Institut Villebon Georges Charpak

Licence 3 - Ingénierie S5

Modélisation mathématique de la réponse harmonique d'un filtre RC série

Anthony JUTON, Fabienne BERNARD, Jean-Charles VANEL

Septembre 2022

Sommaire

1 Équation différentielle reliant $U_e(t)$ et $U_s(t)$ **1**

2 Type de solution de l'équation différentielle pour le régime harmonique **2**

3 Résolution de l'équation différentielle **2**

3.1 Méthode 1 : méthode "directe" 2

3.2 Méthode 2 : utilisation de la représentation complexe 3

4 Analyse de la solution de l'équation **4**

On considère dans ce document un filtre RC série, dont le schéma est donné sur la figure 1.

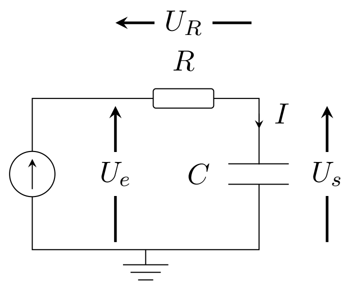

FIGURE 1 – Filtre RC série étudié. La tension d'entrée est celle aux bornes du générateur, notée U_E. La tension de sortie est notée U_s.

1 Équation différentielle reliant $U_e(t)$ et $U_s(t)$

La loi des mailles permet d'écrire une première relation :

$$U_e(t) = U_R(t) + U_s(t) \tag{1}$$

Les relations "courant/tension" des deux composants fournissent deux équations supplémentaires :

$$U_R(t) = RI(t)$$
$$I(t) = C\frac{dU_s(t)}{dt}$$

On peut combiner ces deux expressions selon :

$$U_R(t) = RC\frac{dU_s(t)}{dt}$$

En remplaçant $U_R(t)$ par son expression dans l'équation (1), on obtient l'équation différentielle qui décrit le fonctionnement de ce circuit :

$$U_e(t) = RC\frac{dU_s(t)}{dt} + U_s(t)$$

Q1 En raisonnant sur les dimensions (ou les unités) dans l'équation différentielle, donner la dimension du produit RC.

2 Type de solution de l'équation différentielle pour le régime harmonique

On s'intéresse au cas particulier où la tension $U_e(t)$ évolue sinusoïdalement au cours du temps avec une amplitude E et une fréquence notée f, c'est à dire que son expression est du type :

$$U_e(t) = E \cdot \cos(\omega t)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation, en $\mathrm{rad/s}$.
L'équation différentielle qui décrit l'évolution de la tension $U_s(t)$ devient :

$$U_s(t) + RC\frac{dU_s(t)}{dt} = E \cdot \cos(\omega t)$$

Comment résoudre cette équation ? On cherche si il existe des solutions du type "sinusoïdal de même fréquence", qui s'écrivent :

$$U_{S0}(t) = S_1 \cdot \cos(\omega t) + S_2 \cdot \sin(\omega t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi_s)$$

On cherche donc à déterminer S_1 et S_2 ou bien S et φ_s qui permettraient d'assurer que U_{S0} serait solution de cette équation.

3 Résolution de l'équation différentielle

3.1 Méthode 1 : méthode "directe"

On pose donc :

$$U_{S0}(t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi_s)$$

On recherche s'il existe des valeurs de S et de φ_s qui assurent que $U_{S0}(t)$ soit solution de l'équation différentielle.

On commence par écrire la dérivée de la fonction $U_{S0}(t)$:

$$\frac{dU_{s0}(t)}{dt} = -S \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi_s)$$

Si U_{s0} est solution de l'équation différentielle, alors :

$$S \cdot \cos(\omega t + \varphi_s) - S \cdot RC\omega \sin(\omega t + \varphi_s) = E \cdot \cos(\omega t) \quad (2)$$

