Institut Villebon Georges Charpak

Licence 3 - Ingénierie S5

Séance 4 : Remédiation, structuration. Réponse temporelle d'un filtre RC

Anthony JUTON, Fabienne BERNARD, Jean-Charles VANEL

Octobre 2022

Sommaire

Objectifs de la séance

Au cours de cette séance, vous ferez la synthèse de ce qui a été vu aux séances précédentes et vous découvrirez :
- le modèle théorique du comportement temporel des filtres RC et CR.

A l'issue de cette séance, vous serez capable de :
- mesurer la constante de temps d'un filtre du premier ordre à partir de sa réponse indicielle.

1 Synthèse

1.1 Quadripôle, linéarité

Un quadripôle est un circuit à 4 bornes, sur lequel on définit une tension d'entrée (sur laquelle on va connecter une source de tension) et une tension de sortie que l'on va afficher sur l'oscilloscope.

On note $U_{s1}(t)$ la tension de sortie obtenue en plaçant une tension notée $U_{e1}(t)$ en entrée d'un quadripôle. On note de même $U_{s2}(t)$ la tension de sortie obtenue en plaçant une tension notée $U_{e2}(t)$ en entrée et a et b deux réels quelconques.

Définition Un quadripôle est linéaire si et seulement si lorsqu'on applique en entrée une tension $U_e(t)$ qui s'écrit $U_e(t) = a \cdot U_{e1}(t) + b \cdot U_{e2}(t)$, alors la tension de sortie est égale à $U_s(t) = a \cdot U_{s1}(t) + b \cdot U_{s2}(t)$.

Si le quadripôle n'est composé que de composants passifs linéaires (R, L, C), il est linéaire. Si il utilise des diodes, des transistors, des circuits intégrés (ALI), il ne l'est pas forcément.

Un circuit RC, un circuit CR sont donc aussi des quadripôles linéaires.

1.2 Intérêt de l'étude harmonique (sinusoïdale)

D'après le modèle mathématique des séries de Fourier, tout signal continu périodique est décomposable en une somme de sinusoïdes. C'est pourquoi on s'intéresse au comportement du quadripôle soumis à une entrée sinusoïdale dont on fait varier la fréquence. C'est l'étude harmonique. De cette étude harmonique, on peut déduire la sortie du quadripôle, quelque soit l'entrée périodique à laquelle il est soumis.

1.3 Exercice : déterminer un déphasage entre deux signaux, l'amplitude complexe d'un signal

Q1 Pour chacune des courbes de la figure 2, donner l'expression de $v_1(t)$ et de $v_2(t)$, calculer le déphasage de v_2 par rapport à v_1 et indiquer si v_2 est en avance ou en retard sur v_1.

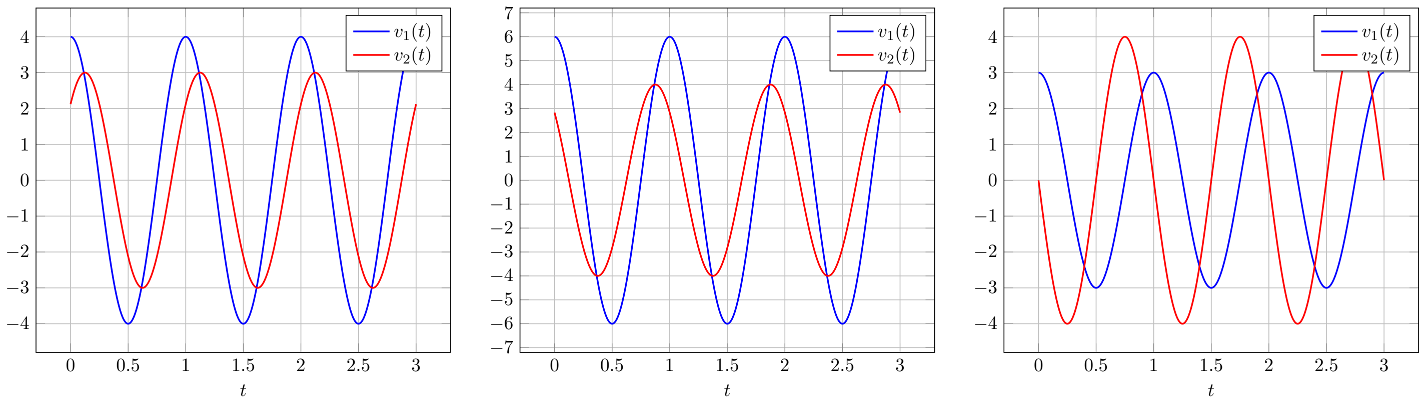

FIGURE 1 – Signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$

Q2 Donner l'amplitude complexe de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour chaque graphique. v_1 est choisie comme origine des phases.

2 Exercice : calcul de la réponse en fréquence d'un filtre CR

On considère le circuit de la figure suivante avec $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 47\,\mathrm{nF}$.

