

Universite Paris-Saclay - M2 DFE
Projets d'instabilité hydrodynamiques

Wietze Herreman

Année 2023-2024

Informations et modalités

Bienvenu dans le poly qui regroupe les propositions de projets d'instabilité hydrodynamique. Cette année, 2023-2024 nous évaluons pour la première fois cette UE comme une UE projet. Voici ce que j'attends de vous.

- Idéalement vous travaillez en binôme. Il est toujours bien de collaborer car ça donne d'autres points de vue sur un sujet. Vous pouvez aussi mieux répartir le travail. Trouver quelqu'un avec qui vous vous entendez bien. Si vous êtes dans l'impossibilité de travailler ensemble, réaliser le projet tout seul.
- L'évaluation du projet se fera lors d'un entretien oral avec moi et vous. Lors de cet entretien, nous allons discuter vos trouvailles, sur **la base d'un document/rapport que vous allez me rendre à ce moment là**. Ce rapport peut être en format pdf, mais un document manuscrit peut certainement convenir aussi tant que ce texte reste bien lisible. Vous pouvez me montrer des figures, vidéos, ... lors de ce moment d'échange. On fixe le rdv pour cet entretien dans un mois, environ, genre **fin février, début mars 2024**.
- Les sujets présentés ici sont neufs et donc un peu exploratoire. Pour la plupart il s'agit de modifications légères ou d'adaptations de sujets traités en cours. Je vous conseille d'utiliser au maximum les mêmes notations, dans la mesure du possible. Si vous rencontrez des difficultés insurmontables, me contacter par mail.
- Pour toute recherche bibliographique, utiliser google scholar en première instance. Si la référence est inaccessible, tenter de passer par le site web FOCUS de la librairie d'Orsay, suivant ce lien.

<https://upsaclay.focus.universite-paris-saclay.fr>

Entrer le nom du journal, puis laisser le moteur de recherche faire son travail. Souvent, il y a un accès vers la revue en ligne et en cliquant sur ce lien, vous allez retrouver le site du journal, en bénéficiant de l'abonnement de l'université

Chapitre 1

Instabilité de Rayleigh-Plateau dans les bronches

Dans les bronches de nos poumons on trouve des fins canaux de forme "cylindrique" recouvertes à l'intérieur par une fine couche de mucus liquide. Si on est malade, cette couche de mucus peut devenir trop épaisse et déstabiliser pour donner un bouchon, comme dans la figure de ci-dessous.

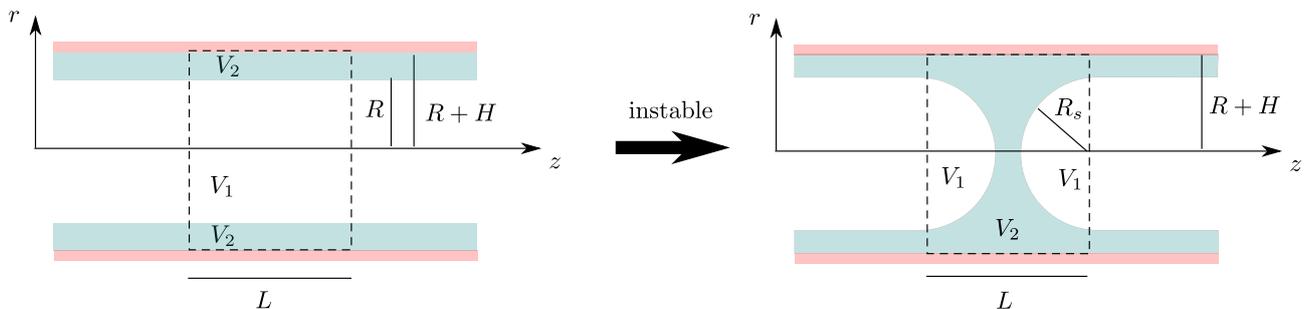


FIGURE 1.1 – Déstabilisation d'une couche de mucus dans une bronche cylindrique.

