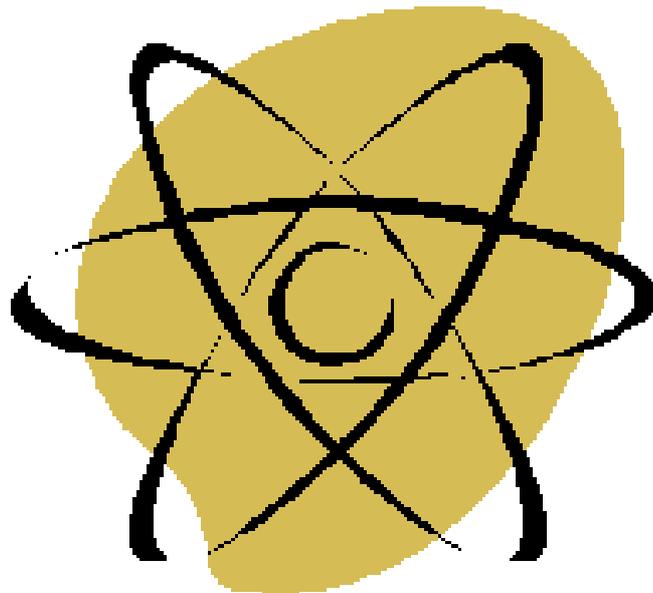


LES DÉBUTS DE LA PHYSIQUE QUANTIQUE



Mathias ALBERT, Azzedine BENNANI et Claudie MORY

Module Phys204
Licence de Physique
Parcours PC et PMI

Table des matières

Introduction	5
1 Les difficultés de la Physique Classique. Premiers phénomènes quantiques observés	7
1.1 Introduction et historique	7
1.1.1 Situation du problème	7
1.1.2 Les Hypothèses généralement admises à la fin du 19 ^e siècle	8
1.1.3 Modifications de ces hypothèses	8
1.2 Analyse des premières expériences pathologiques	9
1.2.1 Interaction rayonnement-matière : le rayonnement du corps noir	9
1.2.2 Interaction rayonnement-matière : l'effet photo-électrique	12
1.2.3 Spectre des atomes et les postulats de Bohr	15
1.2.4 L'expérience de Franck et Hertz	21
1.2.5 L'effet Compton	23
2 La dualité Onde-Corpuscule	27
2.1 Dualité de la lumière : l'expérience des fentes d'Young	27
2.1.1 Rappels sur l'interprétation ondulatoire	28
2.1.2 Interprétation corpusculaire	28
2.1.3 Unification quantique des deux aspects	29
2.2 Dualité de la matière	30
2.2.1 Onde associée de de Broglie	30
2.2.2 L'expérience de Davisson et Germer 1927	32
2.3 Le principe d'indétermination de Heisenberg	33
2.3.1 Notion de paquet d'ondes et inégalités spatiales	33
2.3.2 Inégalité temps-énergie	35
3 Perspectives et applications	37
3.1 L'équation de Schrödinger	37
3.2 La physique classique retrouvée	38
3.3 Quelques applications	40
A Quelques repères historiques	45
B Eléments de mécanique relativiste	47
C Loi de Planck pour le rayonnement du corps noir	48
C.1 Nombre de modes de fréquence ν dans la cavité	48
C.2 Energie moyenne d'un mode	49
Références bibliographiques	50

Introduction

La physique quantique reste, malgré son incontestable succès et son omniprésence (jusqu'à notre expérience quotidienne), un défi pédagogique insoluble. Ceux qui la connaissent savent pourquoi, tant les concepts qu'elle introduit sont éloignés de notre intuition classique. Et pourtant, avec sa cousine, la théorie de la relativité, elles constituent les théories physiques, non seulement les mieux vérifiées à l'heure actuelle, mais aussi les plus riches en applications.

Ainsi, même si une grande majorité des physiciens connaissent très bien cette théorie, l'utilisent chaque jour et écrivent des tas de livres essayant de l'expliquer, elle introduit une limite fondamentale (et d'ailleurs bien d'autres) qui nous bride sur le plan pédagogique. Frédéric Mila, professeur à l'école polytechnique fédérale de Lausanne, l'exprime d'ailleurs très bien à travers l'analogie suivante¹ : "Enseigner la physique quantique est un peu comme éduquer ses enfants. Il n'y a pas de méthode miracle ; on ne peut que limiter les dégâts".

Ce document ne contient donc pas quelque chose d'exceptionnel par rapport à d'autres ouvrages de qualité, mais présente simplement une approche historique des débuts de la physique quantique, à travers les expériences révolutionnaires de la fin du 19^e et du début du 20^e siècle. Enfin, il contient une présentation succincte de quelques applications technologiques et une introduction à l'équation de Schrödinger.

La majeure partie de ce document est tiré des notes de cours de Azzedine Bennani, professeur à l'université Paris sud, qu'il donnait en deuxième année de DEUG, du livre "Initiation à la mécanique quantique" de Elie Belorizky [1] et de la "Bible" Française de la physique quantique, le "Cohen-Tannoudji, Diu et Laloe" [3].

L'essentiel étant dit, il ne reste plus qu'à vous souhaiter une agréable lecture.

¹ Il ne s'agit probablement pas de ses mots exacts mais c'est en tout cas l'esprit de ses paroles.

Chapitre 1

Les difficultés de la Physique Classique. Premiers phénomènes quantiques observés

1.1 Introduction et historique

1.1.1 Situation du problème

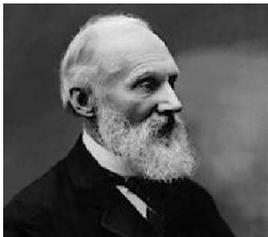


FIG. 1.1 – Lord Kelvin

En 1892, Lord Kelvin, dans son célèbre discours inaugural du 20^e siècle à la société anglaise de physique, annonce fièrement : "La physique est définitivement constituée avec ses concepts fondamentaux... Il y a bien deux petits problèmes : celui du résultat négatif de l'expérience de Michelson et celui du corps noir, mais ils seront rapidement résolus". Manifestement, les physiciens de l'époque, dont Lord Kelvin était un véritable symbole, étaient loin de soupçonner l'impact extraordinaire de ces deux expériences qui, loin d'être négatives, allaient conduire la physique vers deux de ses plus grandes révolutions : la *théorie de la relativité restreinte* et la *physique quantique*.

Malgré tout, il est bon de se remémorer l'état des connaissances de la physique à la fin du 19^e siècle, afin d'apprécier d'avantage les bouleversements qu'elle a subi. A cette époque, la physique que l'on qualifie désormais de classique (par opposition à quantique et/ou relativiste) régnait en maître suite aux incroyables succès de la mécanique de Newton, l'unification de l'électricité et du magnétisme et les progrès sans fin de la thermodynamique. En fait, très peu de phénomènes restaient inexplicables aux vues de ce cadre théorique.



FIG. 1.2 – I. Newton et J.C. Maxwell

C'est seulement dans le cas particulier de certaines expériences portant sur l'interaction de la lumière avec la matière que la théorie classique paraissait incomplète. Ces expériences concernaient l'interaction de la lumière avec les atomes isolés, des molécules ou des électrons¹. Mais comme ces expériences ne devinrent possibles et ne furent réalisées qu'à la fin du 19^e siècle, leur nombre était relativement limité. Toutefois, bien que peu nombreux, ces quelques phénomènes, basés sur des observations expérimentales, furent à la base d'une révolution scientifique extraordinaire, qui allait déboucher sur le développement de la Mécanique Quantique.

L'interprétation de ces expériences conduisit à une hypothèse selon laquelle la lumière présente parfois des propriétés *ondulatoires* et parfois des propriétés *corporelles*². Les corpuscules de lumière furent appelés *photons* : ce sont des "petits grains" de lumière ayant une énergie bien déterminée et une masse nulle.

¹Notons qu'à cette époque certains rejetaient encore l'hypothèse atomique.

²Hypothèse qui fut plus tard généralisée aux particules de matière par Louis de Broglie.

Cette hypothèse révolutionnaire fut rapidement acceptée car elle fournissait une interprétation complète de toutes les nouvelles observations.



FIG. 1.3 – P.S. de Laplace

L'origine du mot quantique vient simplement du Grec *quantum* qui désigne une quantité élémentaire. En fait les hypothèses de la mécanique quantique peuvent se résumer en disant qu'à la fois la matière n'est pas divisible à l'infini, c'est le concept d'atomes déjà introduit à l'antiquité, mais que les échanges d'énergie ont aussi une limite granulaire qui fait que l'on ne peut l'échanger que par paquets bien déterminés. Cette proposition simple conduit pourtant à une reconsidération totale de nos concepts usuels, en particulier à travers la dualité onde-corpuscule.

Et pourtant la physique classique est incontestablement correcte à notre échelle. Evidemment le point clé est "à notre échelle". En effet, à cette échelle, dite *macroscopique*, les quantités de matière et d'énergie mises en jeu sont beaucoup trop grandes par rapport aux différents quanta, de sorte que cette physique est complètement lissée, tout comme en électrostatique, où le nombre de charges présentes est habituellement tellement grand, que le fait que les charges soient des grandeurs discrètes est sans importance.

1.1.2 Les Hypothèses généralement admises à la fin du 19^e siècle

1. Existence d'un *espace absolu* et d'un *temps absolu*. Dans le sens où les objets physiques, ondes, particules..., vivent dans un espace fixe, indépendant de leur existence, de même que le temps s'écoule inexorablement et uniformément en chaque point de l'espace. Leurs propriétés ne dépendent pas de l'endroit ou de l'époque auxquels on se trouve.
2. Tout système physique est *entièrement déterminé* par la donnée d'un certain nombre de paramètres, qui possèdent, à chaque instant, des *valeurs précises*. Par exemple, pour une particule, son état physique est donné par sa position et sa vitesse à chaque instant.
3. Les valeurs de chacun de ces paramètres peuvent être déterminées, au moins en principe, avec une *précision arbitraire*. Il n'existe aucune limite intrinsèque à cette précision. Seules les erreurs de mesures ou encore la méthode de mesure en elle même peuvent altérer la précision sur une observable³.
4. *L'évolution du système dans le temps est entièrement déterminée* si l'on connaît son état antérieur ainsi que les lois fondamentales qui le régissent (équations différentielles).

Ces hypothèses qui semblent relever du bon sens, paraissaient donc comme "absolues", "évidentes", "réelles" ..., et trouvaient leurs confirmations à travers le triomphe des théories de l'époque pour expliquer les phénomènes physiques à notre échelle. Cette articulation intellectuelle a fait de la physique une science rationnelle, déterministe, qui rejetait ainsi nombreuses interventions divines⁴ ou autres artifices pour expliquer les phénomènes naturels. Pierre Simon de Laplace, génie Français des mathématiques et de la physique, et véritable symbole du déterminisme, se plaisait à vanter ce schéma en disant : "donnez moi les conditions initiales de l'univers et je vous calculerais tout ...".

1.1.3 Modifications de ces hypothèses

L'expérience de Michelson et Morley, décrite par Lord Kelvin comme peu problématique, associée au fait que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par transformation de Galilée (changement de référentiel à vitesse constante) conduit les physiciens à remettre en question les fondements mêmes

³Par exemple un ampèremètre récupère une partie du courant qu'il doit mesurer et ne mesure donc pas exactement le bon courant.

⁴On raconte que Napoléon Bonaparte, curieux de tout, "invita" Laplace pour lui expliquer la physique actuelle et sa théorie de l'univers. Quand Laplace eut enfin fini d'exposer sa théorie (en un temps record imposé par Napoléon) sur le déterminisme etc... Napoléon lui fit tout de même remarquer une chose : "mais que faites vous de Dieu dans tout ça?". Et Laplace lui répondit poliment et fièrement : "Sire, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse."

de la mécanique Newtonienne. En particulier Einstein, en 1905, proposa d'abandonner l'hypothèse d'espace et de temps absolus. Il introduit ainsi la fameuse théorie de la relativité⁵.

D'autre part, pour rendre compte des phénomènes physiques à l'échelle atomique, le déterminisme ainsi que l'inexistence de limite intrinsèque à la précision des mesures, ont aussi du être abandonnés. Mais le tatônnement fut bien plus long, allant de Max Planck qui inventa la première théorie des quanta en 1900 pour expliquer l'expérience du corps noir, jusqu'à Paul Dirac qui établit le formalisme général de la mécanique quantique en 1930. L'objectif de ce qui suit est de présenter une partie de ce qui s'est passé pendant ces trente ans à travers les résultats d'expériences historiques qui ont conduit à des concepts aussi étranges que la dualité onde-corpuscule...

1.2 Analyse des premières expériences pathologiques

1.2.1 Interaction rayonnement-matière : le rayonnement du corps noir

Rappels sur le rayonnement

Nous sommes tous familiers avec la lueur (l'éclat) d'une pièce métallique chauffée, qui émet de la lumière visible dont la couleur varie avec la température du métal : de rouge vers 800 degrés Celsius, à jaune et à blanc vers 3000 degrés.

On dit que l'objet rayonne dans le rouge, le jaune ou le blanc. Ce rayonnement, dit *thermique*, provient du mouvement des charges électriques au sein du métal, induit par l'agitation thermique. En effet, l'électromagnétisme classique nous apprend que toute charge électrique en mouvement (accélééré) émet des ondes électromagnétiques⁶ à une fréquence liée à celle de son mouvement. Ce sont ces ondes électromagnétiques que l'on appelle rayonnement et que l'on peut parfois observer à l'oeil si leurs longueurs d'ondes sont dans le domaine du visible ($\sim 400 - 800 \text{ nm}$).

En fait, un objet rouge, jaune ou blanc, n'émet pas que cette couleur. D'autres fréquences, visibles ou invisibles, sont présentes, formant un *spectre de rayonnement*. Seulement des fréquences sont plus abondantes que d'autres, ce qui donne une couleur majoritaire à l'objet chauffé. D'autre part, il n'est pas nécessaire qu'un objet soit aussi chaud que dans les exemples précédents pour rayonner : tous les objets rayonnent continuellement de l'énergie électromagnétique, quelle que soit leur température. A température ambiante, la majeure partie du rayonnement est dans l'infrarouge, donc invisible⁷.

Définition d'un corps noir

Il suit du paragraphe précédent que tout corps porté à une certaine température émet un rayonnement électromagnétique dont les caractéristiques (spectre, puissance ...) dépendent de la *nature* et de la *température* de ce corps.

La capacité d'un corps à rayonner est étroitement liée à sa capacité à absorber le rayonnement. Ceci est normal, puisqu'un corps à température constante est en équilibre thermique avec son environnement, et doit donc absorber de l'énergie de cet environnement au même taux qu'il en émet (sinon sa température augmenterait jusqu'à l'infini). Mais à ce stade il est important de ne pas faire la confusion entre les rayonnements réfléchis et transmis par le corps, auxquels on associe en général la couleur de

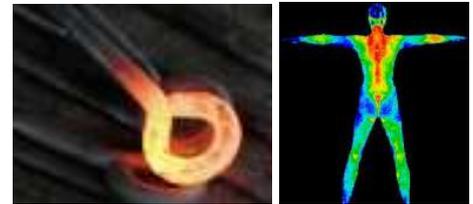


FIG. 1.4 – Le fer chauffé émet un rayonnement thermique dans le visible tandis que le corps humain émet dans l'infrarouge.

⁵Qui n'a rien à envier à la mécanique quantique en matière de phénomènes inintuitifs.

⁶Le rayonnement électromagnétique est en fait une conséquence de la théorie de la relativité ou plus simplement du principe de causalité. En effet on sait de l'électrostatique qu'une charge immobile crée un champ électrique statique dans tout l'espace. Maintenant, si l'on met en mouvement cette charge, la causalité implique que les déformations du champ électrique engendrées ne peuvent pas être instantanées. Par conséquent, elles se propagent sous forme d'ondes électromagnétiques à une vitesse finie, qui est la vitesse de la lumière.

⁷A moins d'être un animal nocturne ou d'être équipé de lunettes infrarouges.

l'objet (les objets nous paraissent blancs car ils renvoient tout le visible alors que les noirs ne renvoient rien (du visible)) et le rayonnement thermique, qui n'affecte que très rarement la couleur du fait qu'à température ambiante ce rayonnement est en général dans l'infrarouge (par contre quand on chauffe un métal il devient important car le rayonnement peut avoir lieu dans le visible).



FIG. 1.5 – Wilhelm Wien.

Afin de comprendre les caractéristiques essentielles de ce rayonnement thermique, celles qui vont être communes à une grande gamme de matériaux considérés (au moins qualitativement), il est commode de considérer un corps "parfait" qui absorbe tout le rayonnement incident, quelle que soit sa fréquence (ou longueur d'onde). Un tel corps, *absorbant parfait* est appelé *corps noir*, dans le sens où il n'a pas de couleur au sens usuel. Mais cela ne veut pas dire qu'il ne rayonne pas.

L'importance d'introduire ici le corps noir idéal est qu'il permet de s'affranchir de la nature exacte de l'objet qui rayonne. On montre en effet que tous les corps noirs se comportent de manière identique à température donnée, indépendamment de la *nature* de leur constituant et de la *forme* de ce constituant : le

rayonnement du corps noir obéit à une loi universelle.

Expérimentalement, une excellente image du corps noir est obtenue par une enceinte de forme quelconque percée d'un petit trou d'aire dS (figure 1.6). Tout le rayonnement pénétrant par dS dans l'enceinte y est piégé car il y subit une série de réflexions plus ou moins diffusantes, de sorte qu'il a très peu de chance d'en ressortir (ou plutôt une très faible fraction de l'énergie incidente peut ressortir par dS). L'enceinte se comporte donc comme un excellent absorbant du rayonnement pénétrant. Inversement, une partie très faible du rayonnement émis par la face interne de la paroi s'échappe par dS . Ce double échange permet au corps noir d'atteindre un équilibre thermique, lorsqu'à une température donnée, il "baigne" dans un rayonnement électromagnétique. Ce sont les propriétés de ce rayonnement à l'équilibre qui nous intéressent ici.

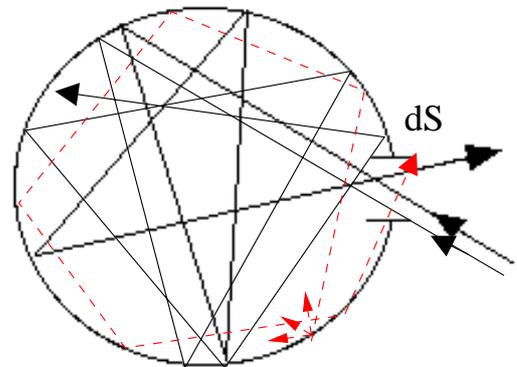


FIG. 1.6 – Corps noir modélisé par une cavité. En pointillé rouge c'est le rayonnement émis par la surface et en noir celui absorbé.

Spectre du corps noir

La question qui vient désormais naturellement est celle du spectre du corps noir. Et l'on va voir que c'est celle-ci qui souleva un des premiers problèmes de la physique classique à la fin du 19^e siècle.

Expérimentalement, il "suffit" de mesurer, pour une température fixée, l'intensité lumineuse issue du trou, $I(\nu, T)$ provenant de chaque fréquence ν ou encore la densité spectrale d'énergie $\epsilon(\nu, T)$. C'est ce qu'a fait par exemple Wilhelm Wien en 1896 en utilisant un four en guise de corps noir. Les résultats expérimentaux sont reportés ci-contre (fig 1.7) et sont en parfait accord avec notre intuition. En effet, conformément à ce que l'on a dit dans les paragraphes précédents, un corps à une température donnée rayonne sur une certaine plage de fréquences avec un maximum à une fréquence donnée. Ce maximum, qui dépend de la température donne la "couleur" (encore une fois il ne faut pas confondre avec les rayons réfléchis) principale tout comme un métal chauffé devient rouge. Cette couleur évolue avec la température vers les hautes fréquences (ou petites longueurs d'ondes), ce qui est en accord avec l'expérience du métal chauffé. D'autre part, le corps rayonne d'avantage quand il est plus chaud.

