat{\sigma}$. On ne fera pas ce calcul complet ici. Le plus important est de retenir que la première résonance sera largement la plus instable dans la limite $\epsilon \ll 1$.

9.2.6 Diagramme de stabilité avec plusieurs ondes

Dans les deux sections précédentes nous avons étudié les propriétés de l'équation (9.17) pour l'amplitude B d'une onde. En réalité, il existe toujours plusieurs ondes car le nombre d'onde k et la fréquence naturelle peut encore varier. Toutes ces ondes peuvent devenir instable et il utile de construire un diagramme de phase pour savoir quand une onde en particulière se déstabilise et à quel taux. Pour cela, il faut revenir en arrière et récrire nos résultats en une version dimensionné. On focalise uniquement sur la première résonance et on suppose donc que $\epsilon \ll 1$ est satisfaite.

Selon le modèle perturbatif, le taux de croissance adimensionné est

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{\epsilon^2}{16} - (\Omega - 1)^2} \quad (9.46)$$

et l'onde aura une fréquence 1. Ce taux et cette fréquence adimensionnée était exprimée en unités $\omega_f/2$. Si on revient vers le monde dimensionné ou l'amplitude de l'onde $B(t) = e^{st}$ alors on trouve ici

$$s \approx i\frac{\omega_f}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{16} - (\Omega - 1)^2}\frac{\omega_f}{2} \quad (9.47)$$

Si on remplace ϵ et Ω par leur définitions, on obtient une formule plus explicite

$$s \approx i\frac{\omega_f}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\omega_f^4}{16(g + \frac{\gamma k^2}{\rho})^2} - (2\omega - \omega_f)^2} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh(kH)} \quad (9.48)$$

qui peut être utilisé pour calculer le taux de croissance de n'importe quel onde. Il suffit de fournir les paramètres physiques g, γ , la hauteur du liquide H , l'amplitude a et la fréquence d'oscillation ω_f . A cause de l'étendue spatiale finie selon x , seul les nombres d'ondes $k = k_n = n\pi/L$ sont admises, avec donc des fréquences naturelles $\omega_n = \omega(k_n)$ bien précises. On s'attend donc à l'instabilité de Faraday, à chaque fois ω_n atteint le voisinage de $\omega_f/2$. Il peut être utile que vous tentez vous-même de construire diagramme de stabilité, qui montre le taux de croissance σ en fonction de ω_f pour un système eau -air, et un réservoir d'une taille H, L fixe.

Il est enfin intéressant de remarquer que la formule (9.48) permet de constater que loin des conditions de résonance, si $-(2\omega - \omega_f)^2$ est très grand par rapport au terme $\sim a^2$ sous la racine, on retrouve les fréquences des ondes $i\omega$ qui seront marginalement stables :

$$\text{Loin de la résonance : } s \approx i\frac{\omega_f}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(2\omega - \omega_f)^2} = i\omega \quad (9.49)$$

Le phénomène de résonance paramétrique affecte donc uniquement les ondes résonantes qui ont une fréquence naturelle ω dans un voisinage d'ordre $\epsilon\omega_f/2$ de $\omega_f/2$. Les autres ondes ne sont pas ou très peu par le mouvement du réservoir influencées.

9.3 Au dela

9.3.1 Effet de la viscosité

La viscosité atténue faiblement les ondes de gravité. Cette dissipation visqueuse est le résultat des forts gradients de vitesse qui existent dans les couches limites de taille

$$\delta_v = \sqrt{\nu/\omega} \quad (9.50)$$

proche des parois solides. Dans la limite d'une viscosité faible, il est possible de calculer assez précisément la dissipation provoquée par ces couches. Ici, l'expression de cette dissipation n'est pas essentielle et on se contente de savoir qu'il existe une formule pour la dissipation visqueuse de toutes les ondes. On la note

$$\alpha_v \quad (9.51)$$

En absence de couplage, pour $\epsilon = 0$, l'amplitude d'une onde B décroît comme $e^{-\alpha_v t}$. Pour incorporer la viscosité dans la théorie de l'instabilité de Faraday, il suffit de modifier l'équation différentielle en

$$\partial_{tt}^2 B + 2\alpha_v \partial_t B + \omega^2 (1 - \epsilon \cos(\omega_f t)) B = 0 \quad (9.52)$$

et de trouver les solutions de cette équation. Dans la théorie perturbative, la formule pour le taux de croissance devient simplement

$$s = -\alpha_v \quad (9.53)$$

9.3.2 Evolution non-linéaire

Des ondes interagissent non-linéairement, etc. triades. = résonances param.

Motifs.

A grand forçage, on a gouttelettes qui se détachent.

Gouttes marchants de Couder.

9.3.3 Autres résonances paramétriques

Skateboard dans la rampe

La balançoire, debout 2 omega ou assis 1 omega

Résonances triadiques, quartiques

Instabilité elliptique, marées

Résonances fluide- structure : oscillations paroi élastique et et chinese bowl

Stabilisation paramétrique.

9.4 Exercices

9.4.1 Botafumeiro

Le botafumeiro est un encensoir de grande taille qu'on balance dans de nombreux églises espagnoles lors de grandes fêtes. On l'attache à une longue corde et on le fait bouger comme une pendule. Afin d'amplifier le mouvement, on varie périodiquement la distance entre le point d'attache et l'encensoir,

$$l(t) = l_0(1 + \epsilon \cos \omega_f t) \quad (9.54)$$

Cela se fait en tirant sur la corde à la bonne fréquence ω_f . Pouvez vous trouver prédire la fréquence d'oscillation et le taux de croissance de l'instabilité d'un Botafumeiro avec $l = 15 m$?

9.4.2 Stabilisation paramétrique d'un pendule

Le point d'équilibre instable d'une pendule de longueur l peut être rendu stable en oscillant verticalement le point d'attache à la bonne fréquence. On note a est l'amplitude de l'oscillation et ω_f la fréquence. Sous quelles conditions peut-on rendre cet équilibre du haut stable ? Utiliser la théorie de Floquet pour trouver une réponse.

9.4.3 Stabilisation paramétrique de Rayleigh-Taylor

L'exercice précédent laisse penser qu'il est peut être possible de stabiliser l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec une oscillation bien choisi. On considère donc le cas ou la gravité g serait de direction opposée dans la figure 9.2. Utiliser la théorie de Floquet pour savoir dans quelle condition il y a une possibilité de stabiliser par un tel forçage.

10. Instabilités des écoulements parallèles

10.1 Introduction

Un écoulement parallèle est unidirectionnel et invariant dans cette direction. Si l'écoulement est en plus stationnaire, on peut le définir comme

$$\mathbf{U} = U(z)\mathbf{e}_x \quad (10.1)$$

avec $U(z)$ un fonction arbitraire. Tous les écoulements parallèles ont la propriété $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et ainsi, n'importe quel écoulement parallèle sera solution de l'équation d'Euler, à pression constante. L'écoulement de Kelvin-Helmholtz est un exemple d'un écoulement parallèle et d'autres exemples fameux sont

$$\mathbf{U} = U\left(1 - \frac{z}{H}\right)\mathbf{e}_x \quad (\text{Poiseuille}) \quad , \quad \mathbf{U} = U\left(\frac{z}{H}\right)\mathbf{e}_x \quad (\text{Couette}) \quad (10.2)$$

A coté de ces écoulements "académiques", on trouve de nombreux écoulements presque parallèles dans des applications réalistes. Exemple, proche de la paroi d'une aile ou autre surface solide, il se forme des écoulements de couche limite qui localement sont presque parallèles.

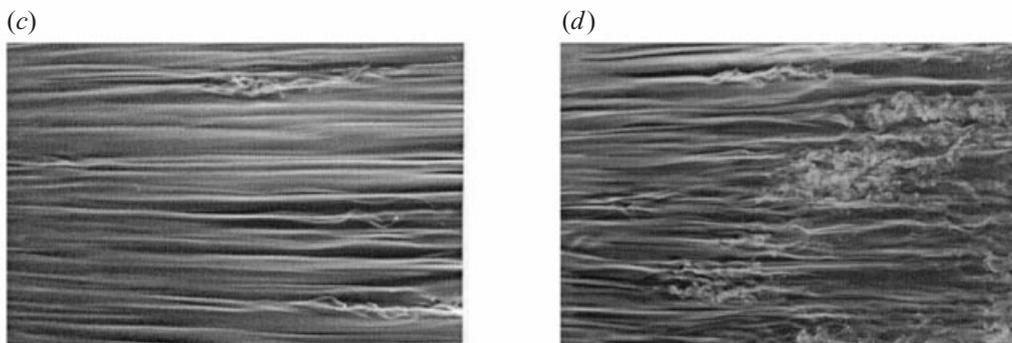


FIGURE 10.1 – Visualisation par au dessus et par stries de fumées de la transition à la turbulence dans un écoulement de couche limite, issue de [16].