En réalité, le changement de forme peut être très brusque et elle exerce de fortes contraintes sur les parois qui peuvent être responsables de douleurs. Notons que c'est les claquement de ces "bouchons" de mucus que le médecin entend lorsqu'il vous demande de respirer profondément.

Dans ce projet, nous étudions la déstabilisation du fin film liquide qui recouvre la paroi intérieure d'une bronche de forme cylindrique, comme dans la figure. Utiliser des coordonnées cylindriques r, θ, z alignées avec l'axe du cylindre et supposer une axisymétrie dans l'état de base et les perturbations (supposer donc une indépendance de θ). Nous notons H , l'épaisseur de la couche de mucus à l'équilibre et R , le rayon intérieur de cette couche. Le rayon extérieur est donc $R + H$. La tension de surface est γ et on ignore la gravité. La densité du fluide est noté ρ . Même si le mucus est un fluide très complexe, il convient de le modéliser dans un premier temps comme un fluide simple, soit parfait, soit Newtonien avec une viscosité dynamique η constante.

1 Critère de stabilité énergétique

Lors du traitement de l'instabilité de Rayleigh Plateau, nous avons proposé un critère de stabilité énergétique. Adapter ce critère énergétique à situation présente de la figure 1.1. On étudie une zone de longueur L et on compare les situations film plat et bouchon. On suppose que les interfaces proche du bouchon sont des calottes hémisphériques de rayon R_s et que les volumes V_1 et V_2 sont conservés. Est-ce que ce critère d'instabilité énergétique dépend de H ?

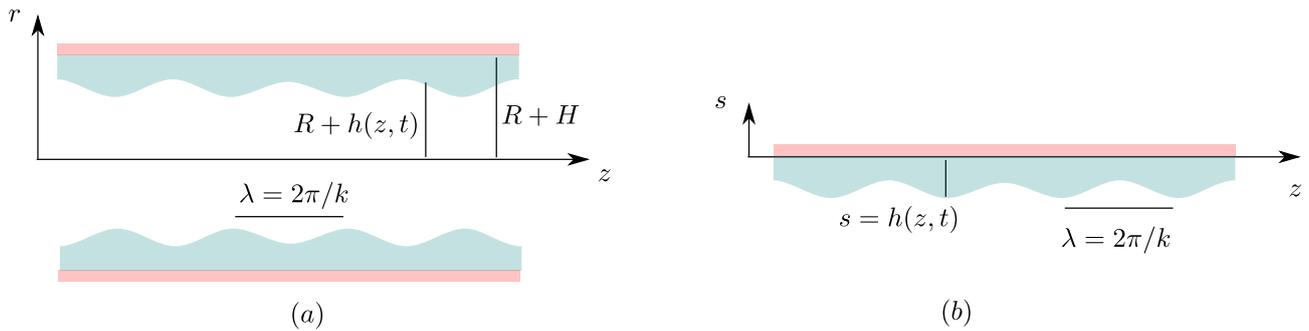


FIGURE 1.2 – Schémas pour l'étude de stabilité linéaire du film, (a) limite fluide parfait, (b) limite fluide très visqueux

2 Stabilité linéaire, limite fluide parfait

Réaliser une analyse de stabilité linéaire du film dans la limite non-visqueuse en passant par toutes les étapes usuelles (définition de l'état de base, linéarisation du problème, relation de dispersion, ...). Par convention, le film perturbé est localisé en $r = R + h(z, t)$ avec $h(z, t)$ la fonction qui décrit la déformation. On note k le nombre d'onde selon z . Donner un critère de stabilité et produire quelques graphes qui utilisent un adimensionnement adéquat et naturel dans ce problème. Etudier le taux de croissance dans la limite $H/R \ll 1$ du fin film.