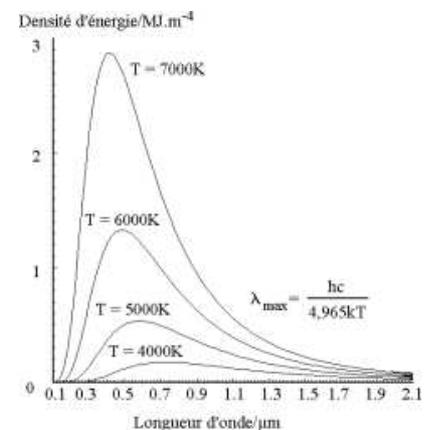


FIG. 1.7 – Spectre du corps noir.

L'intégrale sous chaque courbe donne la densité totale d'énergie $\mathcal{E}(T) = \int_{\nu=0}^{+\infty} \epsilon(\nu, T) d\nu$, que l'on trouve proportionnelle à T^4 . C'est la loi de Stefan-Boltzmann.

Echec de la physique classique : le formule de Rayleigh et Jeans

En 1900, Rayleigh et Jeans ont utilisé l'électromagnétisme classique pour déterminer le spectre du corps noir. Ils ont alors montré que la densité d'énergie devait prendre la forme suivante :

$$\epsilon(\nu, T) = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 \quad (1.1)$$

où k est la constante de Boltzmann.

Cette formule n'est manifestement pas en accord avec l'expérience. Elle est tout au plus une approximation aux faibles fréquences (grandes longueurs d'ondes). Pire encore, cette formule accorde une contribution infinie pour des fréquences qui tendent vers l'infini. Non seulement cette loi ne prédit pas l'existence d'un maximum d'intensité à une fréquence donnée mais en plus elle conduit à une énergie totale infinie. En effet si on somme la contribution de toutes les fréquences à l'énergie vous obtenez : $\mathcal{E}(T) = \int_{\nu=0}^{+\infty} \epsilon(\nu, T) d\nu \rightarrow \infty$. C'est ce que l'on appelle la catastrophe ultraviolette, qui rend l'interprétation classique du rayonnement du corps noir inacceptable.

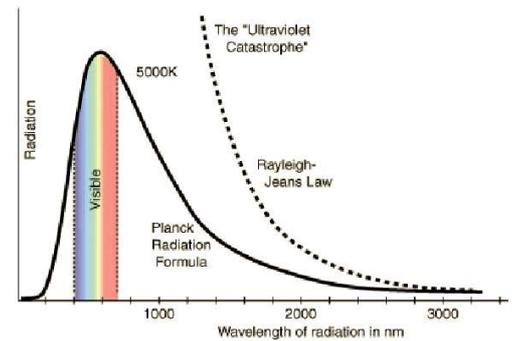


FIG. 1.8 – Spectre du corps noir.

Première théorie des quanta : la formule de Planck

Le 14 décembre 1900, Max Planck expose son interprétation théorique du rayonnement du corps noir à la Société Allemande de physique. Il modifie les hypothèses de Rayleigh et Jeans en admettant *qu'à une fréquence donnée, les échanges d'énergie ne portent que sur des entiers de quanta d'énergie, chacun valant $h\nu$* . Autrement dit, il suppose que les échanges d'énergie électromagnétique ne sont pas divisibles à l'infini mais en plus que l'énergie de ces paquets élémentaires dépend de la fréquence du rayonnement. A partir de là, il reprend le calcul de Rayleigh et Jeans et l'expression qu'il obtient pour la densité d'énergie s'ajuste parfaitement aux données expérimentales :

$$\epsilon(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.2)$$

En particulier cette densité d'énergie tend bien vers 0 quand la fréquence tend vers l'infini, vaut 0 à fréquence nulle et le maximum se déplace vers les hautes fréquences (courtes longueurs d'ondes) lorsque la température augmente. D'autre part, la formule de Planck contient celle de Rayleigh et Jeans, qui n'en est qu'une approximation à basse fréquence. En effet, un simple développement limité de (1.2) pour $h\nu \ll kT$ conduit rapidement à la formule (1.1). Il s'agit historiquement de la première théorie des quanta, qui commença à bouleverser la manière de penser des physiciens de l'époque et annonça *les débuts de la physique quantique*. Au passage, Planck introduit ici pour la première fois une constante fondamentale de la physique qu'il nomma *quantum d'action*, pour des raisons qui deviendront claires par la suite. Cette constante h , qui vaut environ $6.63 \cdot 10^{-34}$ J.s, porte désormais son nom.

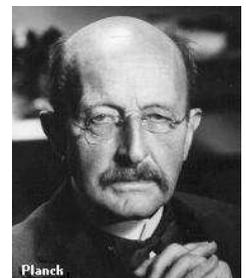


FIG. 1.9 – M. Planck.

Application 1 : longueur d'onde maximale du soleil

Une première application intéressante du corps noir est l'étude de la longueur d'onde dominante du soleil. En effet si l'on considère le soleil comme un corps noir qui émet du rayonnement thermique à la

température $T_S = 6000 K$ on en déduit alors $\lambda_{max}^S = 483 nm$. Cette longueur d'onde se trouve dans le visible, ce qui est loin d'être un hasard. En effet, il s'agit seulement d'une conséquence de l'évolution des espèces. Cette gamme de longueurs d'ondes, que nous appelons le visible, est la plus abondante sur Terre c'est pourquoi notre système visuel s'est adapté pour être plus sensible sur cette palette.

Application 2 : l'effet de serre

Une autre application beaucoup plus impressionnante se trouve dans l'interprétation de l'effet de serre. Dans une serre, le rayonnement incident est le plus intense à $\lambda_{max}^S = 483 nm$, et il traverse facilement le verre. Une fois à l'intérieur, le rayonnement a trois alternatives :

- Il traverse la Terre et les objets à l'intérieur de la serre (rayonnement transmis) et est donc perdu.
- Il est réfléchi par le sol ou les objets qui se trouvent dans la serre et fait demi tour avec la même longueur d'onde. Le verre étant transparent à cette longueur d'onde il pourra facilement faire chemin inverse et quitter la serre. Il n'y a donc pas d'accumulation d'énergie et donc d'effet de serre associé.
- Enfin il peut être absorbé par le sol et les autres objets qui réémettent du rayonnement thermique à une longueur d'onde différente. La température de la Terre étant de l'ordre de 300 K, la longueur d'onde du rayonnement réémis est beaucoup plus grande : $\lambda_{max}^T = 9660 nm$, qui est dans l'infrarouge. Or le verre étant opaque à l'infrarouge, la serre va alors se chauffer puisque le rayonnement incident y pénètre alors que le rayonnement réémis s'y trouve piégé.

La Terre elle-même peut être considérée comme une immense serre, où l'atmosphère joue le rôle du vitrage, car la vapeur d'eau et le CO_2 sont d'excellents absorbants de l'infrarouge réémis. Ainsi sans ce processus de changement de longueur d'onde, la température sur Terre n'aurait jamais pu être ce qu'elle est et permettre l'apparition de la vie sur Terre.

1.2.2 Interaction rayonnement-matière : l'effet photo-électrique

Un autre casse tête des physiciens de l'époque fut le résultat de l'expérience de Hertz sur l'effet photo-électrique en 1887. Cette expérience concerne aussi l'interaction entre le rayonnement et la matière à l'échelle microscopique.

L'expérience de Hertz et les pronostics classiques

L'idée de cette expérience est d'envoyer de la lumière sur une plaque de métal (cathode) pour en arracher des électrons. Ces électrons peuvent ensuite être collectés par une anode afin de mesurer le courant d'électrons arrachés. Il s'agit ainsi d'étudier ce courant en fonction des caractéristiques du rayonnement incident : longueur d'onde, puissance lumineuse...

Plus précisément le montage expérimental (figure 1.11) se compose d'une photocathode C irradiée par un rayonnement électromagnétique dont on peut imaginer faire varier le flux ϕ ou encore l'intensité I ou la puissance P , qui ne sont que des grandeurs physiques qui décrivent en gros la même chose, mais aussi la fréquence (ou la longueur d'onde) en changeant la lampe qui éclaire. Si l'énergie apportée est suffisante pour arracher un électron, c'est à dire que l'on communique une énergie supérieure ou égale à l'énergie de liaison W_0 de l'électron au métal, ce dernier est extrait, muni d'une énergie cinétique lui permettant éventuellement de se déplacer vers l'anode. Si ceci est le cas notre nano ampèremètre détectera un courant d'autant plus fort que l'on a d'électrons qui atteignent l'anode.

D'autre part, pour des raisons qui vont devenir rapidement claires, on rajoute une différence de potentiel entre l'anode et la cathode, ajustable par l'expérimentateur. Si celle-ci est positive, elle aide les électrons à arriver jusqu'à l'anode en les accélérant. Par contre si elle est négative elle va pousser les électrons à contre sens et ainsi défavoriser le courant. On s'attend donc qu'en dessous d'une certaine valeur critique $-V_a$ de cette tension, l'énergie cinétique initiale des électrons ne soit plus suffisante pour



FIG. 1.10 – Hertz.

vaincre cette force électrostatique et parvenir jusqu'à l'anode. En dessous de cette valeur, le courant devient donc nul car aucun électron n'arrive à l'anode. A l'autre extrême si l'on met la tension fortement positive, il va arriver un moment où l'on ne pourra pas recueillir plus d'électrons que ceux disponibles (ceux qui ont été arrachés bien sûr) et le courant doit donc atteindre une valeur de saturation. La caractéristique courant-tension du système attendue est représentée à droite sur la figure 1.11.

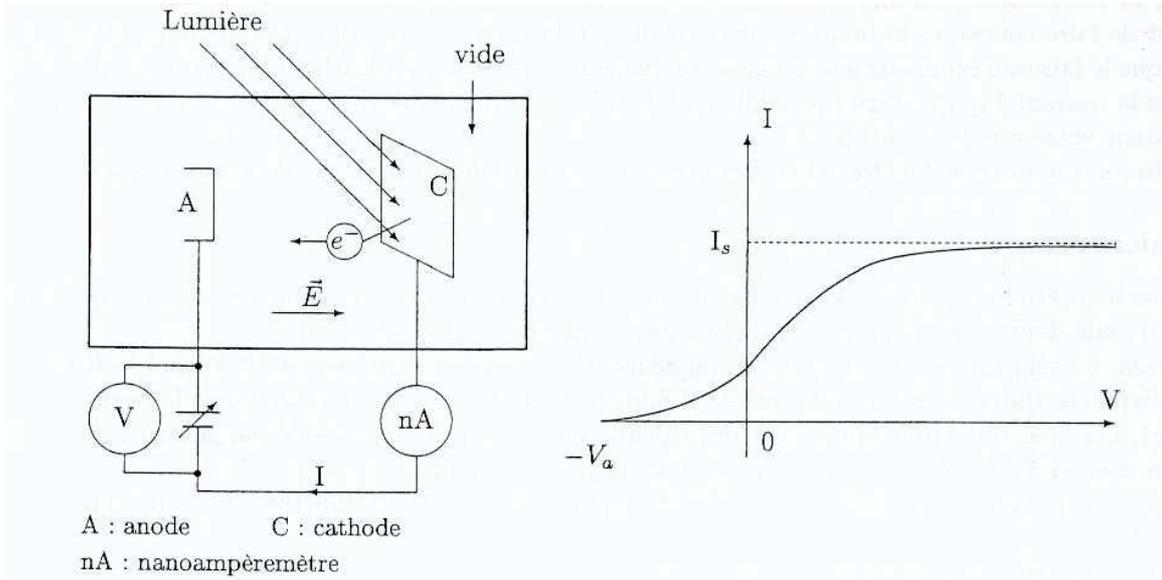


FIG. 1.11 – Schéma de l'expérience de Hertz.

Il s'agit maintenant de faire l'expérience afin de comprendre essentiellement deux choses : de quoi dépendent les valeurs du seuil V_a de tension et l'intensité de saturation du courant. Il y a techniquement 3 paramètres à considérer : la nature du matériau qui va essentiellement changer la valeur de l'énergie d'extraction d'un électron et donc de ce fait le seuil en tension, car plus elle est grande plus l'énergie cinétique des électrons va être réduite et plus il sera facile de les arrêter. Les deux autres paramètres sont la fréquence et le flux du rayonnement dont l'effet sur les quantités d'intérêt peut être prédite par l'électromagnétisme classique. En bref, l'énergie d'une onde électromagnétique étant proportionnelle au flux on imagine que plus on va l'augmenter plus on va transférer d'énergie aux électrons et donc plus le courant va être fort (donc aussi le courant de saturation) et plus il va être difficile de les arrêter. En ce qui concerne la fréquence on ne voit pas trop en quoi elle pourrait avoir un rôle fondamental sur le phénomène puisqu'elle n'a a priori rien à voir avec l'énergie (si on oublie bien sûr ce que nous avons appris au chapitre précédent...).

Les résultats expérimentaux et leurs conséquences

Les résultats de l'expérience sont représentés de façon extrêmement schématique sur les figures 1.12 (a) et 1.12 (b). Voyons comment nous pouvons les interpréter.

Commençons par la figure 1.12 (a) où sont représentées deux caractéristiques courant-tension à une fréquence donnée pour deux valeurs d'intensité lumineuse. Dans la région $V > 0$ on constate que le courant de saturation est croissant avec l'intensité lumineuse ce qui est en parfait accord avec nos prédictions. Dans la zone $V < 0$ il existe bien un effet de seuil mais il ne semble pas dépendre de l'intensité lumineuse. Peut être que l'effet est trop petit pour qu'on le voit dans l'expérience? Malheureusement on constate deux autres bizarreries :

- Si l'on prend une fréquence bien plus petite pour un matériau donné, on constate qu'il n'y a jamais de courant.

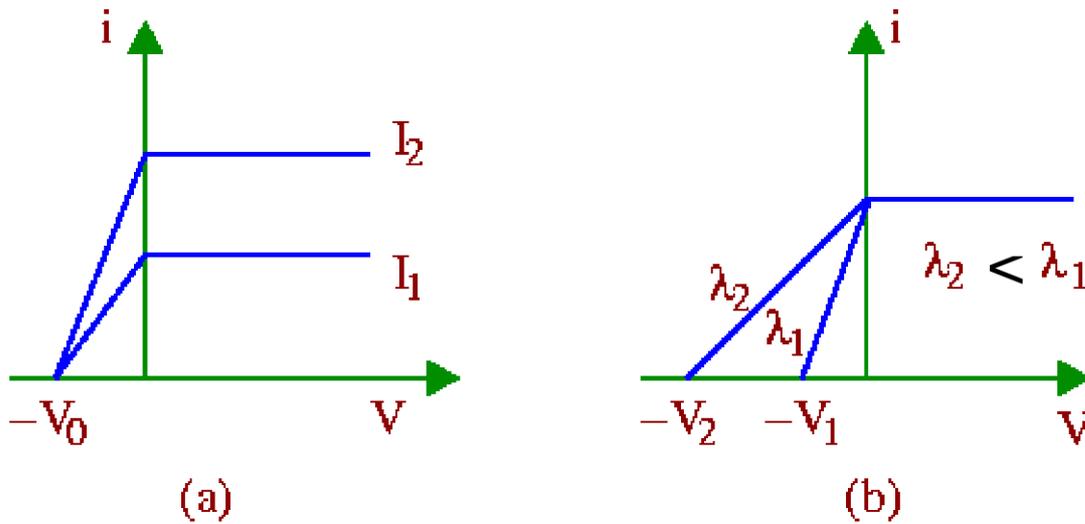


FIG. 1.12 – Résultats schématiques de l'expérience de Hertz. V_0 correspond à la tension d'arrêt V_a .

- D'autre part quand l'effet a lieu, c'est à dire que le courant est différent de zéro, on imagine que si on réduit énormément le flux, il va falloir attendre un certain temps pour que les électrons dans le métal accumulent l'énergie suffisante pour s'échapper. Or expérimentalement l'effet est instantané.

Il semble qu'il faille reconsidérer l'effet de la fréquence pour ce phénomène puisqu'elle semble jouer un rôle déterminant. Si l'on fait des mesures en changeant la fréquence à intensité lumineuse donnée, on obtient les résultats de la figure 1.12 (b). On constate ici que l'intensité de saturation n'en est absolument pas affectée mais par contre le seuil d'apparition du courant l'est directement.

Voilà un curieux problème qui ne fut résolu qu'en 1905 par Albert Einstein, ce qui lui valut le prix Nobel.

Interprétation d'Einstein et naissance du photon

En reprenant l'idée de Planck et les concepts de l'à peine naissante théorie de la relativité, Einstein⁸ postula que la lumière elle-même se décompose en grains d'énergie qu'il baptisa *photons*⁹. Ces photons sont des corpuscules d'énergie $h\nu$, de masse $m = 0$, d'impulsion $p = \frac{h\nu}{c}$ qui se déplacent à la vitesse de la lumière. Le champ électromagnétique total est ainsi la réunion d'un ensemble de photons et son énergie dépend donc de la fréquence des photons et de leur nombre. Ce nombre correspond en fait au flux lumineux dans l'interprétation d'Einstein. Ainsi des phénomènes faisant intervenir des quantités extrêmement grandes de photons ne sont pas sensibles à l'aspect granulaire du champ mais seulement à un changement significatif de son nombre de photons.

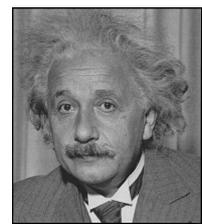


FIG. 1.13 – A. Einstein.

Einstein interprète l'effet photo-électrique comme l'interaction *d'un seul photon avec un seul électron* qui consiste en une collision où le photon disparaît en cédant toute son énergie à l'électron. L'aspect granulaire a donc une importance primordiale pour ce phénomène.

La mise en équation du bilan énergétique se traduit par :

$$\underbrace{h\nu}_{\text{photon}} = \underbrace{W_0}_{\text{extraction}} + \underbrace{E_c}_{\text{cinétique}} \quad (1.3)$$

De ce point de vue toute la physique de l'effet photo-électrique est trivialement expliquée : le seuil ne dépend que de la fréquence du rayonnement et de la nature du matériau ($h\nu \geq W_0$), l'effet est

⁸Ce n'est pas une surprise si c'est Einstein qui comprit en premier ce phénomène car lui seul connaissait à l'époque sa théorie de la relativité restreinte qui lui permit de donner une interprétation corpusculaire au photon.

⁹En fait le terme de photon n'a été introduit qu'une trentaine d'années plus tard par Lewis.

instantané, le courant de saturation est proportionnel au flux lumineux car proportionnel au nombre de photons...

1.2.3 Spectre des atomes et les postulats de Bohr

Un autre problème célèbre qui a conduit à des développements considérables de la théorie des quanta est celui du spectre d'énergie d'un atome, ou de façon plus générale d'un système mécanique à l'échelle microscopique. Mais avant d'aborder ce problème, il est instructif de se rappeler ce que les gens savaient des atomes à l'époque...

Même si depuis l'antiquité, des savants comme Leucippe et son disciple Démocrite (~ 400 ans avant J. C.) avaient déjà compris que la matière était constituée de *corpuscules indivisibles*, en perpétuel mouvement dans le vide, on ne sut pendant très longtemps que peu de choses au sujet des *atomes*¹⁰. Les premiers progrès arrivèrent grâce aux chimistes John Dalton et Dimitri Mendeleiev mais ce n'est qu'en 1904 que Thompson proposa le premier modèle physique d'un atome.