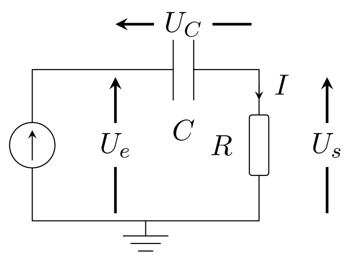

FIGURE 2 – Circuit étudié

Q3 En considérant le comportement d'un condensateur à basse et haute fréquence, expliquer de quel type est ce filtre.

Q4 Ecrire l'équation différentielle liant $U_s(t)$ et $U_e(t)$.

Q5 Dans quelles conditions peut-on utiliser la notation des amplitudes complexes ?

Q6 On se place dans les conditions évoquées ci-dessus. Ecrire cette équation en complexe, résoudre, indiquer la pulsation de coupure ω_c en fonction des valeurs des composants et expliquer le comportement du filtre pour

— $\omega \ll \omega_c$
— $\omega = \omega_c$
— $\omega \gg \omega_c$

3 Etude expérimentale de la réponse transitoire d'un filtre

⇝ Réaliser le circuit de la figure 4 avec $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 10\,\mathrm{nF}$.

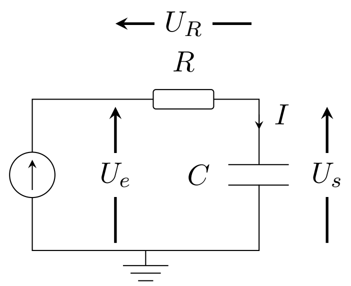

FIGURE 3 – Circuit étudié. La tension d'entrée est celle aux bornes du générateur, notée U_E. La tension de sortie est notée U_s.

Q7 Qu'est-ce qu'un échelon de tension ? Comment utiliser le générateur de fonction pour obtenir un échelon de tension ?

⇝ Appliquer un échelon de tension au circuit et commenter la courbe obtenue.

⇝ Modifier la valeur de la résistance d'un facteur 10. Puis modifier la valeur du condensateur d'un facteur 10. Observer les modifications dans l'évolution du signal de sortie.

Q8 Quelles sont les valeurs de la tension $U_s(t)$

— avant le front montant, que l'on notera U_{S0},
— et à l'« infini », notée $U_{S\infty}$?

Le temps de réponse d'un filtre peut être défini de différentes façons, on parle du temps de réponse à 63%, à 90%, à 95%, ... Pour le mesurer, on mesure donc l'abscisse à 63% (respectivement à 90 ou 95%) de l'évolution entre la valeur initiale et la valeur finale.

Q9 Mesurer le temps de réponse à 63% du circuit. Modifier la valeur de la résistance d'un facteur 10 et mesurer à nouveau ce temps de réponse.

Q10 Quelle est l'influence de la valeur de la résistance sur le temps de réponse ? L'influence de la valeur de la capacité du condensateur ?

4 Modélisation mathématique de la réponse temporelle d'un circuit

On considère le circuit de la figure 4.

4.1 Équation différentielle liant U_e et U_s

On a établi (séance 3) que l'équation différentielle liant l'évolution de la tension de sortie $U_s(t)$ à celle de la tension d'entrée est :

$$U_e(t) = RC\frac{dU_s(t)}{dt} + U_s(t)$$

Pour modéliser la réponse à une variation brusque de la tension d'entrée, on cherche à résoudre cette équation pour une tension U_e de type échelon c'est à dire dont l'expression est :

$$U_e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ E_0 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

4.2 Résolution de l'équation différentielle

Pour tout $t \geq 0$, on recherche la solution U_{sT} de l'équation différentielle suivante :

$$RC\frac{dU_s(t)}{dt} + U_s(t) = E_0$$

En connaissant la valeur initiale, $U_{sT}(0) = 0$.

La solution sans second membre de cette équation est la fonction exponentielle :

$$C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

où C est une constante réelle.

Une solution particulière est donnée par la constante $U_s = E_0$.

La solution générale est donc de la forme :

$$U_{sT}(t) = E_0 + C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour déterminer la valeur de la constante C on écrit la condition initiale $U_{sT}(0) = 0$ et on peut donc établir que $C = -E_0$.

Finalement, l'évolution de la tension de sortie du filtre RC série lors d'un essai indiciel (entrée de type échelon) s'écrit :

$$U_{sT}(t) = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

pour tout $t \geq 0$.

Q11 Tracer l'allure de cette fonction $U_{sT}(t)$

On note $\tau = RC$ la constante de temps du filtre.

Q12 Déterminer la valeur $U_{sT}(t = \tau)$, $U_{sT}(t = 3\tau)$ et $U_{sT}(t = 5\tau)$. En déduire une méthode pour trouver la constante de temps τ et une méthode pour trouver le temps de réponse à 5%.

5 Validation du modèle

Q13 Vérifier le modèle mathématique construit au paragraphe précédent est bien cohérent avec les valeurs mesurées aux questions **Q9** et **Q10**.