3 Stabilité linéaire, limite très visqueuse

On veut introduire la viscosité dans le problème et étudier la déstabilisation d'un fin film. On suppose que

$$H \ll R \quad \text{et} \quad kH \ll 1 \quad (1.1)$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde selon z . Par contre, on ne fait aucune hypothèse sur comment k^{-1} se compare à R afin de préserver la possibilité d'avoir des termes concurrents dans la condition dynamique (cf. eq. 4.10-12 du poly). Dans ce modèle de lubrification, on résout les équations de mouvement simplifiées

$$\begin{aligned} 0 &\approx -\partial_s p + \eta \partial_{ss}^2 u_r \\ 0 &\approx -\partial_z p \\ 0 &\approx \partial_s u_s + \partial_z u_z \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ici $s = r - (R + H)$ est une nouvelle coordonnée locale qui remplace la coordonnée radiale r . A l'équilibre, le film plat est en $s = -H$ et le mur en $s = 0$. Proposer des conditions aux limites visqueuses adéquates sur la surface du film en prenant inspiration sur l'exercice 2.4.2 du polycopier. Réaliser quelques courbes qui montrent le taux de croissance dans ce modèle et comparer au cas non-visqueux.

4 Références

Trouver quelques références bibliographiques sur le sujet de l'instabilité de Rayleigh-Plateau dans les bronches.

Chapitre 2

Instabilité de Faraday

Dans ce projet, on étudie l'instabilité de Faraday. On combine quelques éléments théoriques et quelques calculs numériques (légers). Nous tentons de répondre à une question pragmatique : comment produire un diagramme de phase qui nous montre quelles ondes seront instables dans une expérience donnée. D'abord on fait l'exercice en 2D. Ensuite on se place dans un bassin cylindrique et on adapte la théorie au cas 3D.

1 Comprendre l'analyse de stabilité perturbative

En cours nous avons caractérisé la croissance d'une onde k avec l'analyse de Floquet. Un notebook Jupyter qui encode cette méthode de Floquet a été fourni. Cette méthode fonctionne bien mais elle reste un peu laborieuse à mettre en oeuvre. Si

$$\epsilon = \frac{a\omega_f^2}{\rho + \gamma k^2/\rho} \ll 1 \quad (2.1)$$

on peut faire une analyse perturbative. Cette analyse donne une formule explicite approximative pour le taux de croissance, qui est de très bonne qualité dans la limite $\epsilon \ll 1$. Le premier objectif du projet est de bien comprendre l'analyse perturbative de la première résonance, $\Omega \approx 1$. Commencer donc par reproduire et détailler les calculs qui sont dans le poly. Lors de l'entretien, je vous interrogerai sur ce modèle perturbatif.

2 Diagramme de stabilité non-visqueuse (2D)

Dans une expérience 2D, on remplit un réservoir de longueur L jusqu'à la hauteur H fixe. Les paramètres g, γ, ρ sont également fixes pour un fluide donné. On imagine que l'amplitude de vibration a est fixe aussi. Le seul paramètre de contrôle variable qui reste est donc ω_f , la fréquence de vibration.

Le but de cet exercice est de réaliser un programme Python qui montre le taux de croissance réel $Re(s)$, selon la théorie perturbative, en fonction de ω_f la fréquence de vibration et pour les 10 plus petits nombres ondes $k = k_n = n\pi/L$ admissibles dans ce bassin de taille L .

Les expériences sur l'instabilité de Faraday sont faites dans des réservoirs de taille d'une vingtaine de centimètres. La couche d'eau est souvent juste un centimètre de haut. Utiliser les paramètres de l'eau en combinaison avec de l'air. Les fréquences de vibration sont rarement en dessous de quelques dizaines de Hz. Prenez des amplitudes a suffisamment petites pour rester dans la limite $\epsilon \ll 1$.

3 Diagramme de stabilité visqueuse (2D)

La viscosité introduit une atténuation de l'onde. Pour de courtes longueurs d'ondes (des ondes capillaires) et de faibles viscosités, on peut utiliser la formule

$$\alpha_v = 2\nu k^2 \quad (2.2)$$

comme taux d'atténuation visqueuse. Faire un diagramme de stabilité avec viscosité dans le même plan, $Re(s)$ en fonction de ω_f .