Les instabilités hydrodynamiques de ces couches limites initient une transition à la turbulence et c'est bien cette turbulence qui augmente fortement la force de traînée qui agit sur l'obstacle. La simplicité de l'état

de base parallèle et aussi les applications nombreuses ont poussé de très nombreux chercheurs à étudier la stabilité de ces écoulements parallèles. La figure 10.1 montre un exemple d'une visualisation expérimentale d'un écoulement dans une couche limite qui transite à la turbulence, issue de [16].

Pour étudier la stabilité d'un écoulement parallèle on dispose de plusieurs méthodes. L'analyse de stabilité linéaire, comme on l'a vu dans les chapitres précédents est l'approche la plus classique. Grâce à l'invariance de l'état de base en 2 directions d'espace, on peut notamment chercher des perturbations sous la forme

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v}(z)e^{ik_x x} e^{ik_y y} \quad (10.3)$$

et il ne reste donc qu'une direction plus complexe, ici z , à traiter. C'est cette réduction à un problème de stabilité 1D, qui explique pourquoi de nombreux études de stabilité linéaire ont été faites sur les écoulements parallèles, cf. le livre de [10]. Dans ce chapitre, on revisite quelques résultats classiques issus de cette analyse de stabilité linéaire (théorème de Squire, équation de Rayleigh, critère du point d'inflexion, équation d'Orr-Sommerfeld) sans aller dans un très grand détail. Malgré la relative simplicité du problème de stabilité, on doit souvent utiliser un ordinateur pour résoudre le problème aux valeurs propres. Sortir des idées physiques claires de ces analyses de stabilité est difficile. On montrera un exemple de comment une telle analyse de stabilité numérique peut être menée. On montrera que la stabilité de l'écoulement de Poiseuille dépend assez subtilement de la viscosité.

La confrontation à la réalité expérimentale montre qu'il existe de nombreux écoulements parallèles dont les propriétés de stabilité sont plutôt étonnantes.

1. Selon l'équation de Orr-Sommerfeld, un écoulement de Couette est toujours linéairement stable quelque soit le nombre de Reynolds. Pourtant il devient turbulent dans les expériences.
2. Pareil pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille (pipe flow) étudié par Reynolds lui-même. Jamais instable selon la théorie linéaire, mais turbulent quand-même au delà d'un certain Reynolds.
3. L'écoulement de Poiseuille et la plupart des écoulements de couche limite deviennent instables et turbulents bien avant le seuil de Reynolds prédit par l'analyse de stabilité linéaire. Pourquoi ?

Ces observations suggèrent que l'analyse de stabilité linéaire présente quelques défauts. Il ne suffit pas d'étudier la croissance temporelle de perturbations infinitésimales, il faut aussi regarder la croissance de perturbations de magnitude finie. On parle de la transition sous-critique et Reynolds n'avait sûrement pas imaginé que l'explication de la turbulence dans son expérience allait être si complexe. Dans tout cas, ces observations ont motivés le développement de nouvelles méthodes pour étudier la stabilité et on termine notre présentation là dessus, par une brève discussion de ces analyses de stabilité non-modales et non-linéaires.

10.2 Stabilité linéaire non-visqueuse

Certains écoulements parallèles sont instables non-visqueusement. On pense notamment à l'écoulement de Kelvin-Helmholtz mais que peut-on dire pour les autres profils $U(z)$ généraux et admissibles selon l'équation d'Euler ?

10.2.1 Etat de base et perturbations non-visqueuses

Dans un fluide incompressible, l'équation d'Euler peut être écrite sous la forme

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\rho^{-1} \nabla p \quad (10.4)$$

Tout écoulement parallèle stationnaire de la forme

$$\mathbf{U} = U(z) \mathbf{e}_x \quad (10.5)$$

est solution de l'équation d'Euler car

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = U(z) \partial_x U(z) \mathbf{e}_x = \mathbf{0} \quad (10.6)$$

La pression de base P sera constante. Ces écoulements parallèles peuvent avoir lieu entre des parois planes placées en $z = 0$ et $z = H$.

Dans une analyse de stabilité linéaire, on perturbe l'écoulement parallèle par $U + u$ et la pression par $P + p$. Les équations linéarisées pour les perturbations sont

$$\partial_t u_x + U \partial_x u_x + u_z \partial_z U = -\rho^{-1} \partial_x p \quad (10.7a)$$

$$\partial_t u_y + U \partial_x u_y = -\rho^{-1} \partial_y p \quad (10.7b)$$

$$\partial_t u_z + U \partial_x u_z = -\rho^{-1} \partial_z p \quad (10.7c)$$

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0 \quad (10.7d)$$

Sur les parois rigides $z = 0, H$ qui bornent l'écoulement, on doit supposer l'imperméabilité

$$CL : u_z|_{z=0, H} = 0 \quad (10.8)$$

Suite à l'invariance de l'état de base dans les directions x et y , il est possible de proposer des solutions modales

$$[u_x, u_y, u_z, p/\rho] = [v_x(z), v_y(z), v_z(z), q(z)] e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{st} \quad (10.9)$$

Cette solution dépend de deux nombres d'ondes réels : $k_x, k_y \in \mathbb{R}$ et le taux de croissance $s \in \mathbb{C}$ comme d'habitude dans une analyse de stabilité temporelle. Si on injecte cette proposition de solution dans le système d'équations alors on obtient un problème aux valeurs propres. Trouver l'ensemble des valeurs propres s tel que

$$(s + ik_x U) v_x + U' v_z = -ik_x q \quad (10.10a)$$

$$(s + ik_x U) v_y = -ik_y q \quad (10.10b)$$

$$(s + ik_x U) v_z = -\partial_z q \quad (10.10c)$$

$$ik_x v_x + ik_y v_y + \partial_z v_z = 0 \quad (10.10d)$$

est satisfaite avec

$$v_z|_{z=0, H} = 0 \quad (10.10e)$$

On note $U' = \partial_z U$ dans la suite. On cherche donc une relation de dispersion, qui prendra la forme abstraite

$$D(k_x, k_y, s) = 0 \quad (10.11)$$

et qui sera différent pour chaque écoulement de base $U(z)$. Les valeurs propres avec s discret ne sont en général pas infini en nombre. Il peut y exister un spectre continu, associé à la singularité dans les équation aux endroits $z = z_c$ où $s + ik_x U(z_c) = 0$.

10.2.2 Transformation et théorème de Squire

Le problème de stabilité linéaire (10.10) reste malgré tout assez difficile à résoudre avec un profil $U(z)$ arbitraire. Par contre, on peut grâce à la transformation de Squire (1933) [squire1933] enlever au moins un paramètre. On peut montrer que les modes à $k_y = 0$, donc invariants selon y sont toujours les plus instables. Les modes à $k_y \neq 0$ peuvent toujours être construites à partir des solutions pour $k_y = 0$.

Pour comprendre ce théorème est cette transformation de Squire, commencez par regarder la figure 10.2-(a). Cette figure montre ce à quoi on peut s'attendre si on visualise une composante de vitesse ou la pression dans un plan $z = Cst$ arbitraire à un instant t arbitraire .