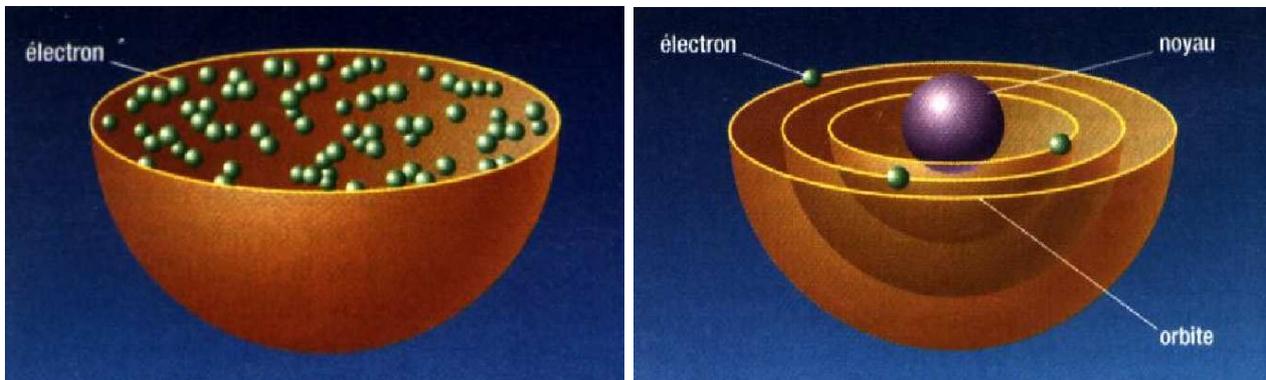


FIG. 1.14 – A gauche c'est le modèle de Thompson d'un atome qu'il considère comme un ensemble d'électrons immergés dans un bain de charges positives. Au contraire, à droite, le modèle de Rutherford représente l'atome comme un système planétaire, où les électrons tournent autour d'un noyau concentré de charges positives. Sur ce schéma le noyau n'est en fait pas du tout à l'échelle, en réalité on ne le verrait même pas car il est environ 10000 fois plus petit que la taille de l'atome.

C'est la découverte de l'électron, six ans auparavant (par Thompson lui-même) qui fut le détonateur de cette révolution conceptuelle. En effet l'existence de cette particule a remis en question l'indivisibilité de l'atome, que Thompson imagina, par suite, comme un ensemble d'électrons baignant dans une soupe uniforme de charges positives pour assurer la neutralité électrique (fig 1.14). C'est ce modèle du "cake aux raisins" qui mit fin à l'idée d'atome éternel et insécable et ouvrit de nombreuses réflexions sur la structure interne de ces "briques".

Expérience de Rutherford et premier modèle planétaire

En 1909 Rutherford, Geiger et Marsden ont cherché à étudier comment les atomes étaient disposés dans la matière. Pour ce faire ils ont envoyé des particules α (noyau d'hélium de charge $+2e$) sur une fine plaque d'Or et ont regardé comment ces particules étaient diffusées. En analysant soigneusement les données de diffusion des particules, Rutherford s'est en fait aperçu qu'il était impossible de comprendre les résultats expérimentaux sauf en changeant de modèle atomique. Il proposa alors, en 1911, de considérer l'atome comme des électrons satellites en orbite autour d'un centre positif de très petite dimension (fig 1.14).

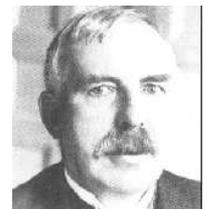


FIG. 1.15 – E. Rutherford.

En plus de l'aspect composite introduit par Thompson, deux nouvelles idées se dégagent de ce modèle :

- L'atome est essentiellement vide, composé d'électrons qui "gravitent" autour d'un noyau de charge égale à la somme de celles des électrons, mais concentré en une région infime de l'espace.

¹⁰Le mot "atome" vient du grec "a-tomos" et signifie "insécable". Cette notion fut inventée par Leucippe de Milet en 420 avant J.C.

- Compte tenu de l'attraction Coulombienne des électrons vers le noyau, ceux-ci doivent obligatoirement être en mouvement pour assurer la stabilité de l'atome. On verra plus loin que ceci a des conséquences catastrophiques.

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, ce modèle se limite à un électron autour d'une charge $+e$ centrale appelée aujourd'hui *proton*. Si l'électron décrit une orbite circulaire (la généralisation aux orbites elliptiques conduit aux mêmes résultats) de rayon r à la vitesse v , l'application du principe fondamental de la dynamique à l'électron (en ne considérant que la force électrostatique) conduit à :

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} \quad , \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (1.4)$$

dont on tire évidemment que l'énergie est continue et négative (état lié).

Ce modèle trouva son succès dans l'interprétation des expériences de diffusion de particules α mais Rutherford lui même avait compris qu'il ne s'agissait que d'une solution provisoire, en particulier à cause de son incapacité à expliquer le spectre des atomes.

Expérience typique de spectroscopie

Malheureusement pour Rutherford les physiciens connaissaient déjà depuis longtemps une contradiction majeure à son modèle. En effet, on va voir dans le paragraphe suivant qu'il prédit un spectre continu d'émission de lumière alors que les expérimentateurs ont observé depuis le milieu du 19^e siècle que ce spectre est discret. Afin de préciser les notions introduites ici il est instructif de considérer une expérience typique, telle qu'un étudiant pourrait la faire en TP de nos jours.

Imaginons une lampe à hydrogène, c'est à dire un gaz d'atomes d'hydrogène excités par un moyen quelconque (ex : en chauffant le gaz ou encore par décharge électrique ...) qui se désexcitent en émettant du rayonnement. Le but de l'expérience est de déterminer l'ensemble des couleurs qui composent le spectre d'émission de cette lampe. Pour ce faire, on envoie la lumière extraite sur un élément dispersif comme un prisme par exemple. Celui-ci dévie différemment les longueurs d'ondes et permet donc d'analyser les différentes composantes du spectre. Qualitativement, on peut s'attendre à deux spectres antagonistes.

- Soit on observe un continuum de couleurs, comme un arc-en-ciel. On parle alors de spectre continu.
- Soit ce spectre se divise en raies bien distinctes, chacune correspondant à une couleur (longueur d'onde) bien définie. On parle dans ce cas de spectre discret.

Et c'est ce dernier type de spectre que les expérimentateurs ont observé, conduisant par exemple Balmer (en 1889) à conjecturer une formule pour le spectre visible de l'hydrogène :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad n \geq 3 \quad (1.5)$$

où R_λ est une constante que l'on peut déterminer expérimentalement et que l'on reverra par la suite.

Les postulats de Bohr

Le modèle planétaire de Rutherford précédemment exposé conduit à deux pathologies importantes, même pour le plus simple des atomes : l'atome d'hydrogène. La première, citée précédemment, concerne la *nature continue du spectre* tandis que la seconde, plus catastrophique, la *stabilité même des atomes*. Ces deux conséquences ont une cause commune : le mouvement circulaire accéléré de l'électron. En effet, l'électromagnétisme classique nous enseigne qu'une particule chargée (ici l'électron) en mouvement accéléré (ici une accélération centripète due à la rotation autour du proton) perd continuellement de l'énergie par émission d'ondes électromagnétiques. Ceci semble satisfaisant dans le sens où cela permet

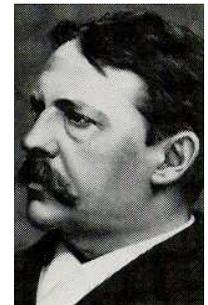


FIG. 1.16 – J. Rydberg.

de comprendre qu'un atome puisse émettre du rayonnement mais une analyse plus poussée conduit rapidement à l'échec.

- Tout d'abord, si l'électron perd continuellement de l'énergie, alors le rayon de son orbite diminue continuellement. Si rien ne l'empêche de rayonner alors il finira par s'écraser sur le proton, tout comme un satellite s'écraserait sur la Terre à force de perdre de l'énergie par frottement. Ceci conduit à penser que l'atome d'hydrogène (ainsi que tous les autres d'ailleurs) serait instable, ce qui est évidemment absurde.
- D'autre part l'électromagnétisme nous dit aussi que le rayonnement qui est émis oscille à la fréquence du mouvement de rotation de l'électron. Or compte tenu de la troisième loi de Képler $T^2/r^3 = cte$, si le rayon diminue continuellement alors la fréquence doit augmenter continuellement. En d'autres termes, le spectre d'émission des atomes est un spectre continu, ce qui est également en contradiction avec l'expérience.

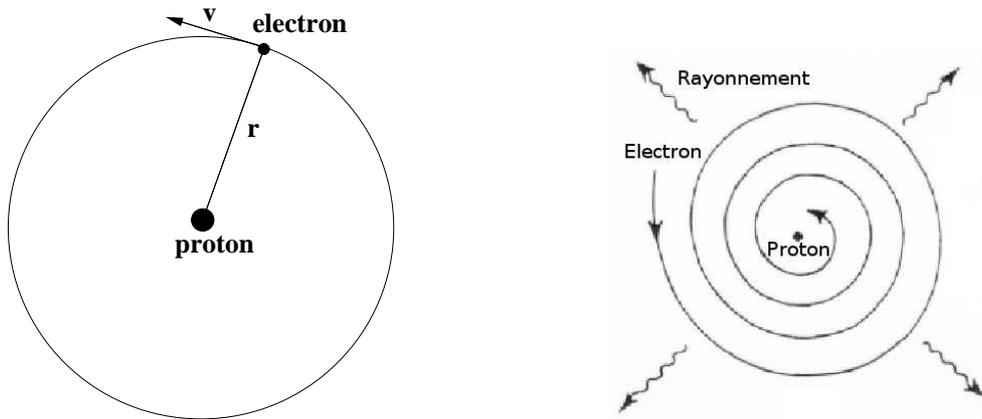


FIG. 1.17 – Atome d'hydrogène représenté par un proton central et un électron satellite. A droite l'atome s'effondre à cause du rayonnement électromagnétique de l'électron.



FIG. 1.18 – N. Bohr.

C'est Niels Bohr¹¹, en 1913, qui fut le premier à comprendre comment résoudre tous ces paradoxes en étendant les idées de Planck et Einstein sur la quantification de l'énergie. Pour ce faire, il proposa 3 postulats pour permettre d'interpréter la stabilité des atomes ainsi que les phénomènes d'émission et d'absorption de rayonnement par les atomes. L'idée centrale de sa théorie est de filtrer les prédictions de la mécanique classique par des règles de quantification. Par exemple pour l'atome d'hydrogène il imagina que seules certaines orbites, bien déterminées, sont stables pour l'électron (au sens où l'électron ne rayonne pas sur ces orbites) et qu'il peut passer de l'une à l'autre par émission ou absorption d'un photon. D'autre part, l'écart énergétique entre ces orbites

étant très faible, cette quantification n'a de conséquences qu'à l'échelle atomique et pas sur les orbites des planètes.

Ses trois postulats, qui ont un impact beaucoup plus général, sont les suivants :

1^{er} Postulat Un système mécanique, à l'échelle "atomique" (atomes, molécules, noyaux ...), ne peut exister de manière permanente, que dans un certain nombre d'états correspondants à une valeur bien déterminée de l'énergie $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$. Il existe d'autre part un état d'énergie minimale appelé *état fondamental*, qui assure la stabilité du système, les autres étant appelés *états excités*.

Rq : Pour un atome, il faut noter que la quantification n'a lieu que pour les états liés qui sont discrets alors que les états de diffusion forment un continuum d'énergies.

Bohr explique ainsi très simplement le spectre des atomes et leur stabilité. En effet, si on considère un atome isolé non perturbé, initialement dans son état fondamental, il ne peut qu'y rester. L'existence de

¹¹ Il était en fait, à l'époque, le thésard de E. Rutherford qui, ayant bien conscience des lacunes de son modèle, le fit travailler sur la théorie de l'atome d'hydrogène.

cet état d'énergie minimale empêche l'électron de rencontrer le proton et donc que l'atome ne s'effondre. Les deux autres postulats concernent les *transitions* entre les différents niveaux d'énergie.

2^{ème} Postulat Si le système est dans un état excité d'énergie E_j , par exemple l'électron de l'atome d'hydrogène est sur une orbite excitée, alors il est possible que le système relaxe vers un état d'énergie inférieure E_i . Cette transition entre états devant conserver l'énergie, elle s'accompagne de *l'émission d'un photon* d'énergie *exactement égale* à la différence d'énergie entre les niveaux : $h\nu_{ji} = E_j - E_i$.

Le physicien qui observe la lumière émise par une collection d'atomes identiques n'y trouvera donc que des fréquences ν_{ij} bien déterminées par les niveaux d'énergies des atomes. Ainsi dans le cadre quantique, le fait que les spectres atomiques soient, pour l'essentiel, des spectres discrets est immédiatement interprété.

3^{ème} Postulat Il existe un processus inverse à l'émission d'un photon, à savoir *l'absorption*. Dans ce cas, si un système comme un atome est soumis à un rayonnement électromagnétique et qu'il est initialement dans un état d'énergie E_i , il peut transiter vers un état d'énergie plus élevée E_j , à condition que la fréquence $\nu_{ji} = (E_j - E_i)/h$ soit contenue dans le rayonnement.

Munis de ces postulats, il nous est donc désormais possible de comprendre, au moins qualitativement, les propriétés des systèmes mécaniques à l'échelle microscopique. Il ne reste plus maintenant qu'à être capable de calculer le spectre d'énergie d'un tel système. Bohr proposa une méthode générale qui connut un grand succès après son application à l'atome d'hydrogène.

Règle de quantification de Bohr-Sommerfeld

Comme on l'a discuté précédemment, la première formule de quantification de l'énergie fut donnée par Planck pour interpréter l'expérience du corps noir. Dans ce cas précis, le système considéré est le champ électromagnétique dont l'analogue mécanique serait en fait une collection d'oscillateurs harmoniques (des particules attachées à des ressorts). Il proposa que l'énergie de chaque oscillateur soit $E = nh\nu$ où n est un nombre entier définissant l'état de cet oscillateur. Les niveaux d'énergie d'un tel système sont donc discrets et équidistants. Cela dit, l'expérience, par exemple pour l'atome d'hydrogène, montre que les raies atomiques ne sont pas équidistantes. Il est donc évident qu'en général le spectre d'un système physique a une structure bien plus complexe. C'est pourquoi Bohr chercha une approche plus générale qui fut ensuite améliorée par Sommerfeld, Einstein, Kramers, Wentzel et Brillouin.

Afin que le lecteur n'ait pas l'impression que cette règle fut postulée par Bohr par pseudo hasard, comme on pourrait l'imaginer après la lecture d'autres ouvrages, on propose ici d'en exposer l'origine. Cela dit, il est évident que certains concepts sont probablement inconnus d'un étudiant de deuxième ou troisième année universitaire, qui peut alors prêter une attention réduite à ce paragraphe et éventuellement y revenir quelques années plus tard pour en apprécier la magie.



FIG. 1.20 – L. Maupertuis.

Comme on l'a déjà discuté, l'intention de Bohr était de filtrer les prédictions de la physique classique par la quantification de certaines quantités, introduisant ainsi la nature granulaire de la physique microscopique. Pour l'atome d'hydrogène, l'énergie est quantifiée et de ce fait, compte tenu de l'équation (1.4) les orbites et les vitesses sont aussi quantifiées. D'autre part, la complexité des spectres expérimentaux suggère qu'il n'est pas évident de trouver une règle générale simple pour la quantification de l'énergie. Il fallait donc trouver une grandeur physique facile à quantifier pouvant faire hériter cette propriété à bon nombre d'observables.

Bohr connaissait, comme beaucoup de physiciens de l'époque, un principe physique exceptionnellement puissant, qui depuis Fermat, en passant par Maupertuis, Euler, Lagrange et Hamilton¹² mit plus de trois siècles à mûrir. Désormais il est possible de formuler



FIG. 1.19 – P. Fermat.

¹²Puis étendu par R.P. Feynman et J. Schwinger au milieu du 20^e siècle pour formuler la mécanique quantique.

un grand nombre de lois connues de la physique à travers ce principe, dit *principe de moindre action*. Il ne s'agit en réalité que d'une formulation mathématique d'un principe d'économie, de fainéantise généralisée. Concrètement, pour décrire un système physique quelconque, il s'agit de trouver une grandeur "physico-mathématique", appelée l'*action*, dont la minimisation conduit aux équations fondamentales du problème.

Dans le cadre de l'optique géométrique, cette action n'est autre que le chemin optique, dont la minimisation conduit, par exemple, aux lois de Snell-Descartes de la réflexion et la réfraction.

En mécanique, l'action est un objet un peu plus subtil. Imaginons que l'on ait une particule qui parte d'un point A à t_A et qui arrive en B à t_B . La question est : quel chemin suit-elle parmi l'infinité des chemins possibles ? Nous savons tous que cette réponse est donnée par les lois de Newton mais il est aussi possible de la trouver par une formulation bien différente à travers le principe de moindre action. On pourrait imaginer que la réponse est le chemin le plus court en temps ou en espace mais en fait ceci ne marche que dans certains cas particuliers. Alors on peut penser que c'est la trajectoire d'énergie minimale mais ceci n'a pas de sens pour un système qui conserve l'énergie. La réponse, moins triviale qu'elle n'y paraît, est en fait d'optimiser la façon dont le système transfère son énergie entre les deux réservoirs d'énergie cinétique et potentielle. Ce transfert doit être le plus doux possible, et ceci n'est vérifié que par "la trajectoire physique", c'est à dire celle que la nature autorise. Mathématiquement l'action de la particule est donnée par :

$$S(t_A, t_B, [\vec{r}(t)]) = \int_{t_A}^{t_B} (E_C - E_P) dt \quad (1.6)$$

qui est une fonction de t_A et t_B mais qui dépend surtout du chemin $\vec{r}(t)$ suivi pour rejoindre les deux points (fonctionnelle de la trajectoire).

En cherchant la trajectoire qui minimise cette quantité on obtient des équations du mouvement totalement équivalentes à celles de la mécanique de Newton.

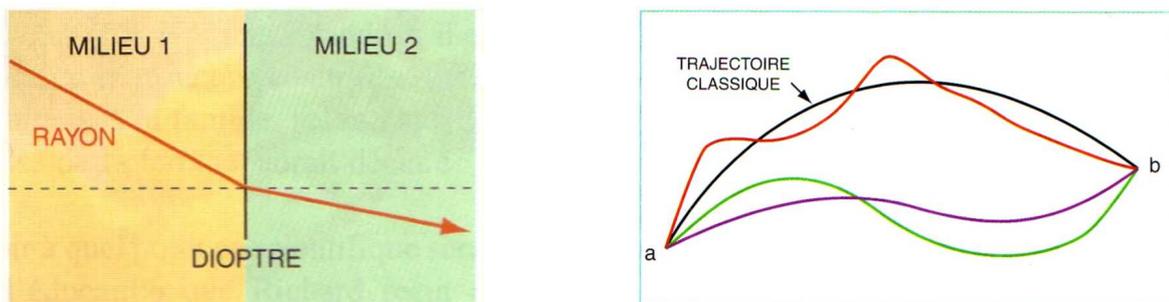


FIG. 1.21 – En optique le principe de moindre action, ou encore principe de Fermat dans ce cas, s'applique au chemin optique. Lors d'un changement de milieu, il permet de retrouver la loi de la réfraction. En mécanique si l'on connaît les points de départ et d'arrivée, il permet de déterminer quelle trajectoire la particule emprunte réellement parmi l'infinité de chemins possibles.

Cette approche se généralise aussi à la thermodynamique, où selon les cas l'action peut être liée à l'entropie ou à l'énergie libre, à l'électromagnétisme, la gravitation, la physique des particules... et a l'avantage de regrouper toute la physique d'un système dans une seule quantité plus ou moins complexe.

Ainsi, en remarquant que l'action possède la même dimension que h , la constante introduite par Planck, Bohr proposa, "naturellement", la formule de quantification suivante :

$$S = \alpha n h \quad (1.7)$$

où n est un nombre entier non nul, et où α n'est qu'un simple coefficient de proportionnalité que Bohr trouva simplement égal à 1 en cherchant à retrouver la formule de Planck. Plus tard, cette formule sera

améliorée et justifiée dans le cadre de l'approximation semi-classique de l'équation de Schrödinger. On ne retiendra ici que le fait qu'une constante peut se rajouter mais ne change pas le fait principal : la quantification de l'action.

Application à l'atome d'hydrogène

Ce qui fit le succès immédiat de cette théorie est son application à la description de l'atome d'hydrogène. Dans ce cas, le modèle de Rutherford prédit que l'électron suit des orbites circulaires autour du proton (en fait elles peuvent être elliptiques mais ceci ne change pas le résultat sur l'énergie). Le mouvement est donc périodique ce qui permet de définir l'action uniquement sur une période T . D'autre part, l'énergie étant conservée on a :

$$S = \int_0^T (E_C - E_P) = \int_0^T (2E_C - E_{tot}) \quad (1.8)$$

$$= -E_{tot}T + \int_0^T mv^2 dt \quad (1.9)$$

Puisque le mouvement est circulaire, on a en coordonnées cylindriques : $v = r \frac{d\phi}{dt}$. Ainsi l'intégrale sur le temps dans (1.9) peut se réécrire comme une intégrale sur la circonférence, soit une intégrale sur ϕ :

$$S = -E_{tot}T + \int_0^T mvv dt = -E_{tot}T + \int_0^{2\pi} mvr d\phi = -E_{tot}T + mvr \int_0^{2\pi} d\phi = -E_{tot}T + 2\pi mvr \quad (1.10)$$

puisque r et v sont constants pour une orbite circulaire donnée.