4 Théorie linéaire pour un réservoir cylindrique (3D)

En réalité, aucune expérience 2D existe. La plupart des expériences a été faites dans un réservoir de liquide cylindrique de rayon R . Il faut donc adapter l'analyse de stabilité de la section 9.2 et au cas cylindrique. Quelques indications. Le potentiel ϕ solution du problème de Laplace est de la forme

$$\phi = A(t)J_m(kr)e^{im\theta} \cosh(k(z+H)) \quad (2.3)$$

Ici J_m est une fonction de Bessel et $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ un nombre d'onde azimuthal entier. Si on choisit la hauteur convenablement

$$h(r, \theta, t) = B(t) \dots? \quad (2.4)$$

alors on montre que la croissance de l'amplitude $B(t)$ de l'onde au nombre d'onde k est toujours contrôlée par l'équation (9.15 du poly) et par extension, par la formule (9.48 du poly) dans l'analyse asymptotique.

La plus grande différence entre les théories pour le cas 2D et le cas cylindrique réside dans les nombres d'onde k qui sont admissible. En 2D, nous avons eu $k = k_n = n\pi/L$. En 3D cylindrique, ceci doit être remplacé par

$$k = k_{m,n} = \zeta_{m,n}/R \quad (2.5)$$

Montrer que l'imperméabilité de la paroi radiale en $r = R$ impose une relation qui fixe les nombres $\zeta_{m,n}$. Exprimer cette relation avec les fonctions $J_{m\pm 1}(\zeta_{m,n})$, utilisant les relations de récurrence des fonctions de Bessel (regarder sur internet). Ceci donne une formule implicite pour les racines $\zeta_{m,n}$ de la forme

$$\dots J_{m+1}(\zeta_{m,n}) + \dots J_{m-1}(\zeta_{m,n}) = 0 \quad (2.6)$$

Pour tout m entier donnée, cette relation a une infinité de solutions positives $0 < \zeta_{m,0} < \zeta_{m,1} < \zeta_{m,2} < \zeta_{m,3} < \dots$ dénombrables par l'indice $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Une fois ces $\zeta_{m,n}$, on connaît k et il est alors possible d'évaluer la formule (9.48 du poly) et d'estimer la dissipation visqueuse.

5 Diagramme de stabilité (3D)

Nous voulons un programme qui donne les taux de croissance de plein d'ondes en fonction de ω_f , adapté au cas cylindrique. Commencer par définir les paramètres fixes. Ensuite, calculer les nombres $\zeta_{m,n}$ qui définissent les nombres d'ondes k admissibles. Pour cela, on suggère l'approche suivante.

1. Créer une fonction qui, à la réception de ζ , m et n calcule le membre de gauche de la relation algébrique (2.6). Les fonctions de Bessel sont encodées dans la librairie `scipy.special`.
2. Pour un m donné, calculer cette fonction sur un intervalle $\zeta \in]0, \dots]$ suffisamment grand et fin. Estimer des valeurs de ζ , où il y a des changements de signe dans cette fonction. Ceci vous donne des estimations $\tilde{\zeta}_{m,n}$ des racines.
3. Utiliser la fonction `fsolve` de `scipy.optimize` pour trouver les racines $\zeta_{m,n}$ à partir des estimations $\tilde{\zeta}_{m,n}$.
4. Répéter pour $m \in [0, 20]$ et entier.

Votre programme Python doit générer une matrice qui contient les racines $\zeta_{m,n}$ pour $m \in [0, 20]$ et $n \in [0, 10]$. Une fois tous les nombres d'onde $k_{m,n} = \zeta_{m,n}/R$ admissibles connus, on peut utiliser la formule (9.48 du poly) pour calculer le taux de croissance de chacune de ces ondes.