Avec $k_x > 0$ et $k_y > 0$, on voit des structures ondulatoires inclinés par un angle α par rapport à la direction x . Ces ondes varient donc dans une seule direction

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y = \tilde{k} \tilde{\mathbf{e}}_x \quad (10.12)$$

la direction du nombre d'onde. Cette direction de propagation de l'onde diffère de la direction de l'écoulement de base. Au lieu de privilégier le référentiel d'origine, choisi pour exprimer l'écoulement de base le plus simplement, on peut, alternativement, exprimer les équations pour les perturbations dans le référentiel tourné, aligné sur le nombre d'onde. Ce référentiel ou système de coordonnées est défini par

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_x = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y \\ \tilde{\mathbf{e}}_y = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \tilde{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (10.13)$$

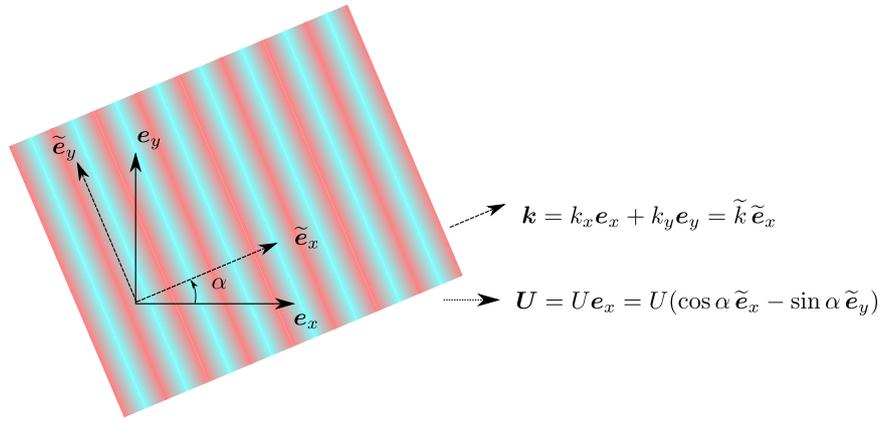


FIGURE 10.2 – Mode propre 3D dans un plan horizontal, vu de dessus. Le problème de stabilité 3D de l'écoulement $U(z)e_x$, se réduit à un problème de stabilité 2D, dans le référentiel \tilde{e}_x, \tilde{e}_y aligné sur la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} .

Ici $\alpha = \arg(k_x + ik_y)$ l'angle entre l'axe x et le vecteur \mathbf{k} . On note $\tilde{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ la norme du vecteur d'onde. À l'inverse, on a $k_x = \tilde{k} \cos \alpha$ et $k_y = \tilde{k} \sin \alpha$. Dans ce référentiel, la perturbation sera de la forme

$$[\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, p] = [\tilde{v}_x(z), \tilde{v}_y(z), \tilde{v}_z(z), q(z)] e^{i\tilde{k}\tilde{x}} e^{st} \quad (10.14)$$

et l'écoulement de base

$$\mathbf{U} = U(z) \cos \alpha \tilde{e}_x - U(z) \sin \alpha \tilde{e}_y \quad (10.15)$$

Le problème de stabilité devient

$$(s + i\tilde{k} \cos \alpha U) \tilde{v}_x + \cos \alpha U' \tilde{v}_z = -i\tilde{k}q \quad (10.16a)$$

$$(s + i\tilde{k} \cos \alpha U) \tilde{v}_y - \sin \alpha U' \tilde{v}_z = 0 \quad (10.16b)$$

$$(s + i\tilde{k} \cos \alpha U) \tilde{v}_z = -\partial_z q \quad (10.16c)$$

$$i\tilde{k} \tilde{v}_x + \partial_z \tilde{v}_z = 0 \quad (10.16d)$$

dans ce référentiel. Il faut maintenant remarquer la structure spéciale de ces équations. Les trois équations (10.16a), (10.16c), (10.16d) couplent $\tilde{v}_x, \tilde{v}_z, q$ mais sont indépendantes de \tilde{v}_y . Elles définissent donc un problème de stabilité qui ne dépend pas de \tilde{v}_y . Autrement dit, le problème de stabilité ne dépend pas du champ \tilde{v}_y qui apparaît uniquement en (10.16b). On dit que le champ \tilde{v}_y est esclave des 3 autres. Si maintenant, on procède à quelques réécritures

$$s = \tilde{s} \cos \alpha, \quad q = \tilde{q} \cos \alpha \quad (10.17)$$

alors on obtient des 3 équations (10.16a), (10.16c), (10.16d) que

$$(\tilde{s} + i\tilde{k} U) \tilde{v}_x + U' \tilde{v}_z = -i\tilde{k} \tilde{q} \quad (10.18a)$$

$$(\tilde{s} + i\tilde{k} U) \tilde{v}_z = -\partial_z \tilde{q} \quad (10.18b)$$

$$i\tilde{k} \tilde{v}_x + \partial_z \tilde{v}_z = 0 \quad (10.18c)$$

Ceci ne saute pas à l'oeil si on découvre le sujet pour la première fois, mais en fait, ce problème de stabilité est exactement celui qu'on aurait trouvé si, au début de l'analyse, on avait limité nos modes à des structures purement 2D, invariants de y , si on avait proposé

$$[u_x, u_y, u_z, p] = [\tilde{v}_x(z), 0, \tilde{v}_z(z), \tilde{q}(z)] e^{i\tilde{k}\tilde{x}} e^{\tilde{s}t} \quad (10.19)$$

Le problème de stabilité du mode 3D est donc lié au problème de stabilité des modes 2D, via l'introduction d'un référentiel tourné. Vue à l'envers, ceci signifie qu'il existe une transformation, nommé d'après Squire (1933) [squire1933], qui permet de transcrire les résultats d'une analyse de stabilité de modes 2D aux modes 3D.

★ **Théorème de Squire.** Une solution 2D des équations de perturbation linéaires (10.7), de la forme

$$[u_x, u_y, u_z, p] = [\tilde{v}_x(z), 0, \tilde{v}_z(z), \tilde{q}(z)] e^{i\tilde{k}x} e^{\tilde{s}t} \quad (10.20)$$

c.a.d. invariante selon y , avec nombre d'onde \tilde{k} selon x et avec taux de croissance \tilde{s} , génère une famille de solutions 3D de la forme

$$[u_x, u_y, u_z, p] = [v_x(z), v_y(z), v_z(z), q(z)] e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{st} \quad (10.21)$$

Il est possible d'exprimer toutes les grandeurs 3D en fonction des grandeurs 2D, mais le plus important est

$$s = \tilde{s} \cos \alpha \quad \text{avec} \quad \cos \alpha = \frac{k_x}{\tilde{k}} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (10.22)$$

Comme $|\cos \alpha| \leq 1$, cette relation suggère que le taux de croissance s d'un mode 3D, avec $k_y \neq 0$, sera toujours inférieur à \tilde{s} , celui pour un mode 2D. Les modes 2D se déstabilisent donc toujours plus fortement que les modes 3D. ■

A cause du théorème de Squire, on a la garantie que les modes 2D, invariants le long de y , sont toujours les plus instables. On peut donc limiter notre étude de stabilité à ces modes 2D sans avoir peur de rater des modes plus instables. Dans la suite, on laisse tomber les notations avec les tildes, qui ne servaient ici qu'à montrer l'origine de la transformation de Squire.

10.2.3 Equation de Rayleigh

Les équations du système (10.18) (sans tildes) se découpent en une équation unique qui contrôle la stabilité, l'équation de Rayleigh. Pour la trouver, on introduit d'abord une fonction de courant. Comme la perturbation linéaire de l'écoulement est 2D, il est possible de proposer $\mathbf{u} = -\nabla \times \Psi \mathbf{e}_y$ avec

$$\Psi = \psi(z) e^{ikx} e^{st} \quad (10.23)$$

Pour les composantes de la vitesse, cela signifie

$$v_x = \partial_z \psi \quad , \quad v_z = -ik\psi \quad (10.24)$$

et l'incompressibilité est alors automatiquement satisfaite. Après avoir remplacé les composantes par ces expressions, il reste les deux équations

$$(s + ikU) \partial_z \psi - ikU' \psi = -ikq \quad (10.25)$$

$$-(s + ikU) ik\psi = -\partial_z q \quad (10.26)$$

On élimine facilement la pression q ici, pour trouver

$$(s + ikU) k^2 = \partial_z [(s + ikU) \partial_z \psi - ikU' \psi] \quad (10.27)$$

ou encore, après simplification du membre de droite

$$[(s + ikU)(\partial_{zz} - k^2) - ikU''] \psi = 0 \quad (10.28)$$

Ici $U'' = \partial_{zz}^2 U(z)$. Afin d'aboutir sur une équation plus belle, on réécrit le taux de croissance complexe s autrement, comme

$$s = -ikc \quad (10.29)$$

Au lieu de chercher des valeurs propres de $s \in \mathbb{C}$, on cherche de manière équivalente, des valeurs propres de $c \in \mathbb{C}$. L'interprétation qu'on donne à cette grandeur c , pour $k > 0$, est le suivant

$$\text{Re}(c) = c_r \quad : \quad \text{vitesse de phase de l'onde}$$

$$\text{Im}(ck) = c_i k \quad : \quad \text{taux de croissance réel de l'onde}$$

Un mode deviendra instable si $\text{Im}(c) > 0$. La structure spatiale ondulatoire du mode se propage dans la direction de \mathbf{k} à vitesse de phase $\text{Re}(c)$. Après ce petit changement de notation, on obtient la fameuse équation de Rayleigh. Ensemble avec la condition limite d'imperméabilité exprimé avec ψ , ce problème contrôle la stabilité non-visqueuse de l'écoulement $U(z) \mathbf{e}_x$