Le terme $-E_{tot}T$ n'est pas physiquement pertinent dans le sens où il ne joue aucun rôle dans la minimisation de l'action puisqu'il est constant. L'action à minimiser est en fait le second terme (1.10) et ainsi la condition de quantification (1.7) s'écrit pour ce système :

$$2\pi mvr = nh \quad \Rightarrow \quad \boxed{mvr = n\hbar} \quad (1.11)$$

avec $\hbar = h/2\pi$.

L'interprétation physique de cette formule est simple : il s'agit seulement de la *quantification du moment cinétique de l'électron* $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. Plus précisément il s'agit de la composante orthogonale au plan du mouvement circulaire de l'électron, notée généralement $L_z = mvr$, qui est dans ce cas une quantité conservée au cours du temps. C'est d'ailleurs en général comme ceci que l'on introduit la quantification de Bohr, ce qui permet de gagner en simplicité en perdant malheureusement toute la généralité et l'origine de l'approche.

Il est désormais très simple d'obtenir la quantification de l'énergie en introduisant cette formule dans les équations classiques (1.4) :

$$r^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 v^2} \quad \text{or} \quad v^2 = \frac{e^2}{4m\pi\epsilon_0 r} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{m^2} \frac{4\pi\epsilon_0 r m}{e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2 \quad (1.13)$$

et finalement pour l'énergie :

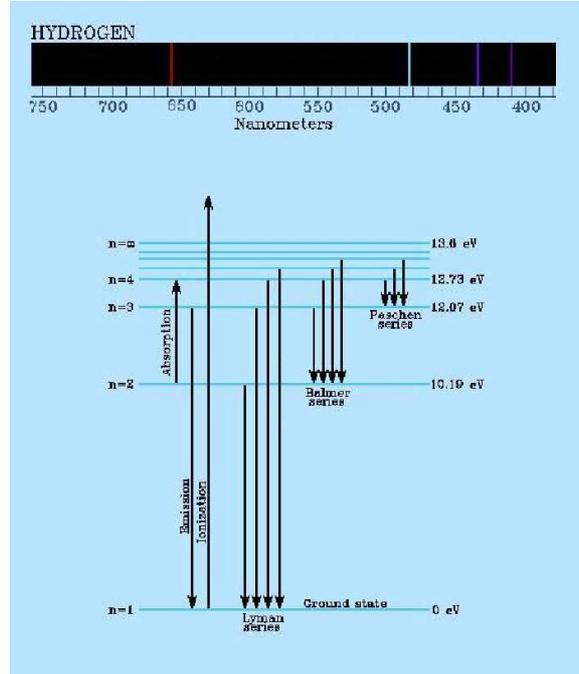


FIG. 1.22 – Spectre de l'hydrogène.

$$\boxed{E_n = -\frac{R_H}{n^2}} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \simeq 13,6 \text{ eV} \quad (\text{constante de Rydberg}) \quad (1.14)$$

L'énergie totale est ainsi quantifiée tant qu'elle est inférieure à zéro, c'est à dire tant que l'énergie cinétique n'est pas suffisante pour vaincre l'attraction de l'électron par le proton. On parle encore d'*état lié* (trajectoire fermée : cercle ou ellipse). Par contre lorsque l'électron se libère du proton (ionisation de l'hydrogène) toutes les valeurs de l'énergie de l'électron sont permises. On parle d'*état de diffusion* (trajectoire ouverte : parabole ou hyperbole) ou *état libre* à spectre continu. Les niveaux d'énergie des états liés sont résumés sur la figure (1.22) et sont en parfait accord avec l'expérience.

Il est d'ailleurs très simple de retrouver la formule empirique de Balmer (1.5) qui donne les longueurs d'ondes du spectre de l'hydrogène dans le visible. Celles-ci sont données par la différence d'énergie entre 2 niveaux. La formule (1.14) conduit à :

$$\frac{1}{\lambda_{ij}} = R_\lambda \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2} \right) \quad E_j > E_i \quad (1.15)$$

où λ est la fréquence du rayonnement correspondant à la transition du niveau E_j vers un niveau d'énergie inférieure E_i , qui dans le cas particulier où $j=2$ correspond à la formule de Balmer des raies dans le visible. En fait, on classe souvent les raies par séries correspondant à un même état final, car ces transitions sont dans le même domaine spectral.

Voilà qui conclut l'interprétation de Bohr du spectre des atomes. C'est un modèle génial qui fonctionne extrêmement bien pour l'oscillateur harmonique et pour l'atome d'hydrogène. Malheureusement on verra plus loin qu'il n'est pas le fin mot de l'histoire. Il n'est en fait qu'une approximation de la réalité qui est en général bonne pour des systèmes très excités ou peu quantiques mais il s'avère que pour l'atome d'hydrogène et l'oscillateur harmonique cette approximation est exacte¹³. Le succès de cette théorie est donc un peu hasardeux mais il ne faut pas pour autant blâmer N. Bohr car son modèle fut pendant longtemps la seule référence et continue encore à être utilisé pour de nombreux systèmes physiques. On reviendra sur cette discussion dans le chapitre suivant.

1.2.4 L'expérience de Franck et Hertz

On pourrait objecter aux postulats de Bohr le fait que ceux-ci font appel à la notion de photon, donc à la quantification du rayonnement, pour établir la quantification de l'énergie des atomes.

Dans une expérience spectaculaire, Franck et Hertz ont montré, en 1914, que la quantification de l'énergie des atomes était *intrinsèque* et pouvait s'observer sans utiliser la lumière, en effectuant des transitions entre niveaux discrets à l'aide de *chocs électroniques*.

L'expérience :

L'idée essentielle de cette expérience est d'exciter les atomes par un moyen alternatif aux transitions induites par la lumière, par exemple à l'aide de chocs entre des électrons et des atomes. Si on accélère des électrons et qu'on les fait traverser un gaz, ceux-ci peuvent interagir par collisions avec des atomes et les exciter. En observant le courant à la sortie, et sa variation en fonction de l'énergie des électrons ayant traversé le milieu, on peut espérer obtenir des informations sur le spectre des atomes.

Le dispositif expérimental et les résultats expérimentaux sont donnés sur la figure 1.23.

Interprétation des résultats :

Afin d'interpréter les résultats et de comprendre l'utilisation d'une tension d'arrêt il est utile de se demander à quoi peut-on s'attendre suivant que le spectre des atomes est continu ou discret. Dans les deux cas il existe toujours deux types de collisions : les collisions *élastiques* et les collisions *inélastiques*.

¹³Tant que l'on ne considère pas les corrections relativistes et le spin mais l'équation de Schrödinger souffre des mêmes lacunes.

Dans le premier cas l'électron est diffusé par l'atome mais n'échange pas d'énergie avec lui, alors que dans le second il peut céder une partie de son énergie cinétique à l'atome en excitant un électron du nuage atomique. Si le spectre atomique est continu alors il peut toujours y avoir collision inélastique quelle que soit l'énergie de l'électron incident. Par contre, si le spectre est discret, il faut une énergie minimale à l'électron pour exciter un atome.

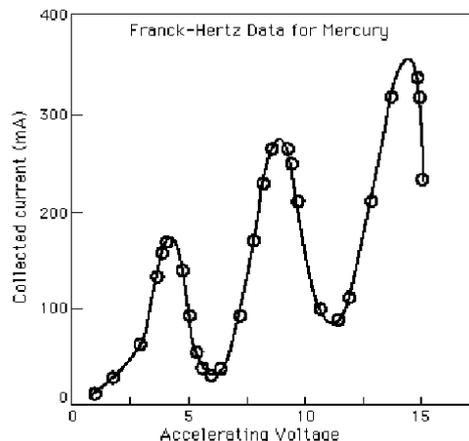
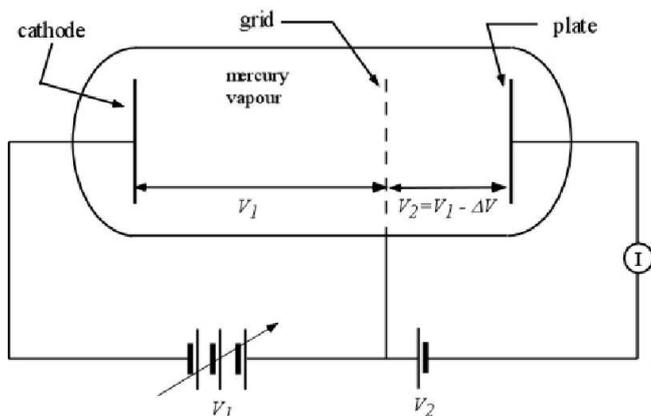


FIG. 1.23 – Des électrons sont émis par un filament chauffé puis sont accélérés par la tension de grille V_1 et traversent une vapeur de mercure. Après la grille on utilise une tension d'arrêt $\Delta V \simeq 1.5 V$ pour mesurer l'énergie des électrons. Les mesures de courant en fonction de la tension accélératrice sont données sur la figure de droite.

Imaginons alors que les atomes aient un spectre discret dont le niveau fondamental est E_1 et le premier excité E_2 . Il faut donc une énergie cinétique minimale $\Delta E = E_2 - E_1$ à l'électron pour exciter un atome. Cette énergie cinétique, l'électron l'acquiert grâce à la tension accélératrice V_1 , qui l'accélère uniformément entre le filament et la grille. Ainsi s'il n'interagit avec aucun atome il peut acquérir une énergie $E_c = |e|V_1$. De ce fait, tant que cette énergie est inférieure à l'énergie $E_2 - E_1$ nécessaire pour exciter un atome, il ne peut donc se produire de collisions inélastiques. Le courant recueilli devrait donc augmenter continuellement avec la tension accélératrice. Par contre, au delà de cette tension critique $V_c = \frac{E_2 - E_1}{e}$ il devient possible pour un électron d'avoir un échange d'énergie avec un atome.

Au voisinage de ce seuil, mais juste au dessus, ceci ne pourra se produire que pour des collisions ayant lieu juste avant la grille. Après cet échange, l'électron n'a quasiment plus d'énergie cinétique et ne peut être accéléré que sur une infime portion séparant l'atome avec lequel il a interagi et la grille accélératrice. Il franchit ainsi cette dernière avec une énergie très faible et c'est à ce point qu'intervient la tension d'arrêt. En effet celle-ci permet de filtrer les électrons qui ont perdu leur énergie en interagissant. De ce fait on devrait, juste après ce seuil, observer une importante chute du courant. Cela dit, certains électrons n'interagissant pas, le courant ne devrait pas tomber à zéro mais seulement être réduit d'autant plus que la proportion d'électrons interagissant est grande. Celle-ci va évidemment augmenter avec la tension accélératrice car plus les électrons sont accélérés plus ils peuvent traverser de gaz avec l'énergie suffisante pour avoir une collision inélastique et ainsi augmenter leurs chances de croiser un atome et interagir.

Par contre si un électron interagit rapidement avec un atome il lui reste ensuite pas mal de distance pour regagner de l'énergie et ainsi vaincre la tension d'arrêt. On devrait alors voir le courant repartir pour une tension supérieure à la tension critique V_c plus celle d'arrêt $\Delta V (\simeq 1.5 V)$.

Enfin, si l'électron regagne l'énergie suffisante pour avoir une autre collision inélastique avec un autre atome alors l'histoire semble se répéter.

En résumé on s'attend aux régimes suivants :

- $0 \leq V_1 < V_c = \frac{E_2 - E_1}{e}$: Les électrons n'ont pas de chocs inélastiques et arrivent avec une énergie cinétique eV_1 au passage de la grille. Le courant croit alors continuellement avec V_1 .
- $V_c \leq V_1 < V_c + \Delta V$: Des collisions inélastiques sont désormais possibles mais au voisinage de la grille. Ainsi la fraction des électrons ayant interagi n'ont plus l'énergie suffisante pour vaincre la tension d'arrêt. Le courant est alors diminué.
- $V_c + \Delta V \leq V_1 < 2V_c$: Même si beaucoup d'électrons ont perdu de l'énergie par collisions inélastiques, ils regagnent une énergie cinétique suffisante pour vaincre la tension d'arrêt. Le courant peut alors augmenter de nouveau.
- $2V_c \leq V_1 < 2V_c + \Delta V$: Les électrons peuvent désormais avoir deux collisions inélastiques : une à peu près au milieu de la distance anode-grille¹⁴ et l'autre au voisinage de la grille. On se retrouve ainsi dans la même situation que précédemment.

Et c'est précisément ce comportement que l'on observe expérimentalement alors que pour un spectre continu on n'observerait jamais ces paliers.

Ainsi, des résultats expérimentaux de la figure 1.23, on peut déduire la différence d'énergie $E_2 - E_1 = 4.9 \text{ eV}$ qui est une mesure bien moins précise que celle obtenue par les techniques spectroscopiques modernes (4.86 eV) mais qui a l'avantage de démontrer la quantification intrinsèque de l'énergie d'un atome. D'autre part, on peut également vérifier que les atomes se dés excitent via l'émission de lumière ultraviolette de longueur d'onde 253.6 nm .

Rq : Pourquoi n'a-t-on considéré que les transitions entre l'état fondamental et le premier état excité ?

La réponse n'est en fait pas complètement triviale. Ce qui est évident est que la distance nécessaire à l'électron pour atteindre l'énergie $E_3 - E_1$ est supérieure à celle pour atteindre $E_2 - E_1$ et de même pour tout autre niveau. Cette distance, il faut la comparer au libre parcours moyen de l'électron dans le gaz, c'est à dire la distance moyenne entre deux collisions électron-atome (élastique ou pas). En fait dans cette expérience, le libre parcours moyen est largement inférieur à toute distance nécessaire pour obtenir une énergie du spectre (fig 1.24). Ainsi l'électron perd toujours son énergie dans une collision inélastique avant de pouvoir atteindre l'énergie suffisante pour exciter un atome à un niveau supérieur à E_2 .

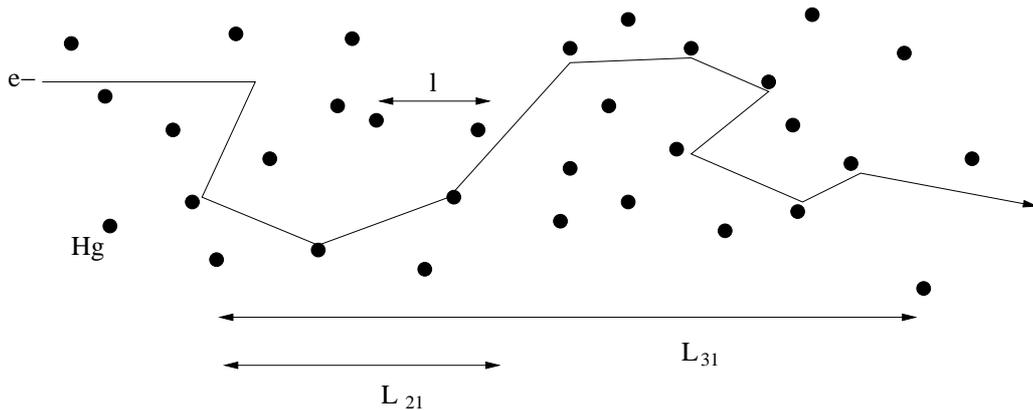


FIG. 1.24 – Trajectoire d'un électron au travers du gaz de mercure. l est le libre parcours moyen et L_{j1} la distance nécessaire pour accélérer un électron jusqu'à une énergie $E_j - E_1$.

1.2.5 L'effet Compton

L'effet Compton, découvert expérimentalement en 1920 et interprété en 1923 par Arthur-Holly Compton apporte une preuve décisive du comportement corpusculaire du photon. Celui-ci subit des

¹⁴Ceci n'est bien sûr que statistique c'est à dire que cela ne représente que le comportement moyen des électrons.

chocs avec les électrons lors d'expériences de diffusion de la lumière (RX) par le milieu métallique qu'elle traverse.

Position du problème

Un faisceau de rayons X de 10^4 eV est envoyé sur un métal avec une longueur d'onde bien déterminée λ_0 . Cette lumière est diffusée dans tout l'espace et on analyse son spectre dans chaque direction. On constate que ce spectre comporte deux pics principaux, l'un à la longueur d'onde λ_0 et l'autre à une longueur d'onde voisine λ' . L'écart entre ces deux pics $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0$, ainsi que leur intensité relative varient fortement avec la direction d'observation (fig 1.25).

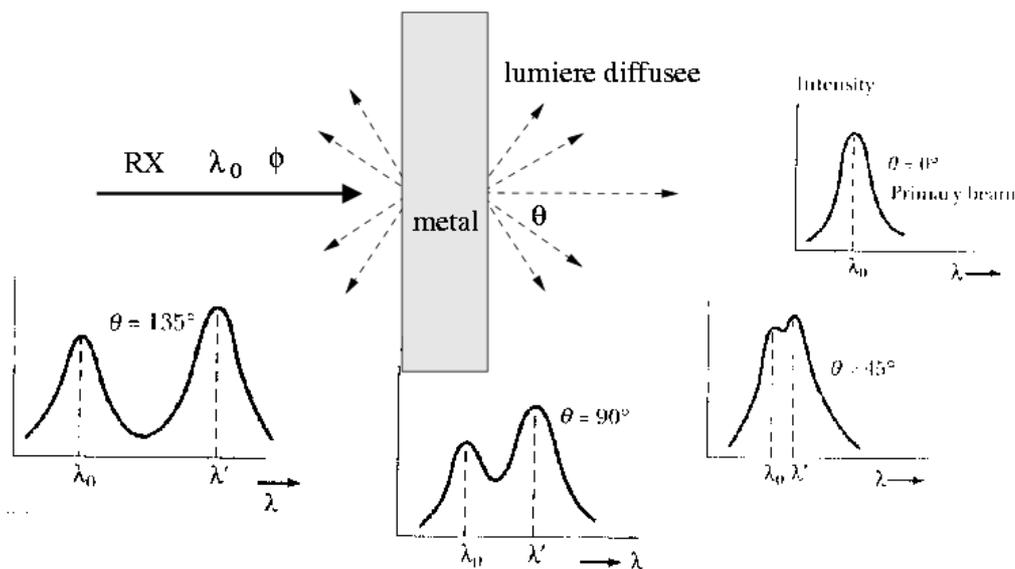


FIG. 1.25 – Schéma de l'expérience de Compton.

Le problème est donc de comprendre l'origine de ce dédoublement et de calculer ses caractéristiques.

Analyse classique

Du point de vue de l'électromagnétisme classique, les rayons X sont décrits par une onde électromagnétique de longueur d'onde λ_0 et de fréquence $\nu_0 = c/\lambda_0$. Au passage de cette onde (qui est un champ électrique oscillant), les électrons liés aux atomes se mettent à vibrer autour de leurs orbites à la fréquence ν_0 . Ceci conduit à l'émission d'ondes électromagnétiques à la fréquence ν_0 dans toutes les directions. On comprend ainsi que du rayonnement soit diffusé dans toutes les directions. Malheureusement, ceci se fait sans changement de longueur d'onde et ne permet donc pas de rendre compte des résultats expérimentaux.

Analyse quantique

L'analyse quantique du phénomène repose sur le concept de collision photon-électron.

L'énergie d'extraction des électrons étant tellement faible devant celle des rayons X (quelques eV devant environ 10^4 eV) on peut considérer que tout ce passe comme si les électrons étaient libres au départ. D'autre part, l'énergie qui va leur être communiquée est telle que l'on peut également les considérer comme immobiles (avant le choc).

Pour calculer $\Delta\lambda(\theta)$ il s'agit d'écrire les relations de conservation de l'énergie et de l'impulsion (voir annexe B pour les formules relativistes).



FIG. 1.26 – A.H. Compton.