Remarque : Loin du seuil de l'instabilité, de très nombreuses ondes sont instables et les diagrammes sont alors très moches. Jouer sur l'amplitude a et la viscosité pour faire un diagramme où peu d'ondes sont instables. Ce diagramme peut servir pour faire le design d'une expérience proche du seuil.

Chapitre 3

Etude numérique de l'instabilité centrifuge

Dans ce projet, on étudie l'instabilité centrifuge de manière numérique. Le but est de produire le diagramme de Taylor, c.a.d. la courbe de stabilité marginale de la figure 6.4.b à la page 69 du poly. Ce sujet s'adresse aux étudiants qui sont à l'aise avec la programmation en Python et qui connaissent la méthode des différences finies. En pratique, tout se passe dans le notebook Jupyter TC_num.ipynb, ici on résume les étapes du projet.

1 Comprendre le problème à résoudre

On s'intéresse à la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette qui se réalise entre deux cylindre de rayons $R_1 < R_2$ et tournants à des vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 . Cet écoulement est

$$U_\theta = Ar + Br^{-1} \quad , \quad A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad , \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (3.1)$$

Le système d'équations pour les perturbations linéaires est donné dans le poly (équation 6.19) et doit être résolu pour $r \in [R_1, R_2]$. Sur le bord la vitesse s'annule (6.20 du poly). Commencer par retrouver ces équations afin de vous familiariser avec le problème.

Dans le code numérique, on utilise une version adimensionné des équations relative aux échelles

$$[r] = R_1, \quad [t] = R_1^2/\nu, \quad [\mathbf{u}] = U, \quad [q] = U\nu/R_1 \quad (3.2)$$

Ici U est arbitraire car le problème est linéaire. Dans le système d'équations adimensionnée on trouve deux paramètres

$$\Lambda = \frac{AR_1^2}{\nu} = \frac{\alpha Re_2 - Re_1}{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)} \quad , \quad \Gamma = \frac{B}{\nu} = \frac{\alpha Re_1 - Re_2}{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)} \alpha \quad (3.3)$$

qu'on exprime avec les nombres sans dimension

$$Re_1 = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad , \quad Re_2 = \frac{\Omega_2 R_2 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad , \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.4)$$

qui sont utilisés par Taylor. Vérifier toutes ces formules. **Dans tout le projet, on fixe le rapport des deux rayons $\alpha = 1.137$, exactement comme dans l'expérience de Taylor.**

L'invariance de l'état de base selon z et sa stationnarité, permet de proposer une solution modale de la forme :

$$[u_r, u_\theta, u_z, q] = [V_r(r), V_\theta(r), iV_z(r), Q(r)] e^{ikz} e^{st} \quad (3.5)$$

On introduit ici un nombre d'onde k selon z et s est le taux de croissance. Remarque aussi que l'unité imaginaire i a été ajoutée comme préfacteur devant la fonction V_z dans u_z . Avec cette astuce, le jeu d'équations définissant les profils radiaux $V_r(r), V_\theta(r), V_z(r), Q(r)$ devient réel. Reproduire le jeu d'équations pour $V_r(r), V_\theta(r), V_z(r)$ et $Q(r)$.

2 Comprendre le code numérique

Le problème de stabilité est complexe à résoudre car on ne dispose pas de fonctions élémentaires adéquates pour représenter la variation radiale. L'idée du code numérique est résoudre cette structure radiale des champs avec la méthode différences finies. On transforme le problème aux valeurs propres continu en un problème aux valeurs propres algébrique de la forme

$$s\mathbf{O}_g\mathbf{X} = \mathbf{O}_d\mathbf{X} \quad (3.6)$$

Ici \mathbf{X} est un grand vecteur qui contient les valeurs nodales de $V_r(r)$, $V_\theta(r)$, $V_z(r)$ et $Q(r)$. Les matrices \mathbf{O}_g et \mathbf{O}_d de gauche et de droite, sont directement reliées aux équations et aux formules de différences finies. Tout le détail est donné dans le notebook Jupyter TC_num, mais on vous conseille toutes les étapes de la discrétisation sur une feuille de papier afin de bien comprendre les subtilités (maillage différent pour vitesse et pression, gestion des conditions aux limites).