★ **Problème de stabilité non-visqueuse.** Trouver les fonctions propres $\psi(z) \in \mathbb{C}$ et les valeurs propres $c \in \mathbb{C}$ telles que l'équation de Rayleigh

$$[(U - c)(\partial_{zz}^2 - k^2) - U''] \psi = 0 \quad (10.30)$$

est satisfaite avec les conditions aux limites

$$\psi|_{z=0,H} = 0 \quad (10.31)$$

en haut et en bas du domaine fluide. ■

On peut déjà remarquer quelques généralités sur les solutions. Comme k et $U(z)$ sont réels, tout mode $\psi(z)$ avec sa valeur propre c sera accompagné d'un mode conjugué $\psi^*(z)$ avec la valeur propre c^* . Le spectre c.a.d. l'ensemble des valeurs propres admises est donc toujours symétrique par rapport à l'axe réel. Comme $c_i > 0$ indique une instabilité, on déduit aussi que pour chaque mode instable, il existe un mode stable. En pratique, la stabilité dépend donc de l'existence de modes avec $c_i \neq 0$ et on ne focalise que sur les modes instables avec $c_i > 0$.

10.2.4 Le critère du point d'inflexion de Rayleigh

Le critère du point d'inflexion de Rayleigh prédit une caractéristique essentielle de tout écoulement non-visqueux instable.

★ **Critère du point d'inflexion de Rayleigh.** Un écoulement non-visqueux $U(z)e_x$ qui est instable a au moins un point d'inflexion dans l'intervalle $z \in [0, H]$. Au moins à un endroit on a $U''(z_*) = 0$. ■

On a vu plus haut qu'un mode instable aura nécessairement $\text{Im}(c) = c_i > 0$. Ceci signifie que $U(z) - c \neq 0$ dans tout le domaine $z \in [0, H]$ et on peut donc diviser l'équation de Rayleigh par ce facteur. L'équation

$$(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi - \frac{U''}{U - c}\psi = 0 \quad (10.32)$$

a du sens partout. L'avantage de l'opération est que toute la dépendance en $U(z)$ apparaît dans un seul terme. Si on multiplie cette nouvelle équation par ψ^* et on l'intègre ensuite sur $z \in [0, H]$, on obtient

$$\int_0^H \psi^*(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi dz = \int_0^H \frac{U''}{U - c} |\psi|^2 dz \quad (10.33)$$

Par intégration par partie et utilisant la condition aux limites $\psi|_{z=0,H} = 0$ on trouve

$$-\int_0^H (|\partial_z \psi|^2 + k^2 |\psi|^2) dz = \int_0^H \frac{U''}{U - c} |\psi|^2 dz \quad (10.34)$$

Le membre de gauche est nécessairement réel. On peut donc prendre la partie imaginaire de l'équation pour trouver

$$0 = \int_0^H \text{Im} \left(\frac{U''}{U - c} \right) |\psi|^2 dz = -c_i \int_0^H \frac{U''}{|U - c|^2} |\psi|^2 dz \quad (10.35)$$

Si $c_i \neq 0$, si l'écoulement est instable alors l'intégrale

$$\int_0^H \frac{U''}{|U - c|^2} |\psi|^2 dz = 0 \quad (10.36)$$

s'annule. Ceci n'est que possible si l'intégrande change de signe sur l'intervalle $z \in [0, H]$. Mais seul $U''(z)$ peut changer de signe. On a donc la garantie que pour tout écoulement de base instable, il doit donc y avoir des zones où $U'' > 0$ et $U'' < 0$ et donc au moins un point d'inflexion où $U''(z_*) = 0$.

Attention avec la sur-interprétation du critère du point d'inflexion. Un écoulement instable a un point d'inflexion, mais la présence d'un point d'inflexion ne garantit pas cette instabilité. A l'envers, un écoulement sans point d'inflexion ne peut pas être instable sans effets visqueux. Quelques exemples dans la figure 10.3. Un écoulement de Couette a $U'' = 0$ partout, cet écoulement peut être stable ou instable selon le critère du point d'inflexion. L'écoulement de Poiseuille à $U'' \neq 0$ partout. Ainsi cet écoulement ne peut pas être instable sans effets visqueux selon le critère. L'écoulement sinusoïdale de Kolmogorov a un point d'inflexion. Il peut être instable selon le critère

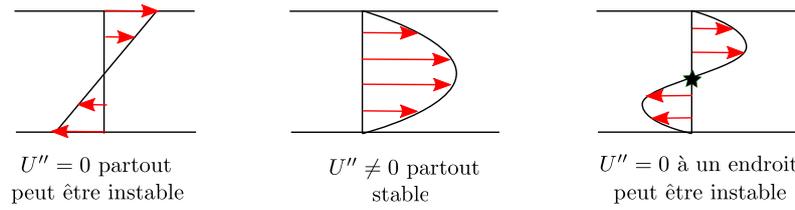


FIGURE 10.3 – Prédire la stabilité non-visqueuse de quelques écoulements parallèles avec le critère du point d'inflexion de Rayleigh

10.2.5 Écoulement de Couette : spectre continu

L'écoulement linéaire de Couette $U(z) = Uz/H$ dans un canal $z \in [0, H]$ est un cas d'étude assez spéciale. Comme $U'' = 0$ partout, le critère de Rayleigh nous laisse dans le vide (on montre que cet écoulement est stable avec ou sans viscosité). La plus grande particularité de l'écoulement de base de Couette est qu'il existe un spectre continu, c.a.d. un continuum de valeurs propres

$$c \in [0, U] \quad (10.37)$$

admissibles. Pour comprendre l'origine de ce spectre continu, on part de l'équation de Rayleigh qui devient

$$\left(\frac{Uz}{H} - c\right) (\partial_{zz}^2 - k^2)\psi(z) = 0 \quad (10.38)$$

avec $U'' = 0$. Soit on a $(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi(z) = 0$, soit on se trouve sur une couche $z = z_*$ très particulière où $(\frac{Uz_*}{H} - c) = 0$. Comme $z_* \in [0, H]$ forcément, on comprend déjà que l'existence de telles couches nécessite $c \in [0, U]$.

On essaie de trouver la forme de la fonction de courant ψ associé. On imagine donc un $c \in [0, U]$ en particulier. A la hauteur $z_* = Hc/U$, l'équation est satisfaite car $(\frac{Uz_*}{H} - c) = 0$. Au dessus (+, $z > z_*$) et en dessous (-, $z < z_*$) de cette couche $z = z_*$, la fonction de courant doit par contre satisfaire

$$(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi_{\pm}(z) = 0 \quad (10.39)$$

La fonction de courant se définit donc par zone. La structure de $\psi_{\pm}(z)$ est forcément composée d'exponentielles ou de fonctions hyperboliques et le choix

$$\begin{cases} \psi_- = A_- \sinh(kz) & , \quad z \in [0, z_*] \\ \psi_+ = A_+ \sinh(k(H-z)) & , \quad z \in [z_*, H] \end{cases} \quad (10.40)$$

convient particulièrement car il incorpore déjà les conditions aux limites d'imperméabilité en haut et en bas du canal. En effet,

$$v_z|_{z=0} = -ik\psi_-|_{z=0} = 0 \quad , \quad v_z|_{z=H} = -ik\psi_+|_{z=H} = 0 \quad (10.41)$$

Sur la couche $z = z_*$ on doit imposer des conditions de raccordement. Sur la couche, on peut admettre des discontinuités de la vitesse tangentielle (approche inviscide Euler). Des discontinuités de vitesse normale sont par contre inadmissibles car elles briseraient la conservation de la masse. On veut donc

$$v_{+,z}|_{z=z_*} = v_{-,z}|_{z=z_*} \quad \Rightarrow \quad ik\psi_+|_{z=z_*} = ik\psi_-|_{z=z_*} \quad \Rightarrow \quad \psi_+|_{z=z_*} = \psi_-|_{z=z_*} \quad (10.42)$$

La fonction de courant doit être continue en $z = z_*$. Ainsi, on trouve un lien entre A_{\pm} et la fonction de courant s'écrit