En décomposant les termes en cosinus et sinus selon :

$$\begin{aligned}\cos(\omega t+\varphi_s) &= \cos(\omega t)\cos(\varphi_s)-\sin(\omega t)\sin(\varphi_s)\\ \sin(\omega t+\varphi_s) &= \sin(\omega t)\cos(\varphi_s)+\cos(\omega t)\sin(\varphi_s)\end{aligned}$$

on obtient dans le terme de gauche de l'équation (2) 4 termes. On peut alors associer ces termes en regroupant les termes facteurs de $\cos(\omega t)$ et ceux facteurs de $\sin(\omega t)$.

$$\begin{aligned}S\cdot[\cos(\omega t)\cos(\varphi_s)-\sin(\omega t)\sin(\varphi_s)]-S\cdot RC\omega\,[\sin(\omega t)\cos(\varphi_s)+\cos(\omega t)\sin(\varphi_s)] &= E\cdot\cos(\omega t)\\ S\cdot[\cos(\varphi_s)-RC\omega\sin(\varphi_s)]\cos(\omega t)+S\cdot[-\sin(\varphi_s)-RC\omega\cos(\varphi_s)]\sin(\omega t) &= E\cdot\cos(\omega t)\end{aligned}$$

Pour que cette équation soit vérifiée pour toutes les valeurs de t, il est nécessaire que :

$$S\cdot[\cos(\varphi_s)-RC\omega\sin(\varphi_s)] = E \tag{3}$$

$$S\cdot[-\sin(\varphi_s)-RC\omega\cos(\varphi_s)] = 0 \tag{4}$$

De l'équation (4) on en déduit que pour U_{S0} soit solution, il est nécessaire que :

$$\tan\varphi_s=-RC\omega$$

et d'après l'équation (3) il est nécessaire que :

$$S=E\cdot\frac{1}{\cos(\varphi_s)-RC\omega\sin(\varphi_s)}=E\cdot\frac{1}{\cos(\varphi_s)}\cdot\frac{1}{1-RC\omega\tan\varphi_s}=E\cdot\frac{1}{\cos(\varphi_s)}\cdot\frac{1}{1+(RC\omega)^2}$$

Or la formule de trigonométrie $\cos^2(\arctan(x))=\frac{1}{1+x^2}$, permet d'écrire :

$$\cos\varphi_s=\cos(\arctan(-RC\omega))=\frac{1}{\sqrt{1+(-RC\omega)^2}}$$

Finalement, $U_{S0}(t)=S\cdot\cos(\omega t+\varphi_s)$ est solution de l'équation différentielle si :

$$S=E\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

et

$$\varphi_s=-\arctan(RC\omega)$$

3.2 Méthode 2 : utilisation de la représentation complexe

Amplitudes complexes Pour étudier le régime harmonique, on peut travailler avec les nombres complexes en notant :

$$U_s(t)=\mathrm{Re}\left(S\cdot e^{j\omega t+j\varphi_s}\right)=\mathrm{Re}\left(\underline{U_s}\cdot e^{j\omega t}\right)$$

et

$$U_e(t)=\mathrm{Re}\left(E\cdot e^{j\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left(\underline{U_e}\cdot e^{j\omega t}\right)$$

$\underline{U_s}\cdot e^{j\omega t}$ et $\underline{U_e}\cdot e^{j\omega t}$ sont donc deux grandeurs complexes dont la partie réelle correspond à des signaux ...réels.

Les grandeurs

$$\underline{U_s}=S\cdot e^{j\varphi_s} \qquad \text{et} \qquad \underline{U_e}=E$$

sont appelées *amplitudes complexes*. Elles intègrent l'amplitude du signal sinusoïdal (leur module) et le déphasage (leur angle).