Une fois les matrices \mathbf{O}_g et \mathbf{O}_d construites, on peut facilement résoudre le problème aux valeurs propres avec les méthodes de la librairie `scipy.linalg`. Ce calcul numérique donne un grand nombre de valeurs propres s , mais pour nous, il suffira de s'intéresser aux modes les plus instables, qui ont le plus grand $Re(s)$. En pratique, le programme sera utilisé pour calculer un taux de croissance

$$s = f(Re_1, Re_2, \alpha, k) \quad (3.7)$$

pour un jeu de paramètres Re_1, Re_2, α, k donné.

3 Cylindre extérieur au repos : seuil d'un mode k

On s'intéresse à un cas particulier $\alpha = 1.137$ et $Re_2 = 0$: le cylindre extérieur ne tourne donc pas. Dans le diagramme de Taylor (figure 6.4.b à la page 69 du poly), on explore donc l'axe vertical. On fixe le nombre d'onde à

$$k = 1/(\alpha - 1) \quad (3.8)$$

Ici $\alpha - 1$ représente la largeur adimensionnée du gap entre les deux cylindres. Le mode avec ce k sera donc un rouleau avec un rapport d'aspect proche de 1. Utiliser le code numérique pour repérer à la main, le "seuil" de l'instabilité de ce mode. Il s'agit d'identifier la valeur critique du paramètre $Re_{1,c}$ au delà duquel ce mode avec ce k a un taux de croissance $Re(s) > 0$.

4 Nouveau programme : le seuil Re_1 comme une valeur propre

On remplace $Re_1 = Re_{1,c}$ dans l'équation (3.7) pour se placer au seuil de l'instabilité où le taux de croissance $s = 0$ (on suppose le mode non-oscillant au seuil). Alors

$$0 = f(Re_{1,c}, Re_2, \alpha, k) \Rightarrow Re_{1,c} = \Phi(Re_2, \alpha, k) \quad (3.9)$$

Cette relation permet juste de constater que le seuil $Re_{1,c}$ est une fonction de trois paramètres α , Re_2 et k . Chaque onde k a effectivement son propre seuil, à l'instar de la figure 3.4 du poly, pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Faire un programme numérique nouveau qui calcule le seuil de l'instabilité comme une valeur propre. Il suffit de remplacer $s = 0$ et $Re_{1,c}$ dans le système d'équations linéaires, puis de récrire ce système de manière à séparer $Re_{1,c}$ comme préfacteur d'un terme de gauche. Dans le problème, ça donne

$$Re_{1,c}\mathbf{O}_g\mathbf{X} = \mathbf{O}_d\mathbf{X} \quad (3.10)$$

Ici les matrices \mathbf{O}_g et \mathbf{O}_d sont différentes et à identifier (sur une feuille de papier). Faire attention avec les points de bords car elles demandent une attention particulière. Encoder ces matrices en Python et calculer le seuil comme une valeur propre.

Vérifier que le code marche bien en retrouvant le $Re_{1,c}$ de l'exercice précédent.

5 Minimisation sur k

Dans le diagramme de Taylor (figure 6.4.b à la page 69 du poly), on ne voit plus aucune trace du nombre d'onde k . En effet, la courbe qui y est montrée est plutôt

$$Re_{1,c}^{min}(Re_2, \alpha) = \min_k(Re_{1,c}(Re_2, \alpha, k)) \quad (3.11)$$

et toujours pour $\alpha = 1.137$ fixe. Si on veut comparer à Taylor, il faut donc réaliser une minimisation selon k sur la valeur du seuil $Re_{1,c}$. C'est un peu comme dans le problème de convection thermique (figure 3.4).