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_- = A \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kz_*)} & , \quad z \in [0, z_*] \\ \psi_+ = A \frac{\sinh(k(H-z))}{\sinh(k(H-z_*))} & , \quad z \in [z_*, H] \end{cases} \quad (10.43)$$

Une deuxième condition nécessaire est que la pression associée à la perturbation doit être continue à travers cette couche, que

$$q_+|_{z=z_*} = q_-|_{z=z_*} \quad (10.44)$$

De (10.25), on déduit avec $s = -ikc$ que

$$q_{\pm} = (c - Uz/H)\partial_z \psi_{\pm} + (U/H)\psi_{\pm} \quad (10.45)$$

Si on exprime la continuité de la pression sur la couche, $z = z_*$, on constate qu'elle est automatiquement satisfaite car $c - Uz_*/H = 0$ par définition et on avait déjà $\psi_+|_{z=z_*} = \psi_-|_{z=z_*}$. Le spectre connu est donc bien une réalité. On peut proposer un continuum de solutions admissibles. On remarque enfin que sur la couche z_* , la vitesse tangentielle est toujours discontinue. Les modes qu'on vient de trouver présentent donc des discontinuités de vitesse tangentielle sur la couche z_* et cela est parfaitement admissible dans un fluide parfait, sans viscosité.

10.2.6 Ecoulements linéaires par morceau

Avec l'équation de Rayleigh, on peut étudier quelques écoulements de manière analytique. La classe des écoulements linéaires par morceau est assez intéressante. Quelques exemples sont donnés sur la figure 10.4.

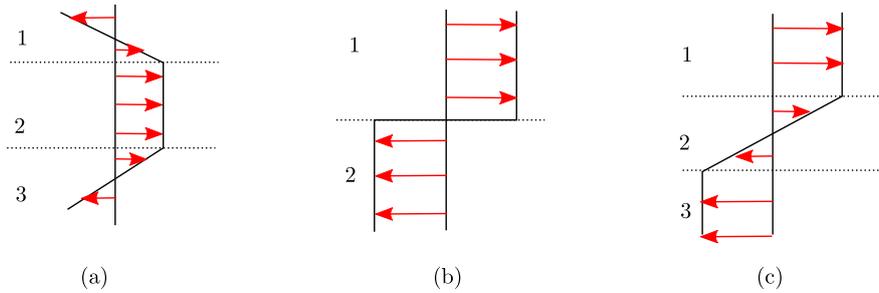


FIGURE 10.4 – Ecoulements linéaires par morceau. (a) arbitraire, (b) couche de cisaillement d'épaisseur zéro, (c) couche de cisaillement d'épaisseur finie.

Un écoulement linéaire par morceau se définit par intervalle. Si l'écoulement couvre toute un intervalle $z \in I$, on commence par diviser cet intervalle en sous intervalles

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_N \quad (10.46)$$

Dans chaque zone il existe alors un écoulement linéaire $U_j(z) = A_j z + B_j$ différent et des discontinuités sont admises. La fonction de courant du problème de stabilité se définit par zone

$$\psi = \psi_j \quad , \quad \forall z \in I_j \quad (10.47)$$

et dans chaque intervalle, l'équation de Rayleigh suggère qu'on doit avoir

$$(U_j - c)(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi_j(z) = 0 \quad (10.48)$$

car $U_j'' = 0$. Les solutions de cette équation ne sont jamais difficiles à trouver. Il peut tout d'abord y avoir un spectre continu $c \in [\min_z U(z), \max U(z)]$ et pour le trouver il suffit de suivre l'approche de la section précédente. Si on s'intéresse au spectre discret on va exclure cette possibilité. La fonction de courant se présente donc sous la forme d'exponentielles ou de fonctions hyperboliques, qui peuvent différer par zone. La difficulté est encore dans les conditions aux limites qui doivent s'imposer aux interfaces entre les différents intervalles. Ces interfaces doivent être traitées comme des interfaces matérielles et la pression doit y être continue. Donnons l'exemple d'une interface localisée à l'état de base en $z = z_{1|2}$. On admet que cette interface se déforme en

$$z = z_{1|2} + h_{1|2}(x, t) = z_{1|2} + B_{1|2} e^{ikx} e^{st} \quad (10.49)$$

Comme nous l'avons vu avant dans les chapitres précédents, des conditions cinématiques doivent être imposées des deux cotés de l'interface. Les versions linéarisées :

$$\begin{cases} \partial_t h_{1|2}(x, t) = v_{1,z}|_{z=z_{1|2}} \\ \partial_t h_{1|2}(x, t) = v_{2,z}|_{z=z_{1|2}} \end{cases} \Rightarrow v_{1,z}|_{z=z_{1|2}} = v_{2,z}|_{z=z_{1|2}} \Rightarrow ik\psi_1|_{z=z_{1|2}} = ik\psi_2|_{z=z_{1|2}} \quad (10.50)$$

Si $k \neq 0$, on voit donc que les conditions cinématiques imposent la continuité de la fonction de courant à travers l'interface :

$$CL_1 \quad : \quad \psi_1|_{z=z_{1|2}} = \psi_2|_{z=z_{1|2}} \quad (10.51)$$

La condition dynamique exprime que la pression est continue à travers l'interface. Ici, en absence de gradients de pression dans l'état de base, cette condition dynamique linéarisée est tout simplement

$$q_1|_{z=z_{1|2}} = q_2|_{z=z_{1|2}} \quad (10.52)$$

pour les perturbations linéaire de pression q_1, q_2 . On aimerait exprimer cette condition avec les variables ψ_1 et ψ_2 . Pour cela, il faut remonter en arrière dans le processus de découplage qui avait mené à l'équation de Rayleigh. De (10.25), on déduit avec $s = -ikc$, $\psi = \psi_j$ et $U = U_j$ que

$$q_j = (c - U_j)\partial_z \psi_j + U_j' \psi_j \quad (10.53)$$

si $k \neq 0$. Ainsi on peut récrire la continuité de la pression comme

$$CL_2 \quad : \quad (c - U_1)\partial_z \psi_1|_{z=z_{1|2}} + U_1' \psi_1|_{z=z_{1|2}} = (c - U_2)\partial_z \psi_2|_{z=z_{1|2}} + U_2' \psi_2|_{z=z_{1|2}} \quad (10.54)$$

dans les variables ψ_1 et ψ_2 . Enfin, si le domain fluide est ouvert, il faudra toujours s'assurer que la perturbation reste localisée, qu'elle décroît vers $z \rightarrow +\infty$. Plus bas, on propose un exercice dans lequel on utilise cette approche pour étudier la stabilité d'une couche de cisaillement d'épaisseur finie.

10.2.7 Couches critiques

L'exemple de l'écoulement de Couette nous a déjà montré que l'équation de Rayleigh présente quelques spécificités. Dans le cas plus général où $U'' \neq 0$, il est possible de tomber sur une situation où l'équation de Rayleigh présente une couche critique. Une couche critique est une ligne $z = z_c$ où la vitesse du fluide coïncide avec la vitesse de phase de la perturbation, c.a.d. une ligne où

$$U(z_c) - c = 0 \quad (10.55)$$

A cet endroit, l'équation de Rayleigh est singulière car

$$\underbrace{(U(z) - c)}_{0 \text{ en } z = z_c} (\partial_{zz}^2 - k^2) \psi - U''(z) \psi = 0 \quad (10.56)$$

On pourrait penser que cette situation ne peut jamais arriver, mais cela est faux. La singularité de l'équation de Rayleigh peut être levé si on admet que le fluide est visqueux ou si on admet que la perturbation est non-linéaire. L'étude de ces couches n'a rien de simple et nécessite d'apprendre des techniques mathématiques avancées comme la méthode des développements asymptotiques raccordés.

10.3 Stabilité linéaire et visqueuse

10.3.1 Etat de base visqueux

Si on admet la viscosité, alors il existe bien moins d'états de base stationnaires. Un écoulement parallèle stationnaire $\mathbf{u} = U(z)\mathbf{e}_x$ doit être solution de

$$0 = -\partial_x P + \nu \partial_{zz}^2 U \quad (10.57)$$

Suite à l'incompressibilité, on peut déduire que $\partial_{xx}P = 0$ que la pression est forcément linéaire $P = Gx + C$. Ceci signifie qu'il y a seulement deux possibilités pour le gradient de pression. Soit il est constant et égal à $\nabla P = Ge_x$, soit il est zéro. Ainsi, un écoulement parallèle stationnaire doit être solution de

$$G = \nu \partial_{zz}^2 U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{Gz^2}{2} + Az + B \quad (10.58)$$

On trouve ici une superposition arbitraire d'un écoulement de Couette plan avec un écoulement de Poiseuille et ceci est le seul écoulement parallèle stationnaire et visqueux qui peut exister. Le gradient de pression, ainsi que le mouvement des parois fixent intégralement les constantes A et B . La conséquence est aussi qu'on ne peut donc utiliser la méthode des perturbations linéaires uniquement sur ce type d'écoulement.