L'équation de conservation de l'énergie est :

$$\underbrace{h\nu_0}_{\text{photon}} + \underbrace{m_e c^2 + 0}_{\text{électron}} = h\nu' + m_e c^2 + E_c \quad (1.16)$$

En projetant sur les axes x et y il vient pour l'impulsion (fig 1.27) :

$$\begin{cases} \frac{h\nu_0}{c} + 0 = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \phi \\ 0 + 0 = -\frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p \sin \phi \end{cases} \quad (1.17)$$

En isolant $\cos \phi$ et $\sin \phi$ dans (1.17) et en utilisant $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, on obtient une expression pour pc :

$$p^2 c^2 = (h\nu_0)^2 - 2h\nu' h\nu_0 \cos \theta + (h\nu')^2 \quad (1.18)$$

Il ne reste donc plus qu'à se débarrasser de p , ce que l'on peut faire à travers la conservation de l'énergie. En effet (1.16) donne $E_c = h(\nu_0 - \nu')$ tandis que l'énergie de l'électron satisfait l'équation générale B.2 donnée dans l'annexe B : $p^2 c^2 = E_c^2 + 2m_e c^2 E_c$, ce qui permet d'écrire :

$$p^2 c^2 = (h\nu_0)^2 - 2h\nu' h\nu_0 + 2m_e c^2 h(\nu_0 - \nu') + (h\nu')^2 \quad (1.19)$$

Ainsi en égalisant (1.18) et (1.19) il vient, après traduction en longueurs d'ondes :

$$\boxed{\Delta\lambda(\theta) = \lambda' - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos \theta)} \quad (1.20)$$

où $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ est appelée *longueur d'onde de Compton*. Cette formule est en parfait accord avec l'expérience puisque qu'elle prédit l'apparition d'un second pic d'intensité et explique son intensité relative au pic principal en fonction de θ l'angle de diffusion. Le pic principal, quant à lui, trouve son origine dans le rayonnement classique sans changement de longueur d'onde.

Rq : Quelle est la différence avec l'effet photo-électrique ? Dans l'effet photo-électrique l'expérience semble être la même à l'exception que la lumière envoyée est proche du visible. Les photons ont donc une énergie bien moindre et peuvent la céder entièrement aux électrons et disparaître. Ici, ils n'en donnent qu'une partie et sont diffusés, pourquoi ? En fait ils sont tellement énergétiques que s'ils donnaient toute leur énergie, les électrons dépasseraient la vitesse de la lumière, ce qui est interdit par la relativité restreinte. Ainsi, à partir d'une certaine fréquence l'effet photo-électrique laisse place à l'effet Compton.

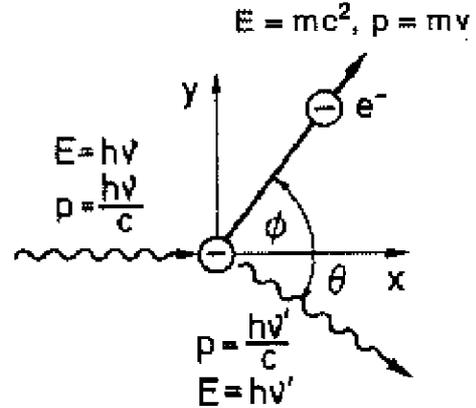


FIG. 1.27 – Avant la collision l'électron est considéré au repos et après acquiert une impulsion \vec{p} repérée par l'angle ϕ . Le photon est diffusé selon un angle θ .

Chapitre 2

La dualité Onde-Corpuscule

L'aspect corpusculaire de la lumière est désormais manifeste, compte tenu des expériences précédemment discutées. Et pourtant, les expériences d'optique ont démontré, depuis le milieu du 19^e siècle, l'existence de phénomènes de *diffraction et d'interférences* dont seule la nature ondulatoire de la lumière peut rendre compte.

Face à ce paradoxe, l'objectif de ce chapitre est de comprendre en quoi ces deux aspects sont complémentaires et inséparables, mais aussi comment cette dualité onde-corpuscule se généralise à la matière.

2.1 Dualité de la lumière : l'expérience des fentes d'Young

Pour illustrer cette discussion, considérons un dispositif concret d'optique, comme l'interféromètre d'Young par exemple (fig 2.1).

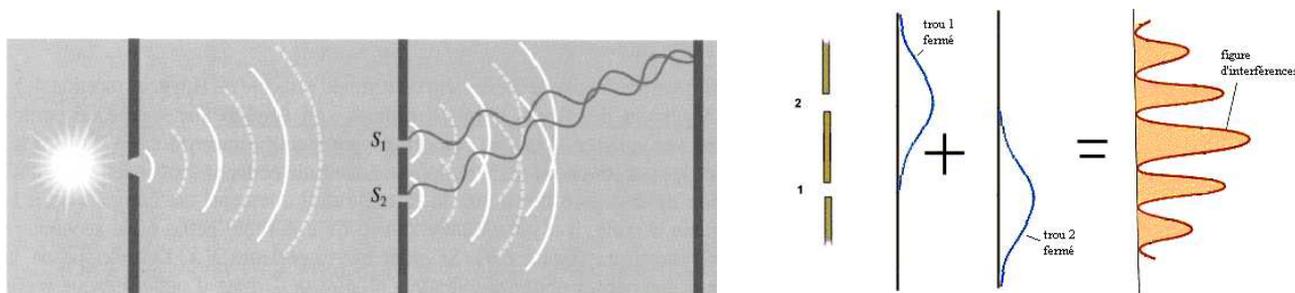


FIG. 2.1 – Dispositif des trous d'Young.

Le principe de cette expérience est de séparer un faisceau lumineux, à l'aide d'une plaque percée de deux trous, puis de les recombinaison sur un écran où l'on observe l'intensité lumineuse. Si les trous sont suffisamment petits¹, en principe de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière, on observe alors plusieurs phénomènes étranges :

- Si un seul trou est ouvert, l'intensité recueillie sur l'écran n'est pas concentrée en un seul point mais s'étale un peu pour former ce qu'on appelle une *tâche de diffraction*². C'est ce qui arrive lorsqu'on essaie de collimater au maximum un rayon lumineux : le faisceau fini par diverger complètement.
- Si les deux trous sont ouverts, l'intensité sur l'écran n'est pas la somme des deux tâches de diffraction mais une figure bien plus complexe, formée d'une alternance de maxima et minima d'intensité. C'est le *phénomène d'interférence*.

¹ En fait ces phénomènes existent quelque soit la taille du trou mais sont presque inobservables si elle est bien plus grande que la longueur d'onde.

² Il est parfois très facile d'observer ce genre de figure à travers des rideaux fins.

Il est clair que ce genre de physique échappe complètement à l'optique géométrique. Voyons maintenant comment pouvons nous interpréter ces résultats dans les cadres purement ondulatoire et purement corpusculaire.

2.1.1 Rappels sur l'interprétation ondulatoire

La *théorie ondulatoire de Maxwell* n'est pas en contradiction avec l'optique géométrique, qui en est une bonne approximation lorsque la longueur d'onde λ est petite devant les dimensions du système³.

Cette théorie postule l'existence de champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$, qui sont des fonctions variables de l'espace et du temps. Ces champs satisfont, dans le vide, l'équation de propagation des ondes :

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad , \quad \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad , \quad c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1 \quad (2.1)$$

où c , ϵ_0 , μ_0 sont respectivement la célérité de la lumière dans le vide, la permittivité diélectrique du vide et la permittivité magnétique du vide.

La propagation de la lumière y est ici décrite par la propagation d'une onde électromagnétique. Quand la longueur d'onde est faible devant les dimensions du système considéré, cette onde ressemble à un rayon lumineux. L'intensité lumineuse est quand à elle décrite par le module carré du champ. Dans le vide, les champs électrique et magnétique sont orthogonaux, on peut alors réduire cette définition au module carré du champ électrique :

$$I(\vec{r}, t) = |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.2)$$

Il est alors fondamental de remarquer que l'équation d'onde (2.1) (mais aussi les équations de Maxwell en général) est linéaire, ce qui a pour conséquence que si \vec{E}_1 et \vec{E}_2 en sont solutions, alors $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ en est aussi une (principe de superposition).

En ce qui concerne l'expérience des trous d'Young, on a deux ondes issues des trous 1 et 2, solutions de l'équation d'onde (2.1), qui viennent se rencontrer en différents points de l'espace. En ces points, et en particulier sur l'écran de détection, le champ électromagnétique total est simplement la somme des deux (linéarité de l'équation), ce qui conduit à une intensité lumineuse de la forme :

$$I(\vec{r}, t) = |\vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t)|^2 \neq |\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2 + |\vec{E}_2(\vec{r}, t)|^2 = I_1(\vec{r}, t) + I_2(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

C'est le terme croisé $2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ dans (2.3) qui conduit au phénomène d'interférence. La diffraction, quant à elle, correspond à l'éclatement de l'onde en une infinité d'ondes sphériques, au passage à travers un trou. Cet effet est d'autant plus fort que le trou est étroit, tout comme une vague serait gênée pour traverser une porte étroite.

Le triomphe de cette théorie réside dans son accord extraordinaire avec toutes les expériences d'optique standards et les formidables applications qu'elle a permise. Cela dit, nous avons déjà vu qu'elle n'était pas capable d'expliquer nombreux phénomènes comme le spectre du corps noir ou l'effet photo-électrique par exemple.

2.1.2 Interprétation corpusculaire

Voyons maintenant comment l'on peut interpréter cette physique à l'aide d'une théorie corpusculaire et en particulier le phénomène d'interférence. Selon ce point de vu, la lumière est constituée de photons, dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$m = 0 \quad , \quad E = h\nu \quad , \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} \quad (2.4)$$

³Le principe de Fermat peut être retrouvé à partir de la limite des petites longueurs d'ondes de l'intégrale de Huygens-Fresnel de la théorie de la diffraction.

Les photons ont donc désormais deux chemins possibles et l'intensité observée sur l'écran est proportionnelle au nombre de photons recueillis. Ainsi chaque photons devrait se traduire par un impact ponctuel sur l'écran et la somme de tout ces impacts, pour un interval de temps suffisamment long (pour avoir beaucoup de photons), par une figure d'interférences.

En ce qui concerne la diffraction, on pourrait imaginer que l'effet est du aux chocs des photons contre les bords des trous qui les dévient, tandis que les interférences résultent d'interactions entre les photons des trous 1 et 2. On peut montrer que la première proposition ne suffit pas mais concentrons nous plutôt sur le phénomène d'interférences.

Le seconde proposition donne une image des photons analogue à celle de balles de fusils qui passent par un trou et peuvent ensuite interagir ensemble. Ceci conduit à penser que *si on réduit l'intensité de la source jusqu'à ce que les photons passent un par un, alors les interférences devraient disparaître* (car plus d'interactions possibles).

Alors que ce passe t-il si l'on fait l'expérience suivante ?

Expérience

On réduit l'intensité de la source à l'aide d'atténuateurs puissants et on place une plaque photographique à la place de l'écran. Les photons s'accumulent un par un et on attend un temps suffisamment long pour recueillir une intensité comparable à celle de la source en pleine puissance.

Résultats

- **Aux temps courts :** Les photons arrivent bien un par un et font des impacts sur la plaque à des endroits *aléatoires*. Ceci va donc en faveur de notre interprétation corpusculaire. Les ondes ne peuvent pas réaliser ce genre de figures car elles sont délocalisées.
- **Aux temps longs :** Malgré les impacts aléatoires, la figure d'interférences se reconstruit peu à peu. Ceci rejette évidemment notre interprétation puisque les photons ne peuvent pas interagir.

Il semble donc évident que l'on ait besoin des deux aspects pour comprendre entièrement la physique sous jacente. *Les aspects ondulatoires et corpusculaires sont complémentaires.*

Mais comment le photon peut il faire la différence entre un système avec un seul ou deux trous ouverts ? Notons que dans l'expérience précédente, nous n'avons pas cherché à déterminer par quel trou passe un photon. On pourrait facilement le faire en plaçant un détecteur derrière un des trous mais évidemment, on n'obtiendrait que la tâche de diffraction puisque les photons seraient arrêtés par le détecteur.

2.1.3 Unification quantique des deux aspects

Le paradoxe soulevé précédemment peut se résumé ainsi :

- Un photon se comporte différemment selon le nombre de chemins possibles.
- Lorsqu'on effectue une "mesure" sur un système microscopique, on le *perturbe de façon fondamentale*. Ici, vouloir savoir par quel trou le photon est passé détruit les interférences.

Le second point est une propriété nouvelle, qui n'existe pas en physique macroscopique où l'on peut toujours trouver un détecteur aussi peu perturbatif qu'on le souhaite. *La mesure influence le système*⁴.

Afin de résoudre ce paradoxe, il est impératif de remettre en question certaines évidences conceptuelles que nous enseignent la physique classique.

Premièrement, comment un photon peut-il se comporter différemment selon le nombre de chemins qui lui sont offert ? Si le fait qu'un photon passe par un trou déterminé détruit les interférences, alors on est obligé d'y renoncer. On abandonne ainsi une des notions les plus intuitives et fondamentale de la physique classique : *le concept de trajectoire*. Un photon ne passe pas par le trou 1 ou 2 mais par les

⁴Il est clair que l'on est en train de jouer avec les grains élémentaires de la physique, on ne peut donc pas imaginer de systèmes plus petits qu'eux pour les observer en douceur !

deux à la fois. Il s'agit ici d'une propriété spectaculaire que seul les résultats expérimentaux rendent réelle, car elle nous échappe complètement.

D'autre part, les photons reconstituent peu à peu la figure d'interférence sur la plaque. Pour un photon particulier, *on ne sait pas à l'avance où il va arriver*. Pourtant tous ces photons sont émis dans les mêmes conditions ? Il est cette fois-ci impératif de *laisser de côté le déterminisme* : les conditions initiales ne déterminent pas complètement le mouvement ultérieur⁵. *Tout ce que l'on peut dire est que les photons viennent majoritairement sur certaines zones qui sont données par la figure d'interférence*. Autrement dit, un photon a une probabilité $P(\vec{r}, t)$ d'arriver en \vec{r} à l'instant t proportionnelle à l'intensité :

$$P(\vec{r}, t) \sim I(\vec{r}, t) = |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.5)$$

Ainsi, *le lien entre les aspects corpusculaires et ondulatoire est de nature statistique*. En effet, un seul photon créé un impact localisé en \vec{r} avec une probabilité P alors que l'ensemble des photons reconstruit, statistiquement, la courbe d'interférence.

Voilà qui conduit à la *dualité onde-corpuscule* qui est, pour ainsi dire, le principe fondamental de la physique quantique.

Résumé

- Les aspects corpusculaires et ondulatoires de la lumière sont inséparables et complémentaires : la lumière se comporte à la fois comme une onde et comme un flux de particules, *l'onde permettant de calculer la probabilité pour qu'un corpuscule se manifeste*.
- Les prévisions sur le comportement d'un photon ne peuvent être que de type *probabiliste*.
- L'information sur un photon à l'instant t est donnée par l'onde $\vec{E}(\vec{r}, t)$ solution des équations de Maxwell. Cette onde est interprétée comme *l'amplitude de probabilité* pour qu'un photon manifeste sa présence. On l'appelle parfois *fonction d'onde* ou encore *état du photon*.

2.2 Dualité de la matière

2.2.1 Onde associée de de Broglie



En 1923, le physicien Français Louis de Broglie propose d'étendre le double aspect de la lumière à l'ensemble des particules matérielles. Il associe alors à toute particule de masse m , d'énergie cinétique E_c et d'impulsion \vec{p} , une onde de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} et postule que les relations entre ces quantités sont les mêmes que pour les photons.

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (2.6)$$

FIG. 2.2 – L. de Broglie.

Il introduit ainsi une nouvelle échelle fondamentale pour chaque particule : la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} :

$$\lambda_{dB} = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} \quad (2.7)$$

Sa vision d'une particule (fig 2.3) est alors donnée par un objet plus diffus, qui a une certaine probabilité $P(\vec{r}, t)$ de ce trouver en un point \vec{r} de l'espace à l'instant t donnée par le module au carré de l'onde⁶.

⁵Il s'agit ici de conditions initiales en termes classiques mais l'on verra dans le dernier chapitre que l'état d'un système est entièrement déterminé par une équation différentielle. Seulement, les conditions initiales, ainsi que l'état du système, sont représentés, quantiquement, par une grandeur probabiliste.

⁶Les choses n'étant en fait pas si clair à l'époque car il fallu attendre quelques années pour que Max Born donne l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde.

Une particule est donc caractérisée, au sens quantique, par une fonction d'onde, dont l'interprétation est la même que celle du photon. Cette fonction d'onde (fig 2.3) est significativement non nulle sur une échelle spatiale de l'ordre de quelque fois la longueur d'onde λ_{dB} . Ainsi si on regarde une particule à une échelle $L \gg \lambda_{dB}$ celle-ci semble concentrée en un seul point. On retrouve donc l'image classique d'une particule ponctuelle bien localisée. Par contre si cette échelle devient proche ou inférieure à λ_{dB} alors le comportement ondulatoire de la particule est prédominant.

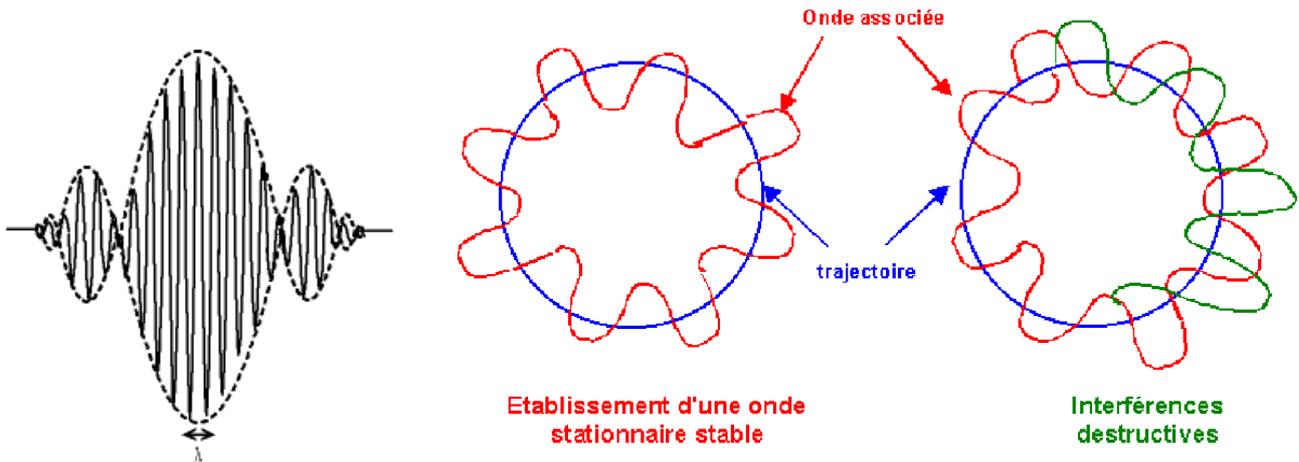


FIG. 2.3 – A gauche : représentation schématisée de la fonction d'onde d'une particule. A droite : ondes associées à un électron en orbite autour d'un proton.

Malheureusement, il n'existait aucune confirmation expérimentale de cette théorie à l'époque, c'est pourquoi peu de gens y croyaient. Cependant, Louis de Broglie raccrochait son enthousiasme à l'élégante manière avec laquelle il pouvait retrouver le résultat de Bohr pour le spectre de l'atome d'hydrogène. En effet, si on considère que les seules orbites stables d'un électron de l'atome d'hydrogène sont celles qui vérifient une condition d'onde stationnaire⁷ on obtient :

$$2\pi r = n\lambda_{dB} = \frac{n\hbar}{mv} \quad \Rightarrow \quad mvr = n\hbar \quad (2.8)$$

qui n'est autre que la formule proposée par Bohr en 1913 par une approche différente.

Comme dans le cas du photon, les deux aspects (corpusculaire et ondulatoire) ne sont pas observables simultanément, mais l'un ou l'autre est plus pertinent selon l'échelle caractéristique du système physique.