Réaliser une telle minimisation sur Python n'est pas super difficile, car les algorithmes de minimisation sont déjà codés pour vous (plus de détails dans le notebook). Votre objectif est donc de construire une fonction qui retourne le seuil $Re_{1,c}^{min}(Re_2, \alpha)$ pour un Re_2 et α donné. On conseille de programmer cette fonction de manière à qu'elle appelle le code de la section précédente.

Faire un test sur le cas $\alpha = 1.137$ et $Re_2 = 0$. Votre seuil minimal doit être proche de 120 et plus bas que le seuil $Re_{1,c}$ trouvé pour $k = 1/(\alpha - 1)$. Afficher le k optimal à l'écran et montrer la structure spatiale du mode.

6 Varier Re_2 et calculer $Re_{1,c}^{min}$

La dernière étape du projet consiste à produire la courbe de stabilité marginale de Taylor. Il faut pour cela construire les données

Re_2	-500	-450	-400	...	-50	0	50	...	400
$Re_{1,c}^{min}$

toujours pour le même $\alpha = 1.137$ fixe. Avec une boucle et la fonction de la section précédente on peut y arriver. Affichez ensuite $Re_{1,c}^{min}$ en fonction de Re_2 , pour trouver la courbe de Taylor.

Chapitre 4

Instabilité de Rayleigh-Bénard & Marangoni

Dans ce projet, vous devez étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni en présence d'une couche de gaz thermalisé. Il s'agit d'un projet inspiré de l'exercice 3.5.2 du poly. On considère l'état de base de la figure 4.1, ci-dessous

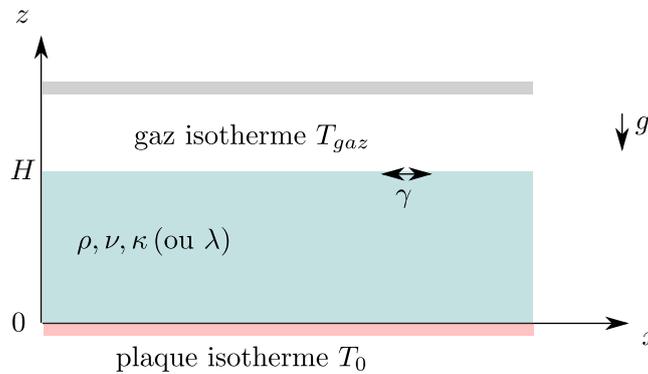


FIGURE 4.1 – On étudie une couche de liquide chauffée à température T_0 en bas, en contact avec un gaz thermalisé à température T_{gaz}

On imagine une couche de liquide de hauteur H avec densité ρ , viscosité cinématique ν , diffusivité thermique κ et conductivité thermique λ . Au dessus du liquide, on trouve un gaz à température T_{gaz} constante. La couche de liquide est chauffée par en bas à l'aide d'une plaque isotherme à température $T_0 > T_{gaz}$. La tension de surface de l'interface air-liquide est notée γ et g est la gravité. On s'intéresse à la stabilité hydrodynamique de cette couche de liquide, qui est initialement au repos. On suppose l'écoulement invariant selon y .

Nous utilisons l'approximation Boussinesq autour de l'état de référence $T = T_0$ et nous maintenons viscosité, diffusivité et conductivité thermique constants et à la valeur de référence

$$\nu = \nu_0 \quad , \quad \kappa = \kappa_0 \quad , \quad \lambda = \lambda_0 \quad (4.1)$$

La densité et la tension de surface peuvent par contre varier linéairement avec la température

$$\rho \approx \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad , \quad \gamma \approx \gamma_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (4.2)$$

Le coefficient $\beta > 0$ est le coefficient de dilation thermique volumique. Le coefficient $\alpha > 0$ caractérise la baisse relative de tension de surface avec la température. Le liquide doit adhérer sur la surface du bas et la température y est fixée

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0 \quad , \quad T|_{z=0} = T_0 \quad (4.3)$$