Si la viscosité est suffisamment faible, on peut supposer un écoulement de base quasi-stationnaire. Dans ce cas, on admet que U dépend du temps, mais que cette variation temporelle sera lente devant le temps nécessaire aux instabilités. Un exemple d'un tel écoulement est la couche de cisaillement en fonction d'erreur vue dans le chapitre sur Kelvin-Helmholtz. L'écoulement

$$\bar{U} = U \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \quad \text{ou} \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (10.59)$$

tend vers $-U$ en $z \rightarrow -\infty$ et vers $+U$ en $z \rightarrow +\infty$ et change brusquement de direction dans une zone d'épaisseur $\sqrt{\nu t}$ autour de $z = 0$. Si on fixe l'écoulement artificiellement en disant que

$$U = U \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (10.60)$$

on a un écoulement stationnaire qui présente une couche de cisaillement d'épaisseur fini. On pourrait calculer le taux de croissance s des modes linéaires qui perturbent cet écoulement. Si ce taux de croissance s est suffisamment grand, c'est à dire, si

$$\frac{\nu}{\delta^2 s} \ll 1 \quad (10.61)$$

alors on peut considérer que l'instabilité croît sur un temps tellement rapide que l'état de base n'a pas eu le temps de changer vraiment. Cette condition en est une qu'on ne peut que vérifier à posteriori, mais si elle est vérifiée, il est tout à fait justifié de supposer l'état de base quasi-stationnaire. Par contre, on comprend aussi que ceci ne permettra pas de localiser un "seuil" d'instabilité. Si $s = 0$ alors il n'est pas possible satisfaire l'inégalité.

Enfin, dans les analyses de stabilité classiques, on s'est souvent donnée la liberté de choisir n'importe quel écoulement de base visqueux stationnaire. L'argument qui est donné est qu'il existe toujours une force volumique $F = \rho A e_x$ telle que

$$0 = -\partial_x P + \nu \partial_{zz}^2 U + A \quad (10.62)$$

est satisfaite. Ainsi, quel que soit $U(z)$ il existe toujours une fonction $A(z)$ adéquate. Un écoulement parallèle arbitraire peut toujours être maintenu par une force volumique extérieure. Faut pas se demander d'où vient cette force... Un exemple d'un écoulement bien étudié est celui de Kolmogorov

$$U(z) = U \sin(Kz) \quad (10.63)$$

10.3.2 Equation de Orr-Sommerfeld

On admet $U(z)$ écoulement de base visqueux stationnaire arbitraire. Même en présence de viscosité, le théorème de Squire tient toujours : un mode 2D, n'ayant aucune structure selon y ($k_y = 0$) sera toujours plus instable qu'un mode 3D. On focalise donc sur le problème 2D, où les perturbations dérivent d'une fonction de courant avec une structure harmonique selon x . L'équation pour la dépendance z des perturbations visqueuses s'écrit

$$(s + ikU)\partial_z \psi - ikU'\psi = -ikq + \nu(\partial_{zz}^2 - k^2)\partial_z \psi \quad (10.64)$$

$$-(s + ikU)ik\psi = -\partial_z q + \nu(\partial_{zz}^2 - k^2)ik\psi \quad (10.65)$$

On remplace $s = -ikc$ comme avant. On élimine la pression, en appliquant ∂_z (eq. 1) - ik (eq. 2). Après division par ik , ça donne

$$(U(z) - c)(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi - U''(z)\psi = \frac{\nu}{ik}(\partial_{zz}^2 - k^2)(\partial_{zz}^2 - k^2)\psi \quad (10.66)$$

Cette équation est connue sous le nom de l'équation de Orr-Sommerfeld. Le plus souvent, on la retrouve sous forme adimensionnée où le facteur $\frac{\nu}{ik} \rightarrow \frac{1}{ikRe}$. Pour compléter la définition du problème, il faut ajouter des conditions aux limites d'adhérence sur des parois, ou des conditions de régularité à l'infinie. Pour un canal $z \in [0, H]$, cela revient à poser

$$\psi_{z=0,H} = 0 \quad , \quad \partial_z \psi_{z=0,H} = 0 \quad (10.67)$$

par exemple. On associe donc 4 conditions aux limites pour une EDO d'ordre 4, ce qui définit le problème de stabilité. Il est évident que l'équation de Orr-Sommerfeld définit un problème à valeurs propres assez complexe et ce n'est pas une surprise que ce problème de stabilité visqueux connait très peu de solutions exactes. Le cas de l'écoulement de Couette a été étudié par [] et même au résultat que cet écoulement est toujours stable, quelque soit le nombre de Reynolds $Re = UH/\nu$. L'écoulement de Poiseuille est instable au delà d'un certain nombre de Reynolds critique qui dépend forcément de l'adimensionnement choisi (cf. plus loin, solution numérique).

Au delà des écoulement de Poiseuille et de Couette, il faut aussi savoir que l'équation de Orr-Sommerfeld fût le point de départ pour la recherche de solutions approchées. Il existe aujourd'hui un arsenal de méthodes mathématiques pour construire des solutions approchées dans des cas $U(z)$ arbitraire. Ceci est d'une grande valeur, mais les méthodes employées sont jamais simples. Une façon plus pragmatique de proposer une solution approchée est d'adopter une approche numérique.

10.3.3 Solutions numériques

Résoudre le problème de stabilité visqueux d'un écoulement parallèle n'est pas plus difficile que résoudre le problème de stabilité de Taylor-Couette. Nous avons donc modifié le notebook préparé pour le cours sur l'instabilité centrifuge, en un notebook `para_num.ipynb` qui permet de résoudre numériquement le problème la stabilité visqueuse d'un écoulement de Couette, de Poiseuille ou de Kolmogorov. On discutera ce programme en cours.

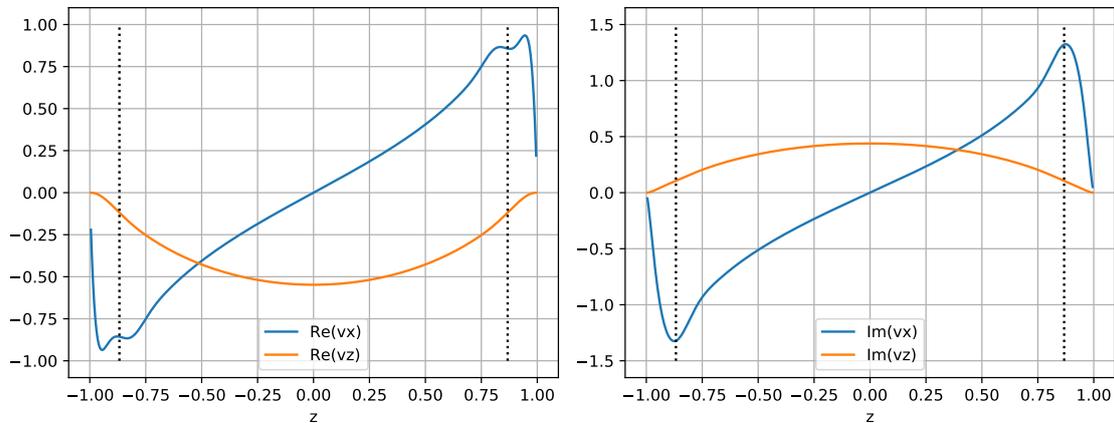


FIGURE 10.5 – Structure spatiale de $v_x(z)$ et $v_z(z)$ du mode le plus instable de l'écoulement de Poiseuille $U(z) = 1 - z^2$, pour $k = 1$, $Re = UH/\nu = 8000$. H , la demi-hauteur du canal a été utilisée comme échelle d'espace et U est la vitesse dimensionnée maximale au centre. Taux de croissance adimensionné $s \simeq 0.0025 - 0.247i$. Résolution $N = 400$. Les lignes pointillées localisent les couches critiques.