Exemples

- **Balle de golf** : $m \simeq 46 \text{ g}$, $v \simeq 30 \text{ m.s}^{-1}$

$$\Rightarrow \lambda_{dB} \simeq \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{46 \cdot 10^{-3} \cdot 30} \simeq 4.8 \cdot 10^{-34} \text{ m} \ll \text{club de golf}$$

On ne risque donc pas de rater la balle de golf si l'on frappe à sa position classique, ni de voir des balles de golf interférer les unes avec les autres.

- **Molécule O_2** : masse molaire 32 g , à température et pression ambiante $v \simeq 400 \text{ m.s}^{-1}$

$$\Rightarrow \lambda_{dB} \simeq \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^2 / 6.02 \cdot 10^{23}} \simeq 3.3 \cdot 10^{-11} \text{ m} \simeq \text{taille de la molécule}$$

Les effets quantiques risquent donc d'être importants car la taille de la molécule est comparable à sa longueur d'onde.

⁷Si l'onde n'est pas stationnaire elle revient toujours sur elle-même de manière différente et finie par se détruire par interférences. Puisqu'elle correspond à une amplitude de probabilité, si elle vaut zéro l'électron ne peut pas s'y trouver.

2.2.2 L'expérience de Davisson et Germer 1927

Rappels sur la diffraction de Bragg des rayons X

La diffraction d'une onde électromagnétique, qu'elle soit ou non dans le domaine optique, se produit lorsque l'obstacle, ou l'ouverture, a des dimensions du même ordre de grandeur que la longueur d'onde λ . Si l'"obstacle" est un cristal⁸, la distance entre deux atomes voisins est de l'ordre de l'angström ($10^{-10} m$) qui est également l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons X.

L'onde incidente sous l'angle θ (fig 2.5) pénètre dans le cristal. Chaque atome est excité et devient une source de rayonnement de fréquence identique à celle de l'onde. Le rayonnement ainsi diffracté donne naissance à des interférences constructives et destructives. En conséquence, si l'on place un détecteur pour mesurer l'intensité réfléchie, on observe des pics d'intensité seulement pour certaines valeurs de l'angle d'observation (angle émergent).

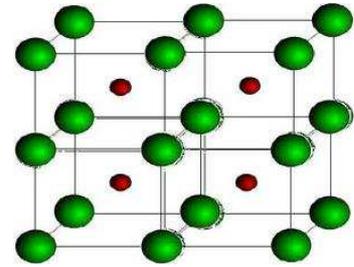


FIG. 2.4 – Réseau de CsCl.

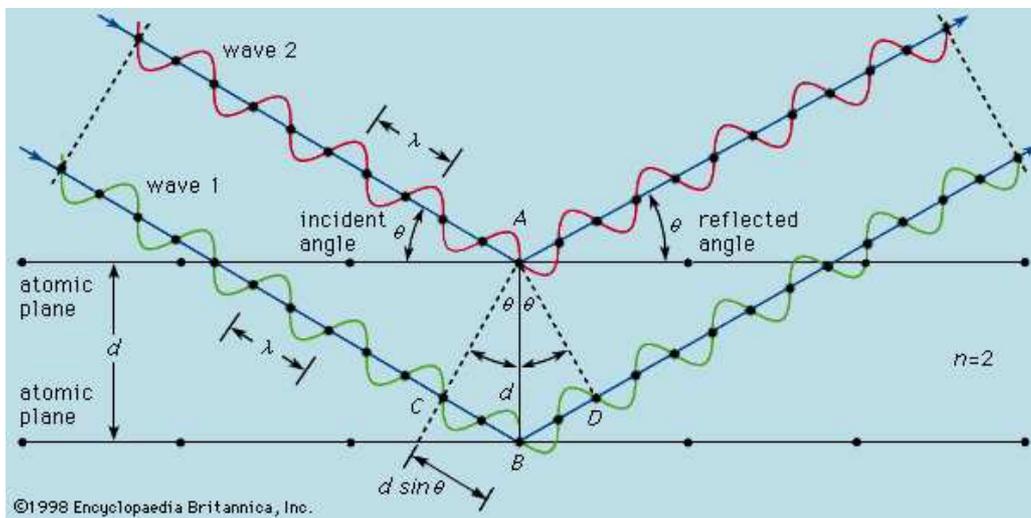


FIG. 2.5 – Diffraction de Bragg des rayons X.

Ces valeurs de θ sont données par une condition d'interférences constructives, c'est à dire quand la différence de marche entre deux rayons est égale à un multiple entier de la longueur d'onde. Si l'on considère les deux rayons de la figure 2.5 cette condition s'écrit :

$$2d \sin \theta_n = n\lambda \quad (n \text{ entier}) \quad (2.9)$$

Cette propriété trouve des applications pour l'étude des structures cristallines : en mesurant θ , on déduit la distance interatomique d .

L'expérience avec des électrons

La diffraction de Bragg est typique du caractère ondulatoire. Il était dès lors tentant, pour confirmer ou infirmer l'hypothèse de de Broglie, de réaliser une expérience de diffraction par des corpuscules de longueur d'onde voisine de la distance interatomique, c'est à dire voisine de l'angström. C'est ce que firent indépendamment, en 1927, C.J. Davisson et L.H. Germer avec des électrons d'énergie $E = 54 eV$ ($\lambda_{dB} = 0.167 nm$) en réflexion sur un cristal de Nickel, et G.P. Thomson avec des électrons

⁸Les atomes d'un solide, contrairement à ceux d'un gaz ou d'un liquide, s'organisent les uns par rapport aux autres pour former une structure, plus ou moins complexe, mais périodique. On appelle en général cette structure réseau cristallin ou tout simplement cristal.

en transmission par une couche mince cristalline⁹.

Ici nous considérons l'expérience de Davisson et Germer car elle est plus directe à analyser. Des électrons de 54 eV arrivent sous incidence normale sur un cristal. L'onde incidente est alors diffractée par chaque atome. Il y aura des interférences constructives dans la direction θ si :

$$d \sin \theta_n = n\lambda \tag{2.10}$$

L'expérience, ainsi que les observations, sont reportés sur la figure 2.7. Davisson et Germer ont observé de magnifiques anneaux brillants à des ouvertures angulaires en parfait accord avec la formule (2.10). En particulier pour $n = 1$ (réflexion d'ordre 1) ils ont mesuré $\theta_1 = 50^\circ$, d'où ils déduisirent (connaissant $d = 0.215\text{ nm}$ pour le Ni) par la relation (2.10) $\lambda_1 = 0.165\text{ nm}$, en excellent accord avec la longueur d'onde de de Broglie $\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = 0.167\text{ nm}$.



FIG. 2.6 – C. Davisson et L. Germer.

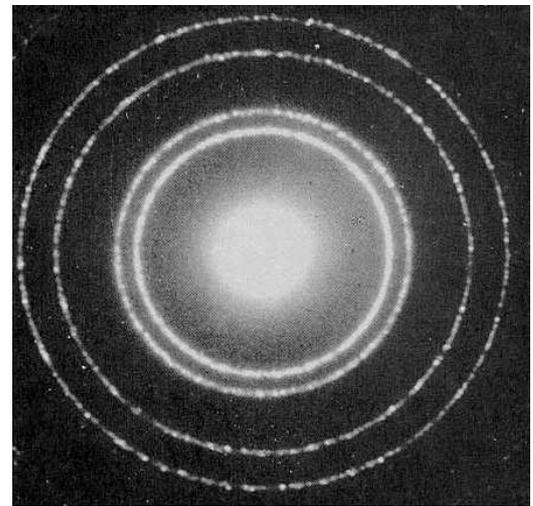
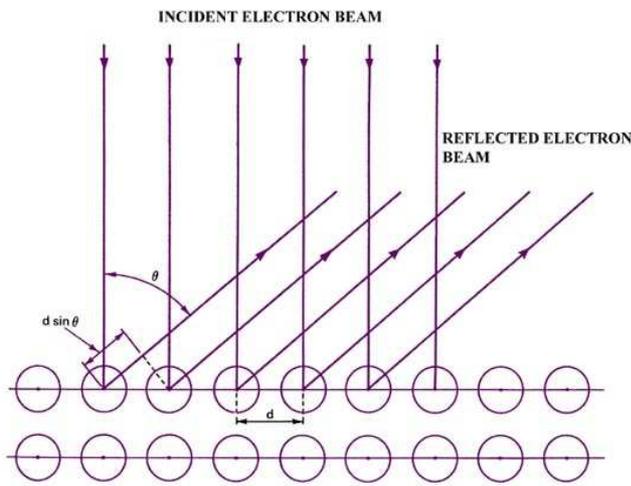


FIG. 2.7 – Diffraction des électrons. La figure de droite est l'intensité observée dans un plan horizontal (parallèle au plan de réflexion). On observe des anneaux à cause de la symétrie de rotation autour de la normale au plan de réflexion.

2.3 Le principe d'indétermination de Heisenberg

2.3.1 Notion de paquet d'ondes et inégalités spatiales

De l'analyse précédente résulte la dualité onde-particule, et ceci à la fois pour la lumière et pour la matière. Nous allons voir ici que compte tenu de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, ceci va de nouveau déranger la physique classique.

Imaginons que l'on veuille décrire une particule localisée dans une certaine région de l'espace par une onde. On verra au prochain chapitre comment calculer la fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ à partir de l'équation fondamentale de la mécanique quantique (équation de Schrödinger) mais ce n'est pas ici le propos. Ce qui nous intéresse c'est avant tout une propriété générale de cette fonction, à savoir que si l'on veut décrire cette particule correctement, la fonction d'onde doit être un minimum localisée. En effet, $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ désignant la densité de probabilité de trouver la particule, pour qu'une particule soit relativement localisée en un point à un instant donné, il faut que cette fonction d'onde soit localisée.

Prenons par exemple une onde plane de la forme :



FIG. 2.8 – W. Heisenberg.

⁹Davisson et Thomson se sont partagés le prix Nobel en 1937.

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \Rightarrow \quad |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |A|^2 = cte \quad (2.11)$$

Il est évident que cette fonction n'est pas satisfaisante puisqu'elle donne une probabilité de présence de la particule identique dans tout l'espace. Il est par contre possible de former une fonction plus satisfaisante en superposant plusieurs ondes planes de longueurs d'ondes assez proches (phénomène de battement) ou en d'autres mots de vecteurs d'ondes assez proches. On forme ainsi un *paquet d'ondes*.

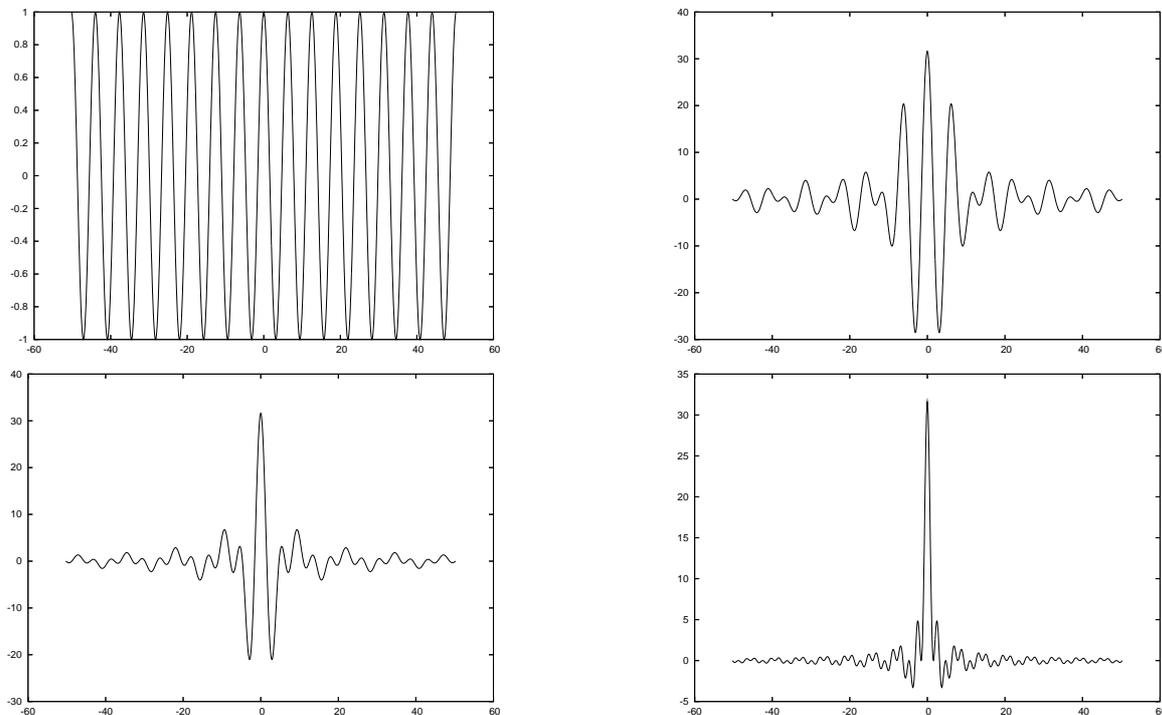


FIG. 2.9 – Exemples de paquets d'ondes formés à partir d'une somme de fonctions $\cos(kx)$ pour différents intervalles Δk .

Les figures 2.9 montrent des paquets d'ondes (à une dimension) formés à partir d'une somme d'ondes planes de k compris dans un interval $k_0 \pm \frac{\Delta k}{2}$ de plus en plus grand. Pour $\Delta k = 0$ (fig 2.9 en haut à gauche) l'onde s'étend bien sûr dans tout l'espace. Par contre, à mesure que cet interval Δk augmente, la localisation de l'onde est de plus en plus précise. Il existe donc une relation fondamentale entre l'extension spatiale typique du paquet d'onde et son extension dans l'espace des longueurs d'ondes. Cette relation semble être grossièrement $\Delta x \Delta k \sim 1$.

Or on a vu précédemment que le nombre d'onde et l'impulsion d'une particule étaient intimement reliés par la relation (2.6), ce qui conduit à $\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$.

En fait, une analyse plus rigoureuse conduit au *principe d'indétermination (ou d'incertitude) de Heisenberg* :

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}} \quad (2.12)$$

qui stipule donc, que l'on ne peut connaître à la fois précisément la position et l'impulsion d'une particule. Il existe donc une *limite intrinsèque à la précision des mesures*¹⁰.

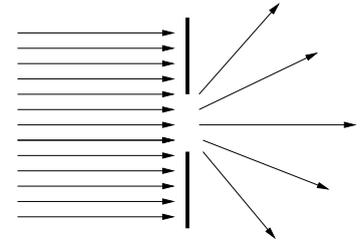
L'inégalité (2.12) se généralise très simplement à trois dimensions en trois couples d'inégalités, correspondant aux trois directions de l'espace.

¹⁰Selon les ouvrages on ne trouve pas toujours le même membre de droite dans l'inégalité (2.12). Ceci est sans importance : ce qui compte c'est l'existence d'une limite et son ordre de grandeur.

Rq : Il est clair que ces inégalités sont sans conséquences dans le monde macroscopique puisque $\hbar \simeq 10^{-34} \text{ J.s}$. En effet, imaginons que l'on souhaite connaître avec grande précision la trajectoire d'une balle de Golf, par exemple au micromètre près et au millionième de m/s près. Cela conduit à $\Delta x = 10^{-6} \text{ m}$, $\Delta p = 46 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 4.2 \cdot 10^{-14}$, ce qui est encore très loin de la limite intrinsèque imposée par la mécanique quantique.

Par contre, si on considère de telles précisions relatives pour des systèmes de taille microscopique, le produit des incertitudes devient de l'ordre de la constante de Planck ce qui devient problématique.

Rq : Le terme de principe n'est en fait pas adéquat puisque les inégalités de Heisenberg peuvent être déduites de la dualité onde-particule. En effet, on peut comprendre ce phénomène par pure analogie avec la diffraction d'une onde à travers un trou. Si on cherche à collimater un faisceau dans une direction, c'est à dire réduire sa largeur Δx , en perçant un trou dans une plaque, on sait bien que quand cette longueur devient de l'ordre de la longueur d'onde, le faisceau diverge complètement. Ceci veut dire que l'on perd complètement l'information sur la direction du faisceau, c'est à dire son vecteur vitesse.



2.3.2 Inégalité temps-énergie

Il existe également une quatrième inégalité qui relie cette fois l'énergie et le temps. Pour l'illustrer considérons l'exemple d'une source de particules (un canon à électrons par exemple) qui émet des particules dans la direction Ox avec une énergie $E = p^2/2m$. Supposons que cette source ne fonctionne que pendant un temps Δt et proposons nous d'effectuer une mesure de la quantité de mouvement d'une particule. Si l'on trouve une impulsion p avec une erreur Δp on connaît alors l'énergie avec une erreur :

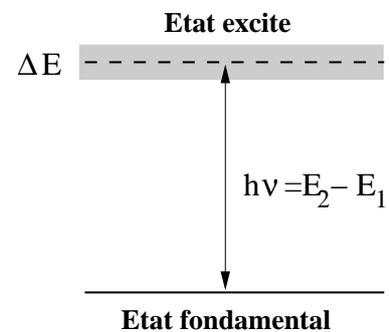
$$\Delta E = p\Delta p/m = v\Delta p \tag{2.13}$$

Or nous ne savons pas à quel instant t la particule a été émise, ce qui nous conduit à une erreur Δt sur ce temps et ainsi une erreur sur sa position $\Delta x = v\Delta t$. En introduisant ceci dans (2.12) il vient $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2v\Delta t}$ et donc pour l'énergie :

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{2.14}$$

qui constitue la quatrième inégalité de Heisenberg.

Rq : Largeur des raies spectrales : En réalité, les raies d'émission des spectres atomiques ne sont pas rigoureusement monochromatiques. Elles ont une certaine largeur en fréquence $\Delta\nu$. Cette largeur provient du fait qu'un atome excité met un certain temps Δt pour émettre un photon et se comporte donc comme la source de particules discutée précédemment. Ce temps, appelé *durée de vie du niveau*, est en général aléatoire mais toujours du même ordre de grandeur, qui dépend de la stabilité du niveau. Plus un niveau excité est instable, plus la largeur de la raie émise est grande. Le fondamental d'un atome étant stable, l'énergie correspondante est parfaitement définie (temps de vie infini).



Chapitre 3

Perspectives et applications

3.1 L'équation de Schrödinger

Compte tenu de ce que nous avons appri dans les chapitres précédents, il est désormais clair que l'on doit associer une onde à chaque particule. Cette onde, comme le champ électromagnétique pour le photon, permet de calculer la probabilité que la particule se manifeste à un instant donné en un endroit donné. La description d'une particule ne se fait donc plus, comme en mécanique classique, par un couple de coordonnées position-vitesse (\vec{r}, \vec{v}) , mais par la donnée d'une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ complexe¹ dont le module carré $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ donne sa densité de probabilité de présence $P(\vec{r}, t)$.



FIG. 3.1 – E. Schrödinger.

Si en électromagnétisme, les champs sont gouvernés par les équations de Maxwell, il reste ici à trouver l'équation fondamentale qui s'en chargera. Cette équation a été obtenu en premier par Erwin Schrödinger en 1926 puis généralisée par Dirac en 1928 pour une particule relativiste.

Imaginons que l'on veuille décrire l'état d'une particule quantique dans un champ de force dérivant d'une énergie potentielle $V(\vec{r})$. Il est d'abord évident que l'on peut écrire l'équation de conservation de l'énergie :

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad (3.1)$$

D'autre part, conformément aux idées exposées sur la dualité onde-particule, celle-ci a une longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{h}{p(\vec{r})} = \frac{h}{\sqrt{2m[E - V(\vec{r})]}} \quad (3.2)$$

et l'onde elle même, quelle soit progressive ou stationnaire, doit naturellement obéir à l'équation de d'Alembert des ondes :

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

Puisqu'on a vu qu'une particule devait être décrite à l'aide d'un paquet d'ondes, c'est à dire une superposition linéaire d'ondes planes (transformation de Fourier) il suffit de résoudre cette équation pour chaque composante. Si l'on pose $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{i\omega t}$ il vient de (3.3) :

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{v^2(\vec{r})}\psi(\vec{r}) = 0 \quad (3.4)$$

qui après introduction de la conservation de l'énergie (3.1) à travers la relation $v(\vec{r}) = \frac{\lambda(\vec{r})}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$ se réduit à :

¹Le fait de prendre la fonction d'onde complexe n'est ni une trivialité ni une commodité de calcul. En effet, en électromagnétisme on décrit souvent une onde progressive par une fonction complexe dans le seul but de s'éviter des souffrances trigonométriques. La quantité physique pertinente n'est alors que la partie réelle de cette fonction. Par contre, en mécanique quantique ce choix est indispensable pour décrire des états de diffusion. La quantité physique dans ce cas est le module carré de la fonction d'onde.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})} \quad (3.5)$$

qui est la célèbre équation de Schrödinger.