L'interface qui sépare l'air et le liquide est supposée indéformable. La pression est continue et il peut y avoir une contrainte tangentielle due au gradient de tension de surface. On y a donc les conditions aux limites hydrodynamiques

$$u_z|_{z=H} = 0 \quad , \quad p|_{z=H} = p_{gaz} \quad , \quad \eta \partial_z u_x|_{z=H} = \partial_x \gamma|_{z=H} \quad , \quad p|_{z=H} = p_{gaz} \quad (4.4)$$

Ici p_{gaz} est la pression du gaz et $\eta = \eta_0 = \rho_0 \nu_0$ la viscosité dynamique de référence du liquide. Au niveau thermique, on modélise la présence du gaz au dessus du liquide par une loi d'échange

$$-\lambda \partial_z T|_{z=H} = h(T|_{z=H} - T_{gaz}) \quad (4.5)$$

Cette loi dit qu'il va y avoir un flux de chaleur du liquide vers le gaz, si le liquide est plus chaud que le gaz. Le coefficient $h > 0$ est un coefficient d'échange thermique, qu'on suppose connu

1 Etat de Base & problème linéaire adimensionné

Le liquide peut rester au repos et alors, il se réalisera un état de base thermique conductif. Trouver le profil de la température de base dans le système

$$T_{base}(z) = \dots \quad (4.6)$$

Que vaut la différence de température entre le haut et le bas de la couche liquide

$$\Delta T = T_{z=0} - T_{z=H} \quad (4.7)$$

Ecrire les équations pour les perturbations linéaires et adimensionner-les utilisant les mêmes échelles qu'en cours. Nous allons retrouver les nombres de Prandtl Pr et le nombre de Rayleigh Ra , mais il y a en a d'autres. Trouver le nom de ces paramètres en cherchant sur internet.

2 Analyse de stabilité linéaire

Proposer des solutions modales adéquates, faisant apparaître un nombre d'onde k et un taux de croissance s . Placer vous au seuil de l'instabilité, ou le taux de croissance de l'instabilité est $s = 0$ et le nombre de Rayleigh est $Ra = Ra_c$. Adapter la méthode mise en oeuvre dans l'exercice 3.5.1 à situation présente (attention, il n'y a plus de symétrie équatoriale ici). Réaliser un programme inspiré du notebook Jupyter `RE_instab.ipynb` pour retrouver le nombre de Rayleigh critique et la courbe de stabilité marginale.

3 Rayleigh-Bénard classique vs. Rayleigh-Bénard avec gaz

Faire une étude qui compare la courbe de stabilité marginale dans deux cas : 1) Le cas de Rayleigh-Bénard classique contre 2) Le cas de Rayleigh-Bénard avec une couche gaz et $\alpha = 0$, c.a.d. sans effets de Marangoni. L'instabilité, a-t-elle lieu plus facilement ou plus difficilement dans cette nouvelle configuration 2. Expliquer physiquement pourquoi.

4 Effets Marangoni

Etudier l'importance de l'effet Marangoni en activant. Que se passe-t-il avec le Rayleigh critique si on augmente progressivement le paramètre sans dimension dans le quel figure α . Faire un graphe. La tension de surface ne peut pas éternellement se baisser car on doit avoir $\gamma > 0$. Exprimer cette limitation à l'aide d'une inégalité sur les nombres sans dimensions du problème.

5 Huile et air

Nous étudions une combinaison d'huile (d'olive) et air, afin de comprendre la convection qui existe dans une couche d'huile qu'on chauffe dans une casserole, en cuisine. Trouver des valeurs de paramètres adéquates en ligne ou dans des références. On suppose une fine couche d'huile de l'ordre d'un 1 mm. A partir de quel ΔT y a-t-il convection ?

6 Convection Marangoni sans gravité

L'effet Marangoni permet de la convection, même en absence de gravité. Pour modéliser cette limite, il faut changer l'adimensionnement car le nombre de Rayleigh basé sur g perd son sens. Ecrire les équations pour le problème linéaire dans ce nouveau adimensionnement. Identifier la courbe de stabilité marginale, exprimée avec un nouveau paramètre sans dimension qui remplace Ra .