En tant qu'exemple, on considère l'écoulement de Poiseuille $U(1 - (z/H)^2)$, dans un canal $z \in [-H, H]$. Utilisant U , H et H/U comme échelles de vitesse, espace et temps, on a un canal adimensionné $z \in [-1, 1]$, un écoulement de base adimensionné $U(z) = 1 - z^2$. La stabilité dépend de deux paramètres k le nombre d'onde adimensionné et $Re = UH/\nu$ le nombre de Reynolds. Il s'avère que l'écoulement de Poiseuille est faiblement instable au delà de

$$Re_c = \frac{UH}{\nu} = 5772 \quad (10.68)$$

et pour un nombre d'onde adimensionné proche de $k \approx 1$. Dans la figure 10.5, on montre la structure spatiale de $v_x(z)$ et $v_z(z)$ du mode le plus instable ($s \simeq 0.0025 - 0.247i$) pour $k = 1$ et $Re = 8000$. Proche des

bords, à l'endroit des lignes pointillés, on remarque que la vitesse v_x varie rapidement sur une échelle spatiale qui semble courte. Si on appelle

$$c_r = \text{Im}(s)/(-k) = 0.247 \quad (10.69)$$

la vitesse de phase alors, on a localisé les lignes pointillés aux endroits z_c où

$$U(z_c) = 1 - z_c^2 = c_r \quad \Leftrightarrow \quad z_c = \pm\sqrt{1 - c_r} \quad (10.70)$$

où la vitesse de phase du mode coïncide donc avec la vitesse de l'écoulement. En cette zone, il existe une couche critique et c'est le voisinage proche de cette couche qui est déterminant pour la stabilité de l'écoulement de Poiseuille. La stabilité visqueuse dépend donc de phénomènes assez délicates qui ont lieu proche de cette fine couche critique et c'est cela qui explique pourquoi on a besoin d'une résolution numérique assez grande pour capturer le mode instable.

Utilisant des techniques mathématiques avancées, il est possible de résoudre ce genre de couche critique qui influencent la stabilité de manière délicate. Il s'agit d'une méthode alternative qui permet de trouver une solution approchée pour le mode instable et cette méthode permet notamment de localiser la courbe de stabilité marginale de manière assez précise. L'étude des couches critiques fait l'objet du nombre conséquent de sections dans le livre [10], mais dépasse le niveau du cours. Il faut retenir que la stabilité visqueuse d'un écoulement qui est stable en absence de viscosité (tel que l'écoulement de Poiseuille) est un sujet assez subtil.

10.4 Le défaut de l'analyse de stabilité linéaire

10.4.1 Observation d'une transition sous-critique ou by-pass

De nombreux écoulements parallèles deviennent instables avant que la valeur critique en nombre de Reynolds est atteinte. Un écoulement de Couette devient turbulent, même si l'analyse linéaire suggère un écoulement stable pour toute valeur du nombre de Reynolds. Un écoulement de Poiseuille plan devient instable pour $Re < Re_c$. L'écoulement de Poiseuille cylindrique (pipe flow) ou de Reynolds est aussi linéairement stable quelque soit le nombre de Reynolds. Pourtant l'expérience montre que l'écoulement devient turbulent. On parle de la transition sous-critique ou transition by-pass et pour l'expliquer il a fallu mettre en cause des idées reçus sur la notion de stabilité hydrodynamique.

10.4.2 Méta-stabilité (cartoon)

L'analyse de stabilité linéaire n'arrive pas à capturer la méta-stabilité

Bille sur haut d'une montagne sur un équilibre. Cas stable, instable, metastable

Instable/stable lin. = une perturbation d'amplitude infiniment petite croit ou diminue

Metastable = lin stable, mais une perturbation d'amplitude déclenche la transition (énergie d'activation)

Cette amplitude finie peut être très petite (graphe), $\|u\| \sim Re^{-\alpha}$ souvent, comment le mesurer?

10.4.3 Autres exemples de systèmes méta-stables

Gaz combustibles prémélangés, explosifs

Eau à température super-critique

Transitions de phase

Nucléation de bulles

10.5 Etudier la stabilité autrement

10.5.1 Stabilité linéaire non-modale

Une perturbation linéaire peut elle croître à temps court, même si tous les modes sont atténués

Exemple graphique avec vecteurs non-orthogonaux

Temps court : seuil de croissance énergétique (abscisse numérique)

Temps long : croissance transitoire optimale, boucle d'optimisation

10.5.2 Défauts minimaux

L'écoulement de base est stable, mais si on le perturbe un tout petit peu, sa stabilité linéaire peut changer drastiquement

Mesurer la perturbation minimale qui rend l'écoulement de base maximale instable

Comment limiter l'espace des perturbations admissibles ?

Formulation variationnelle, boucle d'optimisation

10.5.3 Stabilité non-linéaire

L'écoulement de base est stable, mais si on le perturbe un tout petit peu, la perturbation peut croître et rétro-agir sur l'état de base.

Formulation variationnelle pour trouver la perturbation la plus petite

10.6 Exercices

10.6.1 Couche de mélange d'épaisseur finie

Etudier la stabilité non-visqueuse de l'écoulement parallèle linéaire par morceau

$$U(z) = \begin{cases} U & , z > \delta \\ U(z/\delta) & , z \in [-\delta, \delta] \\ -U & , z < -\delta \end{cases} \quad (10.71)$$

Imposer l'équation de Rayleigh dans chaque zone et raccorder la fonction de courant entre les trois zones avec les conditions aux limites adéquates. Donner la relation de dispersion, c ou s en fonction de U, k, δ .

A. Formulaire

A.1 Navier-Stokes incompressible

A.1.1 Forme vectorielle

Dans la plupart des exemples considérés, on considère des écoulements \mathbf{u} incompressibles de fluides Newtoniens. Le tenseur des contraintes dans ce matériau vaut

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \eta(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \quad (\text{A.1})$$

Ici p est la pression, η la viscosité dynamique. Le mouvement de ce milieu est régi par les équations d'évolution suivants.

★ **Navier-Stokes incompressible.**

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.2a})$$

$$\rho[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{A.2b})$$

Ici ρ la densité. Souvent on utilisera $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique à la place de η . A la fin du polycopier se trouve un formulaire qui donne ces équations en composantes Cartésiennes et cylindriques. Parfois, on considèrera des situations avec deux fluides différents superposés. Il faut alors exprimer ces lois dans chaque zone de fluide.

A.1.2 Coordonnées Cartésiennes

Incompressibilité

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \eta \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \eta \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Matrice des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \eta \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ sur une surface à la normale $\underline{\underline{n}} = n_x \underline{\underline{e}}_x + n_y \underline{\underline{e}}_y + n_z \underline{\underline{e}}_z$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

A.1.3 Cordonnées cylindriques

Incompressibilité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Matrice des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \eta \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La contrainte $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ sur une interface à la normale $\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_\theta \mathbf{e}_\theta + n_z \mathbf{e}_z$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{bmatrix}$$

A.2 Conditions aux limites

A.2.1 Sur une surface solide

Sur une surface solide Σ au repos, à la normale \mathbf{n} et aux tangentes $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$, on utilise des différents types de conditions aux limites. Pour une paroi normale, bien mouillée par le liquide on doit utiliser

★ **Condition d'adhérence.** Le fluide visqueux est au repos sur la paroi.

$$\mathbf{u}|_\Sigma = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

Les conditions d'adhérence sont les plus réalistes mais ne permettent pas toujours d'obtenir les solutions les plus simples. Parfois, on utilise des conditions de glissement.

★ **Condition de glissement.** Le fluide visqueux ne traverse pas la paroi et n'exerce pas de forces tangentielles sur cette paroi.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = 0 \quad , \quad \mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = 0 \quad , \quad \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = 0 \quad (\text{A.4})$$

De nombreux théories de stabilité hydrodynamique sont non-visqueuses. On ne peut alors pas poser autre chose que l'imperméabilité.

★ **Condition d'imperméabilité .** Un fluide non-visqueux ne traverse pas la paroi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = 0 \quad (\text{A.5})$$

A.2.2 Sur une interface mobile entre deux fluides

Parfois on rencontre une interface mobile nommée \mathcal{S} , entre deux fluides, 1 et 2. Sur ces interfaces, on doit poser 3 types de conditions aux limites. On nomme \mathbf{n} a normale unitaire de 1 à 2 ou inversement.