Rq : Si on admet que l'opérateur $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ extrait, de la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$, l'information sur l'énergie cinétique, alors cette équation s'interprète simplement comme l'équation quantique de conservation de l'énergie.

Cette équation décrit parfaitement les états quantiques stationnaires d'une particule, comme par exemple les fonctions d'ondes des états liés de l'atome d'hydrogène. C'est une équation différentielle homogène du second ordre qui, en principe, admet des solutions quelque soit l'énergie E . Cela dit, grand nombre de ces solutions croissent exponentiellement à l'infini, ce qui, compte tenu de l'interprétation probabiliste du module carré de la fonction d'onde, n'a pas de sens physique. En fait, seules des valeurs particulières de E conduisent à des solutions physiquement acceptables et, en général, l'ensemble de ces valeurs comprends des valeurs discrètes, qui correspondent aux états liés (ψ tend vers 0 à l'infini) et un continuum de valeurs, qui sont les états de diffusion. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène seules certaines valeurs négatives de l'énergie sont discrètes et correspondent à un électron lié au proton alors que les énergies positives sont continues et décrivent un électron qui est diffusé en passant au voisinage du proton.

Il reste enfin à comprendre comment les états évoluent au cours du temps. Si l'on prend le cas d'une particule libre ($V(\vec{r}) = 0$) on a, pour une composante :

$$\psi(\vec{r}, t) = Ce^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi = \frac{1}{i\hbar}E\psi \quad (3.6)$$

d'après la relation de Planck $E = \hbar\omega$.

Ainsi si l'on admet que cette relation est vraie quelque soit le potentiel extérieur, alors on obtient l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t)} \quad (3.7)$$

dont l'accord incroyable avec les expériences justifie la validité. En effet, à la base de toute description d'un phénomène quantique, elle permet par exemple de retrouver les postulats de Bohr sur l'émission et l'absorption mais également de comparer l'intensité des différentes raies et prévoir les transitions interdites.

3.2 La physique classique retrouvée

Nous disposons désormais de presque tous les concepts et du formalisme de base de la mécanique quantique. Il serait donc très intéressant de commencer à explorer ce monde énigmatique et inconnu qu'est le monde quantique. Malheureusement ceci dépasse le cadre de ce petit cours d'introduction historique que nous allons nous contenter de conclure en discutant la cohérence de cette théorie avec les connaissances de la physique classique.

Comme nous l'avons discuté tout au long de ce cours, la physique, à l'échelle microscopique, est pilotée par des échanges de quantités discrètes d'énergie et de matière. A notre échelle, ces quantités sont tellement petites que le fait d'en rajouter ou d'en enlever quelques unités est sans importance. Les échanges d'énergie et de matière paraissent continus étant donné le grand nombre de quanta mis en jeu. *La limite classique de la physique quantique semble donc être celle des grands nombres de quanta, ou nombres quantiques.*

Prenons l'exemple extrêmement simple d'une seule particule enfermée dans une boîte de taille L à une dimension. Dans ce cas on peut calculer les énergies possibles et les fonctions d'ondes associées

très facilement, soit à partir de l'équation de Schrödinger soit tout simplement à partir d'une condition d'ondes stationnaires. En effet, puisque la particule ne peut pas s'échapper de la boîte (autrement elle aurait une énergie infinie) alors sa fonction d'onde doit être nulle aux bords de la boîte. Les fonctions d'ondes ne peuvent donc être que de la forme de celles dessinées sur la figure 3.2. Ce sont des fonctions cosinus de la forme :

$$\phi(x) = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right), \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (3.8)$$

où chaque fonction d'onde $\phi_n(x)$ décrit la particule à l'énergie E_n , discrète, donnée par

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad (3.9)$$

Ce qui est intéressant est maintenant de comparer les prédictions de la mécanique quantique et de la mécanique classique. Par exemple la mécanique quantique prédit que l'énergie est discrète et que la probabilité de trouver la particule dans un interval δx est $P_Q = |\phi_n(x)|^2 \delta x$ qui dépend à la fois de x mais aussi de l'énergie considérée. Par contre la mécanique classique prédit que l'énergie est continue et que la particule fait des aller-retour dans la boîte avec une vitesse constante (qui dépend de l'énergie). Puisque cette particule se balade à vitesse constante dans la boîte, on a donc la même chance de la trouver à n'importe quel x , et ceci quelque soit l'énergie considérée. Ainsi $P_C = cte \delta x$.

On a donc deux contradictions. Cela dit il est facile de remarquer que ces deux points de vu convergent lorsque l'on regarde une particule de très grande énergie, c'est à dire pour n très grand devant 1. En effet, on a dans ce cas l'écart relatif en énergie de deux niveaux voisins qui tend vers zéro :

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (2n+1) \Rightarrow \frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \sim \frac{1}{n} \quad (3.10)$$

et les fonctions d'ondes sont des cosinus qui oscillent tellement vite que les fluctuations deviennent imperceptibles. Ainsi la probabilité de trouver la particule tend également vers une constante.

Cette limite a lieu lorsque n est très grand, c'est à dire lorsque $E \gg \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$. On voit encore une fois que si l'on considère une particule de masse macroscopique dans une boîte de taille macroscopique, alors cette condition est immédiatement vérifiée compte tenu de la petitesse de ce quantum d'énergie.

Cette condition peut également s'interpréter comme une *condition d'action grande devant le quantum d'action \hbar* . En effet, conformément au chapitre 1 section 1.2.3, l'action de cette particule sur un aller-retour s'écrit :

$$\oint p dx = 2 \int_{-L/2}^{L/2} p dx = 2pL = nh \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad (3.11)$$

qui est exactement la même expression (3.9). Dans ce cas, l'approximation de Bohr-Sommerfeld est exacte mais ce n'est pas en général le cas. En particulier ceci est lié au fait que le concept de trajectoire perd en général son sens en mécanique quantique. Par contre, ce qui est toujours vrai est que la limite classique correspond à celle d'une action très grande devant \hbar .

Sur cet exemple simple, on voit bien la transition entre la mécanique quantique et la mécanique classique mais on ne comprend pas, par exemple, comment le concept de trajectoire réapparaît progressivement. Pour ce faire, il faut faire appel à un formalisme plus compliqué comme l'approximation semi classique WKB ou encore l'intégrale de chemins de Feynman.

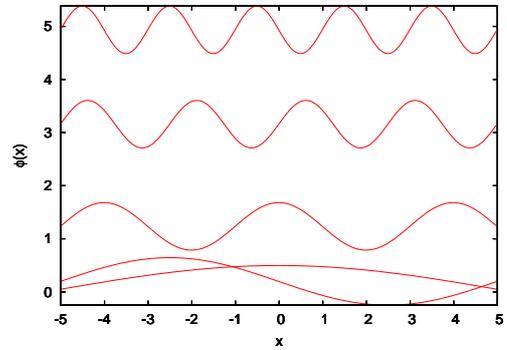


FIG. 3.2 – Quelques fonctions d'onde d'une particule dans une boîte ($L = 10$).

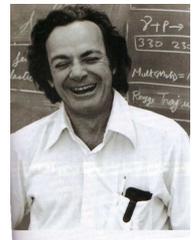


FIG. 3.3 – R.P. Feynman.

Prenons par exemple le problème d'une particule se déplaçant d'un point A vers un point B. Classiquement on sait bien qu'un seul chemin est possible : c'est celui qui vérifie les équations de Newton ou encore le principe de moindre action. Mais du point de vue quantique, comme pour le photon dans le cas des trous d'Young, plusieurs chemins sont possibles. Le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman consiste à supposer que tous ces chemins sont possibles et leurs assigner une certaine amplitude de probabilité. L'amplitude de probabilité $K_{A \rightarrow B}$ totale pour que la particule puisse se rendre du point A au point B est ensuite la somme de toutes les amplitudes de probabilités possibles, c'est à dire la somme sur tous les chemins possibles. A partir de l'équation de Schrödinger on peut montrer que chaque chemin a une amplitude de probabilité proportionnelle à $\exp(iS_{\text{chemin}}/\hbar)$, où S_{chemin} désigne l'action qu'aurait la particule si elle empruntait ce chemin. On a ainsi pour l'amplitude de probabilité totale (dont le module au carré est la probabilité) l'expression suivante :

$$K_{A \rightarrow B} = \sum_{\text{tous les chemins}} \exp [iS_{\text{chemin}}/\hbar] \quad (3.12)$$

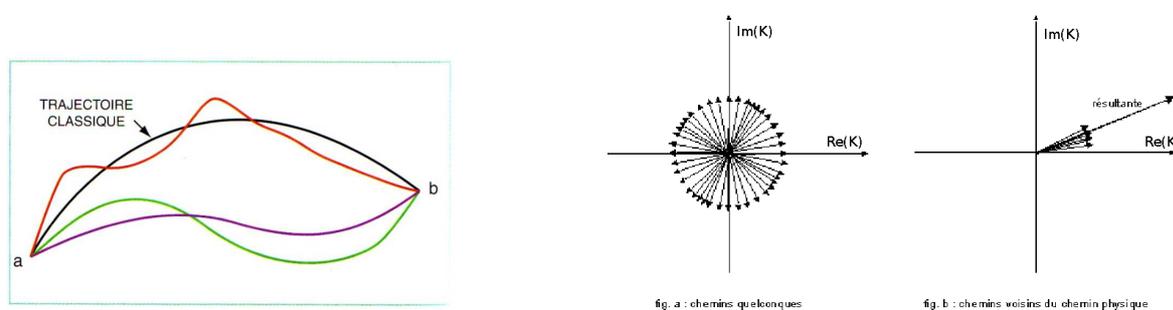


FIG. 3.4 – A gauche : plusieurs trajectoires envisageables par la mécanique quantique. A droite : représentation schématique de la somme (3.12) dans le plan complexe.

Bien sûr cette somme sur tous les chemins reste un peu vague mais regardons ce qui se passe si l'on s'intéresse à un système macroscopique dont l'action, quelque soit le chemin sur laquelle elle est calculée, est très grande devant \hbar . La situation est résumée sur la figure 3.4. Comme S_{chemin} est très supérieure à \hbar , il est évident que la phase de l'exponentielle peut varier sur plusieurs ordres de grandeurs lorsque l'on passe d'une trajectoire à une autre et ceci de manière très rapide. Ainsi, si l'on représente chaque terme de la somme (3.12) par une flèche dans le plan complexe, celui-ci va être rapidement uniformément recouvert (ceci n'arriverait pas si $S_{\text{chemin}} \simeq \hbar$ car la phase ne varierait que peu entre $[0 : 2\pi]$). En première approximation il semble donc que tous les termes se détruisent par interférences et la somme vaut donc zéro. Mais attention, si l'action S_{chemin} est stationnaire sur certains chemins, elle varie alors très peu quand on la calcule sur des chemins voisins. Ceci apporte des contributions plus importantes à la somme que sur le reste du cercle trigonométrique, qui lui est uniformément rempli.

Ainsi, à la limite classique, seuls certains chemins (en général un seul) d'action stationnaire survivent dans la somme (3.12) et contribuent à la probabilité que la particule se déplace du point A au point B. Le concept de trajectoire déterminée ressurgit alors de la mécanique quantique, en apportant par la même occasion une justification élégante du principe de moindre action.

3.3 Quelques applications

Microscope électronique

La résolution typique d'un microscope, c'est à dire l'échelle de distance minimale qu'il peut sonder, est en général limitée par le phénomène de diffraction. Ce dernier fixe grossièrement cette échelle à quelques longueurs d'ondes, c'est pourquoi les microscopes optiques ne peuvent permettre d'observer des objets plus petits qu'une cellule.

Une idée est alors d'utiliser, à la place de la lumière, un faisceau d'électrons que l'on guide avec des champs électromagnétiques plutôt que des lentilles optiques.

L'intérêt majeur de cette technique est l'incroyable facilité qu'elle apporte pour changer la longueur d'onde des électrons. En effet, il suffit de changer l'énergie cinétique des électrons au moyen d'une tension accélératrice pour, en pratique, faire varier leur longueur d'onde de de Broglie de 0.1 nm à 0.001 nm.

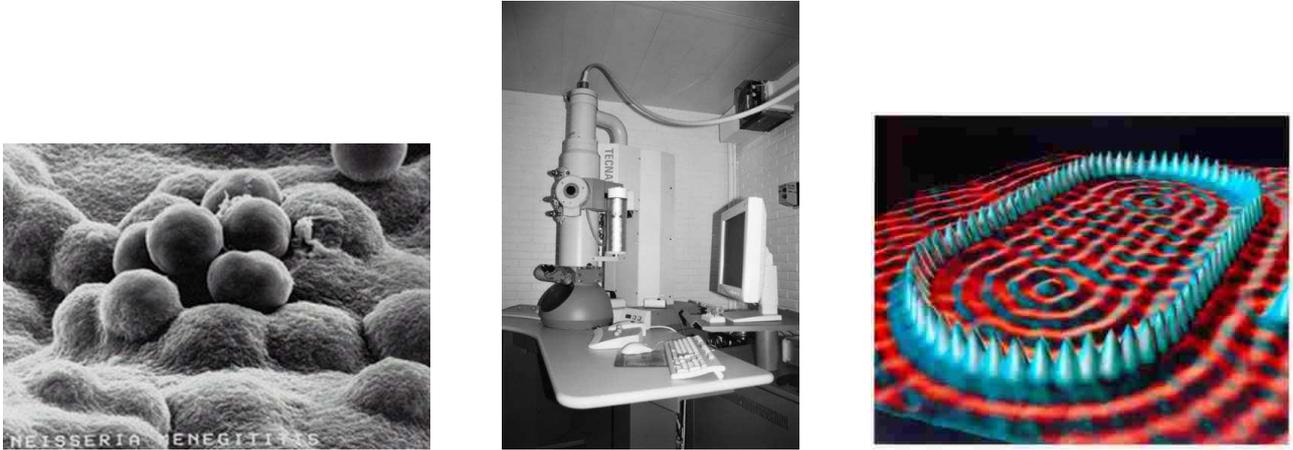


FIG. 3.5 – A gauche : image de bactéries méningocoques, responsables d'un type de méningite, par microscope électronique. Au centre : photo d'un microscope électronique. A droite : densité d'électrons enfermés dans une ellipse de Fer : le caractère ondulatoire de l'électron est manifeste..

C'est ce genre de microscope, réalisé pour la première fois par Ernst Ruska en 1933, qui permet désormais d'observer des plans atomiques mais qui est aussi un outil fondamental pour la biologie moléculaire.

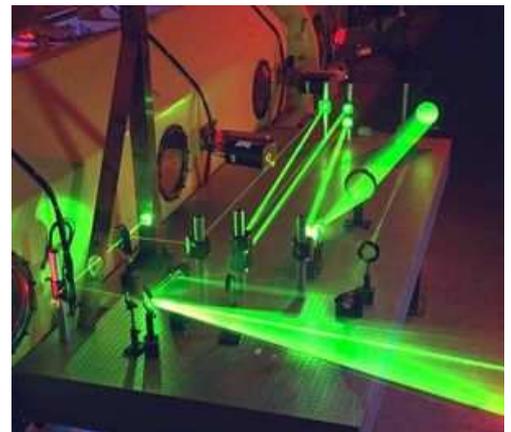
L'effet laser

Un laser est fondamentalement un amplificateur de lumière (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) dont la sortie est branchée sur l'entrée.

Le principe de l'amplification est subtil et repose sur le phénomène d'émission stimulée, découvert par Einstein en 1917. Très grossièrement, si un atome est dans un état excité et qu'un photon vient interagir avec lui, alors il est possible que le photon continue sa route en stimulant l'atome à se désexciter via l'émission d'un photon dont les propriétés sont identiques au précédent. Ainsi il y a désormais deux photons qui peuvent reproduire le phénomène. Bien sûr pour que ceci soit possible il faut que ces photons se baladent dans un environnement où les atomes sont toujours excités. Pour ceci on utilise un milieu amplificateur.

L'amplificateur est un ensemble d'atomes que l'on «pompe» dans un état excité n' , au moyen d'une source d'énergie extérieure. Ces atomes peuvent alors se désexciter vers l'état n , en émettant des photons de fréquence autour de $\nu_{nn'}$. Ainsi un rayonnement de pulsation $\omega \simeq \omega_{nn'}$ passant à travers ce milieu peut être amplifié par des processus d'émission stimulée.

Le rayonnement sortant de cet amplificateur est rebouclé sur son entrée au moyen de miroirs, qui constituent une «cavité». Bien sûr, un dispositif (comme un miroir partiellement réfléchissant) permet d'extraire de la lumière de ce système, pour obtenir le rayonnement laser utilisable. Ainsi un



rayonnement initialement présent dans le système va être amplifié une première fois, puis rebouclé, puis réamplifié, etc. On peut ainsi construire un rayonnement extrêmement important, même à partir d'un rayonnement extrêmement faible (comme un seul photon émis spontanément dans la cavité).

On peut comparer ce processus à l'effet Larsen, qui se produit lorsqu'un amplificateur (la chaîne HiFi) a sa sortie (le haut-parleur) «branchée» sur l'entrée (le micro). Alors un bruit très faible capté par le micro est amplifié, émis par le haut-parleur, capté par le micro, réamplifié, et ainsi de suite... Bien sûr l'intensité du son ne croît pas indéfiniment (tout comme l'intensité de la lumière dans un laser) : l'amplificateur a des limites (il existe un volume maximum du son pouvant être produit). Notons que la fréquence du son émise par ce procédé est bien particulière, et dépend de l'amplificateur, de la distance entre le haut-parleur et le micro : il en est de même pour un laser.

La découverte du laser dans les années cinquante est l'exemple même d'un domaine de la physique fondamentale qui a conduit à d'extraordinaires et innombrables applications qu'il est a priori inutile de citer. Et pourtant les gens qui travaillaient sur ce sujet étaient presque considéré comme des fous à l'époque.

Le transistor

L'effet transistor a été découvert en 1947 par les américains John Bardeen, William Shockley et Walter Brattain, chercheurs de la compagnie Bell Téléphone. Ils ont reçu le prix Nobel de physique en 1956.

Le transistor est le composant électronique actif fondamental en électronique utilisé principalement comme interrupteur commandé et pour l'amplification, mais aussi pour stabiliser une tension, moduler un signal ainsi que de nombreuses autres utilisations. Il a constitué une invention déterminante sans laquelle l'électronique et l'informatique ne posséderaient pas leurs formes actuelles (2007).

Son principe de fonctionnement est assez compliqué mais repose sur l'existence de la quantification des niveaux d'énergie dans certains types de solides appelés semi-conducteurs.

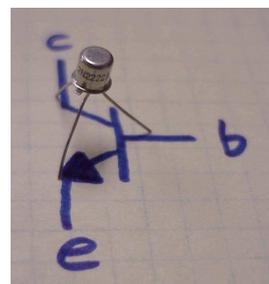


FIG. 3.6 – Transistor bipolaire.

La supraconductivité

La supraconductivité est un phénomène physique extraordinaire, caractérisé par l'absence de résistivité dans un matériau en dessous d'une certaine température critique T_c . En fait, ce phénomène est l'effet d'un comportement quantique macroscopique.