Transmittance L'équation différentielle devient :

$$\mathrm{Re}\left(S \cdot \mathrm{e}^{j\omega t + j\varphi_s}\right) + RC \cdot \mathrm{Re}\left(S \cdot j\omega \cdot \mathrm{e}^{j\omega t + j\varphi_s}\right) = \mathrm{Re}\left(E \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right)$$

transformée selon :

$$\mathrm{Re}\left(\underline{U_s} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\left(1 + RCj\omega\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{U_e} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right)$$

Cette égalité des parties réelles sera vérifiée si les complexes correspondants sont égaux :

$$\underline{U_s} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t} \cdot (1 + RCj\omega) = \underline{U_e} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}$$

et comme $\mathrm{e}^{j\omega t}$ est toujours différent de 0, l'égalité peut être ramenée à :

$$\underline{U_s} \cdot (1 + RCj\omega) = \underline{U_e}$$

On peut donc obtenir l'amplitude complexe (amplitude et phase de la sinusoïde) du signal de sortie, à partir de celle du signal d'entrée en multipliant cette dernière par la grandeur :

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

qui est appelée transmittance complexe ou réponse en fréquence du ciruit (c'est cette grandeur que l'on représente dans les diagrammes de Bode, avec des échelles logarithmiques).

$$\underline{U_s} = T(j\omega) \cdot \underline{U_e}$$

Solution Cette équation complexe est vraie pour le module et pour l'argument :

$$\text{Module } S = |T(j\omega)| \cdot E = \left|\frac{1}{1 + RCj\omega}\right| \cdot E = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cdot E$$

$$\text{Argument } \varphi_s = \arg\left(T(j\omega)\right) = -\arctan\left(RC\omega\right)$$

4 Analyse de la solution de l'équation

En conclusion Les deux méthodes précédentes permettent d'établir que si on place un signal d'entrée sinusoïdal en entrée du circuit RC de la figure 1 :

$$U_e(t) = E \cdot \cos\left(\omega t\right)$$

Alors l'évolution temporelle de la tension U_s est :

$$U_s(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cdot E \cdot \cos\left(\omega t - \arctan\left(RC\omega\right)\right)$$

Le module de la réponse en fréquence, appelée aussi transmittance, est une fonction décroissante quand la fréquence (et donc la pulsation) augmente. L'allure de cette fonction est donnée sur la figure 2, l'allure de l'évolution du déphasage est affichée sur la même figure.

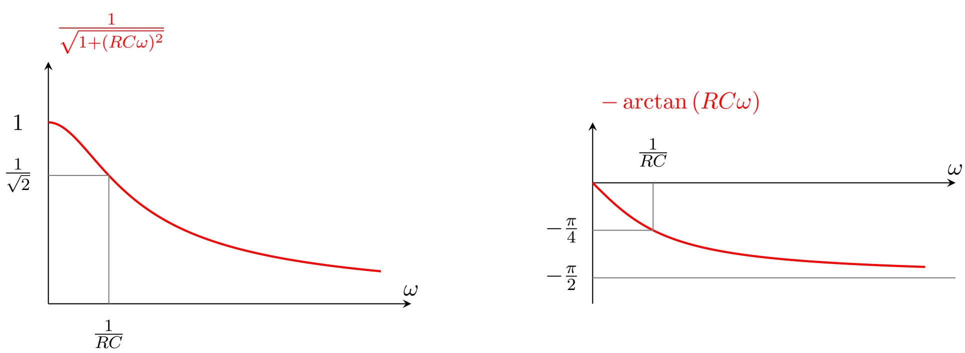

FIGURE 2 – Allure de l'évolution du module et de la phase de la réponse en fréquence d'un filtre RC série en fonction de la pulsation

Pour les fréquences basses, c'est à dire telles que $\omega \ll \frac{1}{RC}$ l'amplitude S de la tension U_s est très proche de l'amplitude E de la tension d'entrée et le déphasage entre les deux tensions est proche de zéro. l'allure des 2 signaux est donnée à gauche sur la figure 3.

Pour les fréquences plus élevées, c'est à dire telles que $\omega \gg \frac{1}{RC}$, l'amplitude S est réduite et un retard apparaît entre la tension d'entrée et la tension de sortie, c'est ce que l'on observe à droite sur la figure 3.

Cas $\omega \ll \frac{1}{RC}$ Cas $\omega \gg \frac{1}{RC}$

FIGURE 3 – Allure de l'évolution de la tension de sortie, selon la fréquence du signal sinusoïdal d'entrée.