★ **Conditions cinématiques.** Soit $F(\mathbf{r}, t)$ une fonction qui s'annule à l'endroit où se trouve l'interface. Les conditions cinématiques expriment que cette surface se déplace de manière matérielle, des deux cotés de l'interface

$$\partial_t F + \mathbf{u}_1|_{\mathcal{S}} \cdot \nabla F = 0 \quad , \quad \partial_t F + \mathbf{u}_2|_{\mathcal{S}} \cdot \nabla F = 0 \quad (\text{A.6})$$

Ces conditions cinématiques s'appliquent dans les fluides visqueux et non-visqueux. On ne peut pas s'en passer. Donnons un exemple plus concret où l'interface est située en $z = h(x, t)$. Alors on a $F = z - h(x, t)$ par exemple et les conditions cinématiques à exprimer mènent à

$$\partial_t h + \mathbf{u}_1|_{\mathcal{S}} \cdot \nabla h = \mathbf{u}_{1,z}|_{\mathcal{S}} \quad (\text{A.7a})$$

$$\partial_t h + \mathbf{u}_2|_{\mathcal{S}} \cdot \nabla h = \mathbf{u}_{2,z}|_{\mathcal{S}} \quad (\text{A.7b})$$

Comme ∇F est par définition normale à l'interface, il découle de ces deux conditions cinématiques que la vitesse normale est continue à travers l'interface. Si le fluide est visqueux, on doit ajouter la continuité de la vitesse tangentielle

★ **Conditions de continuité.** Dans un fluide visqueux, la vitesse tangentielle est continue à travers l'interface, ce qu'on exprime de manière sommaire comme

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)|_S = \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

On ne peut pas exiger cette condition avec un fluide non-visqueux. Finalement, il faut également satisfaire un condition dynamique. Cette condition limite fait intervenir la tension de surface γ .

★ **Condition dynamique.** Sur l'interface on a

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)|_S = \pm \gamma \kappa \mathbf{n} \quad (\text{A.9})$$

Ici $\boldsymbol{\sigma}_i$ sont les tenseurs de contraintes des deux cotés et $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ est la courbure de l'interface. ■

Il suffit de remplacer $\boldsymbol{\sigma}$ par sa définition (A.1) Dans la limite non-visqueuse, la condition dynamique se réduit à la loi de Young-Laplace $p_2 - p_1|_S = \gamma \kappa$. Le signe \pm dépend de l'orientation qu'on donne à \mathbf{n} (de 1 vers 2 ou inversement).

A.2.3 Sur une surface libre

Lorsqu'un des fluides est très léger et peu visqueux comparé à l'autre (par exemple un gaz, comparé à un liquide), on peut idéaliser l'interface comme une surface libre et ignorer tout mouvement dans la phase légère. Sur une telle surfaces, on doit imposer moins de conditions aux limites. On nomme \mathbf{n} a normale unitaire sortante du liquide et p_0 la pression dans la phase légère (gazeuse). Dans la phase liquide lourde on note \mathbf{u} la vitesse et p la pression.

★ **Condition cinématique.** Soit $F(\mathbf{r}, t)$ une fonction qui s'annule à l'endroit où se trouve la surface libre. La condition cinématiques expriment que cette surface se déplace de manière matérielle,

$$\partial_t F + \mathbf{u}|_S \cdot \nabla F = 0 \quad , \quad \partial_t F + \mathbf{u}_2|_S \cdot \nabla F = 0 \quad (\text{A.10})$$

On ne doit pas imposer une condition de continuité de vitesse, mais bien imposer une condition dynamique qui dépend de la tension de surface γ .

★ **Condition dynamique.** Sur la surface libre on a

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -p_0 - \gamma \kappa \mathbf{n} \quad (\text{A.11})$$

les signes sont ici correctes. ■

Dans un fluide parfait, on trouve la loi de Young-Laplace $p = p_0 + \gamma \kappa$.

Bibliography

Articles

- [1] C. David ANDERECK, S. S. LIU et Harry L. SWINNEY. “Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 164 (1986), pages 155-183 (cf. pages 68, 70).
- [2] Arnaud ANTKOWIAK et al. “Short-term dynamics of a density interface following an impact”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 577 (2007), pages 241-250 (cf. page 27).
- [3] T. J. AWE et al. “Observations of Modified Three-Dimensional Instability Structure for Imploding z -Pinch Liners that are Premagnetized with an Axial Field”. In : *Phys. Rev. Lett.* 111 (23 2013), page 235005 (cf. page 28).
- [4] Mebarek BELKADI et al. “On the role of roughness valleys in turbulent Rayleigh–Bénard convection”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 923 (2021), A6 (cf. pages 43, 44).
- [5] Henri BÉNARD. “Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide”. In : *Rev. Gen. Sci. Pures Appl.* 11 (1900), pages 1261-1271 (cf. page 34).
- [6] F. H. BUSSE et R. M. CLEVER. “Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 91.2 (1979), pages 319-335 (cf. page 43).
- [9] Wo R DEAN. “XVI. Note on the motion of fluid in a curved pipe”. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 4.20 (1927), pages 208-223 (cf. page 71).
- [11] W. S. EDWARDS et S. FAUVE. “Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 278 (1994), pages 123-148 (cf. page 11).
- [12] Jens EGGERS et Emmanuel VILLERMAUX. “Physics of liquid jets”. In : *Reports on progress in physics* 71.3 (2008), page 036601 (cf. page 53).
- [13] H. JEFFREYS. “Some cases of instability in fluid motion”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 118.779 (1928), pages 195-208 (cf. page 34).
- [14] Harold JEFFREYS. “LXXVI. The stability of a layer of fluid heated below”. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2.10 (1926), pages 833-844 (cf. pages 34, 43).

- [15] Bertrand LAGRÉE, Stéphane ZALESKI et Igor BONDINO. “Simulation of viscous fingering in rectangular porous media with lateral injection and two-and three-phase flows”. In : *Transport in Porous Media* 113.3 (2016), pages 491-510 (cf. page 11).
- [16] M. MATSUBARA et P. H. ALFREDSSON. “Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 430 (2001), pages 149-168 (cf. pages 99, 100).
- [17] Stephen W. MORRIS et al. “Spiral defect chaos in large aspect ratio Rayleigh-Bénard convection”. In : *Phys. Rev. Lett.* 71 (13 1993), pages 2026-2029 (cf. page 43).
- [19] L. RAYLEIGH. “On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side”. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 32.192 (1916), pages 529-546 (cf. pages 34, 42).
- [20] DF RUTLAND et GJ JAMESON. “A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 46.2 (1971), pages 267-271 (cf. page 53).
- [21] J. P. SAUPPE et al. “Demonstration of Scale-Invariant Rayleigh-Taylor Instability Growth in Laser-Driven Cylindrical Implosion Experiments”. In : *Phys. Rev. Lett.* 124 (18 2020), page 185003 (cf. page 28).
- [23] Yoshiyuki TAGAWA et al. “Highly Focused Supersonic Microjets”. In : *Phys. Rev. X* 2 (3 2012), page 031002 (cf. page 27).
- [24] DANIEL TAM et al. “Marangoni convection in droplets on superhydrophobic surfaces”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 624 (2009), pages 101-123 (cf. page 59).
- [25] G. I. TAYLOR. “VIII. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 223.605-615 (1923), pages 289-343 (cf. pages 61, 65, 68, 69).
- [26] Geoffrey Ingram TAYLOR. “The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 201.1065 (1950), pages 192-196 (cf. page 22).
- [27] Xiaojue ZHU et al. “Transition to the Ultimate Regime in Two-Dimensional Rayleigh-Bénard Convection”. In : *Phys. Rev. Lett.* 120 (14 2018), page 144502 (cf. page 44).

Books

- [7] Subrahmanyam CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. 1961 (cf. pages 13, 65).
- [8] F. CHARRU. *Instabilités hydrodynamiques*. Savoirs actuels. Série Physique. EDP SCIENCES, 2007. ISBN : 9782868839855 (cf. pages 12, 64).
- [10] P. G. DRAZIN et W. H. REID. *Hydrodynamic Stability*. 2^e édition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004 (cf. pages 12, 65, 68, 100, 110).
- [18] Luc PETIT, Jean-Pierre HULIN et Étienne GUYON. *Hydrodynamique physique 3e édition (2012)*. EDP Sciences, 2012 (cf. pages 12, 71).
- [22] H. SCHLICHTLING. *Boundary Layer Theory (8th edition)*. Springer, 2000 (cf. pages 67, 71).