Ceci s'explique de la façon suivante : la résistivité électrique d'un matériau est due à l'interaction entre les porteurs de charges (les électrons) et leur environnement (vibrations du réseau cristallin et impuretés). Dans la mesure où les électrons se repoussent et obéissent aussi au principe de Pauli², ils restent en général isolés de leurs camarades et interagissent de manière individuelle avec l'environnement. Maintenant si l'on suppose qu'ils peuvent s'appareiller deux à deux (paires de Cooper), par un mécanisme qu'il reste encore à comprendre, alors tout s'explique. En effet ces paires adoptent un comportement complètement différent et en particulier elles n'obéissent plus au principe de Pauli. Ainsi, dans certaines conditions de pression et de température, il devient favorable à l'ensemble des paires de se fixer dans le même état quantique, ne formant plus qu'une *seule fonction d'onde collective*. De ce fait, quand un atome du réseau veut interagir avec un électron, il n'a malheureusement plus affaire à une

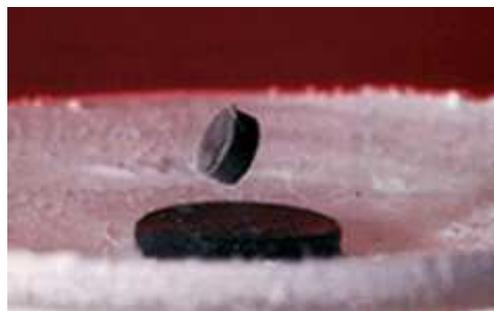


FIG. 3.7 – Lévitiation d'un aimant au dessus d'un supraconducteur.

²La mécanique quantique nous enseigne que deux électrons ne peuvent jamais être dans le même état quantique.

petite vaguelette mais à un Tsunami. Finalement, le collectif de ces électrons faisant sa force, le courant peut circuler sans interactions et donc sans résistance.

Découvert en 1911 par un étudiant en physique, Gilles Holst³, sous la direction du physicien néerlandais Kamerlingh Onnes (ce dernier s'étant par la suite approprié cette découverte), la supraconductivité n'a finalement été comprise⁴ qu'une quarantaine d'années plus tard par les américains Bardeen⁵, Cooper, et Schrieffer. C'est le domaine scientifique qui a conduit au plus grand nombre de publications, car c'est un magnifique problème de physique fondamentale, source d'innombrables applications (champ magnétiques intenses pour l'IRM, imagerie cérébrale par SQUID, filtres électroniques, lévitation magnétique ...).

En plus de cette propriété électrique extraordinaire, certains supraconducteurs possèdent également des propriétés magnétique hors du commun. En effet, en excluant les champs magnétiques de façon très astucieuse, un supraconducteur peut léviter au dessus d'un aimant avec une incroyable stabilité. C'est sur ce principe que fonctionne, par exemple, un train Japonais extrêmement rapide⁶.

³Il est le fondateur de Philips.

⁴Que partiellement car depuis 1980 et la découverte de nouveaux supraconducteurs, elle fait l'objet d'intenses recherches.

⁵Le même qui a découvert le transistor. Il est d'ailleurs la seule personne de l'histoire à avoir reçu deux prix Nobel de physique.

⁶Ce train à sustentation magnétique s'appelle le JR-Maglev (Japon Railway Magnetic levitation train) et peut atteindre la vitesse de 581 km/h.

Conclusion

Ainsi s'achève ce cours d'introduction à la physique quantique, en soulevant bien plus de problèmes qu'il n'en a résolus.

Le lecteur, qui on l'espère reste sur sa faim, a désormais conscience des lacunes de la physique classique et possède les éléments conceptuels essentiels pour y remédier.

C'est alors un nouveau monde physique qui s'ouvre à lui, tout comme aux physiciens du début du 20^e siècle, qui croyaient la physique achevée.

Bien au contraire, le lecteur découvrira à quel point la physique quantique est omniprésente, et que même si elle a été intensément étudiée, ses ressources sont encore loin d'être épuisées. Et ceci reste vrai, tant d'un point de vue fondamental que par les applications potentielles, ou encore son interprétation.

Annexe A

Quelques repères historiques

- Mécanique classique : Sir Isaac NEWTON (1643-1727) - **1687** : Lois de l'attraction universelle - Lois de KEPLER pour les planètes.
- Théorie ondulatoire de la lumière et du rayonnement électromagnétique : James Clerk MAXWELL (Edimbourg 1831- Cambridge 1879) 1860 : théorie cinétique des gaz **1873** : Traité d'électricité et de magnétisme - Les 4 équations de Maxwell.
- **1853** : Observation de la première raie d'émission de l'atome d'hydrogène par Anders Jonas ANG-STRÖM (Uppsala 1814-1874).
- Lord RAYLEIGH (1842-1919) - Loi de Rayleigh et Jeans (**1900**) pour le rayonnement du corps noir - démarche de physique classique. Catastrophe ultraviolette.
- **1887** : HERTZ découvre l'effet photoélectrique.
- **1894-95** : Découverte de l'électron grâce aux expériences de Jean Perrin et J.J. Thomson.
- **1900** : Formule de Max PLANCK (1858-1947) Rayonnement du corps noir - L'énergie cédée par un corps à la lumière qu'il émet (qu'il rayonne) est donnée sous forme de quanta. 1918 : Prix Nobel.
- **1905** « **Année magique** » : Albert EINSTEIN (Ulm 1879-1955) explique l'effet photoélectrique par l'aspect corpusculaire de la lumière = photon d'énergie $h\nu$. 1921 : Prix Nobel sur l'explication de l'effet photoélectrique. Ce sera le seul Prix Nobel d'Einstein. 1905 : Albert EINSTEIN Théorie de la relativité.
- **1911** : Premier congrès SOLVAY à Bruxelles. Les congrès SOLVAY sont des conférences scientifiques réunissant les plus grands scientifiques de l'époque. Ces conseils permirent des avancées importantes en mécanique quantique. Ils furent organisés grâce au mécénat d'Ernest Solvay, un chimiste et industriel belge. Pendant longtemps, Marie Curie fut la seule femme ayant participé à un conseil Solvay.
- **1913** : Niels Henrik David BOHR (1885-1962) explique les spectres de l'atome d'H par le modèle dit de « l'atome de Bohr » - modèle semi-classique car quantification du moment cinétique + notion de trajectoire = modèle génial mais faux. 1922 : Prix Nobel.
- **1914** : Expérience de J. FRANCK et G. HERTZ : Quantification des niveaux d'énergie. Explication par N. BOHR. 1925 : Prix Nobel J. FRANCK et G. HERTZ.
- **1923** : Effet Compton - Arthur Holly COMPTON (1892-1962) 1927 : Prix Nobel. Au photon est associée une énergie $h\nu$ et une impulsion $\frac{h\nu}{c}$.

- **1924** : Louis Victor Pierre Raymond, duc de BROGLIE (1892-1987) introduit la notion de dualité Onde - Corpuscule. 1929 : Prix Nobel.
- **1925** : Werner Karl HEISENBERG (1901-1976) - Première formalisation de la Mécanique Quantique (formalisme matriciel). 1932 : Prix Nobel.
- **1926** : Erwin Rudolf Josef Alexander SCHRODINGER (1887-1961) - Théorie de la Mécanique ondulatoire (équations différentielles) - Les équations de Schrödinger. 1933 : Prix Nobel, partagé avec DIRAC
- **1927** : Congrès SOLVAY à Bruxelles avec I. LANGMUIR, M. PLANCK, M. CURIE, H.A. LORENTZ, A. EINSTEIN, P. LANGEVIN, W. RICHARDSON, P. DEBYE, W.L. BRAGG, H.A. KRAMERS, P. DIRAC, A.H. COMPTON, L. de BROGLIE, M. BORN, N. BOHR, P. EHRENFEST, E. SCHRODINGER, W. PAULI, W. HEISENBERG, R.H. FOWLER, L. BRILLOUIN- ...
- **1927** : Expérience de C.J. DAVISSON et L.H. GERMER : réflexion des électrons par la surface d'un cristal. Et indépendamment en 1928 : G.P. THOMSON : transmission des électrons par un mince film cristallin. 1937 : Prix Nobel C.J. DAVISSON et G.P. THOMSON. Ces 2 expériences confirment la théorie ondulatoire de Louis de BROGLIE en mettant en évidence la nature ondulatoire de l'électron, par diffraction sur un cristal.
- **1927** : Principe d'incertitude de HEISENBERG.
- **1930** : Paul Maurice Adrien DIRAC (1902-1984) établit le formalisme général de la Mécanique Quantique. 1933 Prix Nobel partagé avec SCHRODINGER.
- **1933** : Ernst RUSKA construit le premier microscope électronique par transmission. 1986 : Prix Nobel partagé avec G.BINING et H.ROHRER pour ses travaux sur le microscope électronique, 53 ans après !
- **1947** : Les américains John Bardeen, William Shockley et Walter Brattain, chercheurs de la compagnie Bell Téléphone, découvrent l'effet transistor. Ils ont reçu le prix Nobel de physique en 1956.
- **1957** : Théorie complète de la supraconductivité par John Bardeen, Leon N. Cooper, et John Robert Schrieffer. Prix Nobel de physique en 1972.
- **1960** : Le physicien américain Théodore Maiman obtint pour la première fois une émission laser au moyen d'un cristal de rubis.
- **1965** : S.I. Tomonaga, J. Schwinger et R.P. Feynman reçoivent le prix Nobel de physique pour leurs contributions à l'électrodynamique quantique.
- **1981** : Mise au point du microscope à effet tunnel (STM) par G.BINING et H.ROHRER (IBM Zurich) pour « voir » la forme des atomes. 1986 : Prix Nobel.
- **1997** : Prix Nobel de Physique Claude COHEN-TANNOUDJI (1933-) « Manipulating Atoms with Photons ». Ouvrage de référence en Mécanique Quantique : C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOE « Mécanique Quantique », éditeur : HERMANN.

Annexe B

Eléments de mécanique relativiste

La causalité, c'est à dire le fait qu'un effet physique ne puisse avoir lieu qu'après la cause qui lui a donné naissance, implique l'existence d'une vitesse limite. Cette vitesse infranchissable, l'expérience, ainsi que la cohérence des théories actuelles, nous conduit à postuler qu'il s'agit de la vitesse de la lumière c .

Cet exposé, qui semble tout à fait anodin, conduit en fait à de lourdes conséquences, qui échappent, en général, largement à notre intuition. En effet, le fait que la vitesse de la lumière soit la même quel que soit le référentiel dans lequel on la mesure et le fait qu'aucune particule matérielle ne puisse l'atteindre conduit à reconsidérer complètement les notions d'espace et de temps.

En particulier, Einstein et Poincaré ont démontré en 1905 qu'il fallait remplacer les formules de cinématique d'une particule libre, massive, par les suivantes :

$$\begin{cases} E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mv^4}{8c^2} + \dots \\ \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \vec{v} \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots\right) m\vec{v} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Ainsi, une particule ne peut atteindre la vitesse c à cause du facteur $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ qui augmente son inertie jusqu'à l'infini.

L'énergie se présente sous la forme d'une énergie de masse mc^2 (qui pour nous n'est qu'un simple décalage de l'origine des énergies mais qui peut avoir un rôle considérable dans d'autres problèmes) plus l'énergie cinétique qui, au premier ordre en v/c , redonne la formule usuelle non relativiste. On montre également une formule utile appelée relation de dispersion :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{B.2})$$

D'autre part, Einstein introduit aussi la même année le concept de photon, c'est à dire de grain d'énergie lumineuse. Pour que cette particule puisse se propager à la vitesse de la lumière, il est indispensable qu'elle soit de *masse nulle*. Son énergie et son impulsion sont données par :

$$\begin{cases} E = h\nu \\ \vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

où l'on a utilisé la formule B.2 pour donner un sens à l'impulsion du photon.

De ce point de vue, la cinématique usuelle apparaît comme une limite de la théorie de la relativité pour $v \ll c$.

Annexe C

Loi de Planck pour le rayonnement du corps noir

Considérons une cavité vide dont les parois sont à la température T . Les atomes des parois émettent alors un rayonnement électromagnétique au même taux qu'ils en absorbent, à l'équilibre thermodynamique. La densité d'énergie électromagnétique par unité de volume $\epsilon(T)$ est alors constante et ne dépend que de la température. Cette énergie provient évidemment de la somme de contributions élémentaires à différentes fréquences $\epsilon(\nu, T)$. Le problème est alors de prédire théoriquement l'allure de cette densité spectrale énergétique.

Dans la limite où la cavité est assez grande (grande devant la longueur d'onde typique du rayonnement) on peut montrer que $\epsilon(\nu, T)$ ne dépend pas de la forme de la cavité et suit alors une loi universelle. On considère alors le cas le plus simple d'une cavité cubique de côté L .

A l'équilibre, un système d'ondes stationnaires s'établit au sein de la cavité, dont l'amplitude dépend évidemment de la température. Les champs électriques et magnétiques se décomposent alors en *modes* de la forme

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t)$$

avec $k_i = 2\pi/\lambda_i = n_i\pi/L$, $n_i \in \mathbb{N}^*$.

Afin de déterminer $\epsilon(\nu, T)$ il nous faut connaître deux choses : le nombre de modes qui existent à une fréquence ν (ou nombre d'onde k) (indépendant de T) ainsi que l'énergie moyenne de chaque mode (donnée par son amplitude moyenne) à la température T . Le produit des deux est alors la quantité d'intérêt.

C.1 Nombre de modes de fréquence ν dans la cavité

Un mode est la donnée de trois nombres entiers n_x, n_y, n_z correspondant à l'état du champ électromagnétique selon chacune des directions. Il est alors commode de représenter un mode comme un petit cube dans l'espace abstrait des vecteurs d'ondes (espace réciproque ou encore espace des \vec{k}) comme sur la figure C.1. Dans cette représentation, chaque mode occupe un "volume élémentaire" $(\pi/L)^3$. Pour évaluer notre quantité d'intérêt, commençons par calculer $\mathcal{N}(k)$ le nombre de modes de nombre d'onde inférieur à k . Ceci correspond en fait au nombre de cubes élémentaires qui sont contenus dans le huitième de sphère supérieur de rayon k (car $k_i > 0$). Dans la limite où cette sphère est grande devant la taille des cubes, on peut alors négliger les effets de bords et assimiler ce nombre au rapport des deux volumes

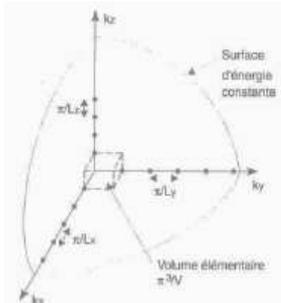


FIG. C.1 – Espace des \vec{k} .

$$\mathcal{N}(k) = 2 \frac{\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = \frac{1}{3\pi^2} L^3 k^3$$

où le facteur 2 provient du fait que la lumière peut avoir deux polarisations différentes.

Le nombre de mode ayant un nombre d'onde compris entre k et $k+dk$ est alors $\mathcal{N}(k+dk) - \mathcal{N}(k) = \frac{d\mathcal{N}(k)}{dk} dk = \rho(k)dk$, où encore en terme de fréquence ($k = \frac{2\pi\nu}{c}$), en posant $\rho(k)dk = \rho(\nu)d\nu$

$$\boxed{\frac{\rho(\nu)}{L^3} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}} \quad (\text{C.1})$$

qui représente la densité de modes de fréquence ν par unité de volume.

C.2 Energie moyenne d'un mode

Maintenant que l'on connaît la densité de modes à une fréquence donnée, il s'agit de connaître l'énergie moyenne de chaque mode à la température T . Pour ceci nous allons utiliser la physique statistique de L. Boltzmann et relever la différence entre un spectre continu et discret. Il est clair que plus T est grand plus l'intensité du rayonnement est grande. Plus précisément Boltzmann a montré que la probabilité pour qu'un mode ait une énergie E est donnée par $\frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\frac{E}{kT}}$ où k est la constante de Boltzmann et \mathcal{Z} est un facteur de normalisation pour que la somme des probabilités soit égale à 1. Ceci veut dire qu'il est presque impossible d'avoir des énergies supérieures à kT .

A l'équilibre thermodynamique, l'énergie d'un mode est donnée par sa valeur moyenne

$$\bar{E}(\nu, T) = \sum E(\nu) \frac{e^{-\frac{E(\nu)}{kT}}}{\mathcal{Z}} \quad (\text{C.2})$$

où la somme désigne ici une somme sur toutes les configurations possibles du mode, c'est à dire toutes les amplitudes possibles.

Reste alors à calculer cette quantité et l'on va voir en particulier que le fait que le spectre des valeurs possibles pour $E(\nu)$ change dramatiquement son comportement.

- **Supposons que toutes les valeurs de l'énergie soient permises :**

On considère en fait l'approche classique où l'amplitude d'un mode peut valoir n'importe quelle valeur et donc l'énergie (qui est reliée au carré de l'amplitude) aussi. Dans ce cas on peut montrer de manière générale, via le théorème d'équipartition de l'énergie, que l'énergie moyenne d'un mode est kT . On trouve alors la loi de Rayleigh et Jeans

$$\epsilon(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad \text{Loi de Rayleigh et Jeans}$$

Mais ceci demande d'introduire encore quelques concepts alors contentons nous seulement de regarder l'effet de la nature discrète ou continue de l'énergie. Supposons que $E(\nu) = \alpha h\nu$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$ qui correspond à l'hypothèse de Planck sans la quantification (voir point suivant pour la quantification). On a alors

$$\bar{E}(\nu, T) = \int_0^{+\infty} d\alpha \alpha h\nu \frac{e^{-\frac{\alpha h\nu}{kT}}}{\mathcal{Z}} = \frac{h\nu}{\mathcal{Z}} \int_0^{+\infty} d\alpha \alpha e^{-\alpha \frac{h\nu}{kT}} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{kT}\right)} \mathcal{Z}$$

et finalement



FIG. C.2 – L. Boltzmann.

$$\mathcal{Z} = \frac{kT}{h\nu} \quad \Rightarrow \quad \bar{E}(\nu, T) = kT$$

et donc la loi de Rayleigh et Jeans.

• **Considérons l'hypothèse de Planck :**

Selon cette hypothèse l'énergie ne peut varier que de manière discontinue avec un *quantum*, égal à $h\nu$. On a alors

$$\bar{E}(\nu, T) = \sum_{n=0}^{+\infty} nh\nu \frac{e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\mathcal{Z}} = \frac{h\nu}{\mathcal{Z}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\frac{h\nu}{kT}} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{kT}\right)} \mathcal{Z}$$

Il faut alors calculer \mathcal{Z} qui a une structure de série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \quad \Rightarrow \quad \bar{E}(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

et finalement

$$\boxed{\epsilon(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}} \quad (\text{C.3})$$

C'est la loi de Planck en très bon accord avec les expériences. A partir de là il est facile d'obtenir la densité d'énergie totale

$$\epsilon(T) = \int_0^{\infty} d\nu \epsilon(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \sim T^4$$

qui dit que la puissance lumineuse croît comme la puissance quatrième de la température (Loi de Stefan-Boltzmann).

On voit ainsi que la simple hypothèse sur la nature discrète ou continue du spectre d'énergie d'un mode a une conséquence spectaculaire. Maintenant il est clair que quand $n \gg 1$ il est alors difficile de voir la nature discrète de l'énergie, qui paraît alors continue. Ceci est en fait possible à "haute température", c'est à dire pour $T \gg h\nu/k$ car l'énergie moyenne est grande. On retrouve dans ce cas la loi de Rayleigh et Jeans qui est purement classique.

La physique classique apparaît donc comme la limite des grands nombre de quanta.

Bibliographie

Ouvrages de base

- [1] E. Belorizky, *Initiation à la mécanique quantique : Approche élémentaire et applications*, Dunod, Paris, 2000.
- [2] C. Gougoussis et N. Poilvert, *Mes premiers pas en mécanique quantique*, Ellipse 2006.

Ouvrages avancés

- [3] C. Cohen-Tannoudji, C. Diu et F. Laloe, *Mécanique quantique*, Hermann, Paris.
- [4] R. P. Feynman, R. B. Leighton et N. Sands *Le cours de physique de Feynman - Mécanique quantique*, Dunod, Paris.
- [5] A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod, Paris.
- [6] L. Landau et E. Lifchitz *Mécanique quantique*, Edition MIR, Moscou.

Articles fondateurs

- [7] J. Franck und G. Hertz, *Über Zusammenstöße Zwischen Elektronen und den Molekullen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **16**, 457 (1914).
- [8] R. A. Millikan, *A Direct Photoelectric Determination of the Planck's h* , Phys. Rev. **7**, 355 (1916).
- [9] A. H. Compton, *A Quantun theory of the Scattering of X-rays by light Elements*, Phys. Rev. **21**, 483 (1923).
- [10] C. Davisson and L. H. Germer, *Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel*, Phys. Rev. **30**, 705 (1927).