
Énoncés de TD de Mécanique des Fluides Phys-M335

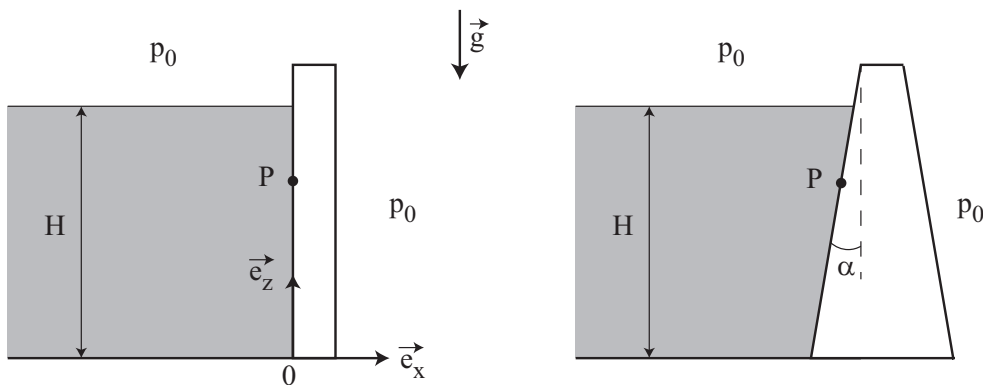


Marine Aulnette
Julien Bouvard
Corinne Donzaud
Cyprien Morize
Anniina Salonen

TD 1 - Hydrostatique

I – Le barrage

On étudie ici la force s'exerçant sur un barrage qui retient une hauteur $H = 100$ m d'eau. On supposera que le barrage a une largeur $L = 500$ m et que la pression au sommet du barrage est la pression atmosphérique p_0 . On néglige les variations de pression de l'air due à l'altitude. On utilise le système de coordonnées cartésiennes. Dans ce système le barrage est parallèle au plan yOz et l'eau retenue par le barrage est à $x < 0$ (fig. a). La base du barrage se trouve dans le plan $z = 0$.



1. (a) Rappeler la loi de l'hydrostatique dans un fluide à l'équilibre de densité ρ soumis à la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. Ecrire cette loi sous la forme d'une équation différentielle permettant de calculer la pression p dans le fluide.
- (b) Intégrer cette équation pour exprimer la pression p en tout point du fluide à l'équilibre. On supposera que $p = p_0$ en $z = H$.
- (c) En appliquant le résultat précédent, tracer l'évolution de la pression dans l'eau entre la base et le sommet du barrage.
2. On cherche maintenant à exprimer la force de pression résultante qui s'exerce sur le barrage.
 - (a) Soit dS un élément de surface du barrage autour du point P et $d\vec{S} = dS \vec{e}_x$ le vecteur associé. Exprimer alors la force de pression résultante $d\vec{F}$ qui s'exerce sur le barrage au travers de dS .
 - (b) En déduire l'expression de la force de pression totale $\vec{F}$ qui s'exerce sur le barrage. Calculer numériquement la norme de cette force.
 - (c) En déduire la force $\vec{R}$ qu'il faut appliquer sur le barrage pour le maintenir immobile. Déterminer la hauteur OP du point d'application de cette force pour que la configuration soit stable.
3. On désire optimiser la forme du barrage qui a, en réalité, une section trapézoïdale symétrique d'angle $\alpha = 20^\circ$ (fig. b).
 - (a) Soit P un point en surface du barrage en contact avec l'eau. Représenter sur un schéma le vecteur surface $d\vec{S}$ au point P .

- (b) Exprimer puis calculer numériquement les composantes de la force de pression sur le barrage $\vec{F}_t$.
- (c) Quel peut être l'intérêt de cette forme de barrage ?

II – L'expérience de Magdebourg

Soit un cube métallique d'arête a qu'on scinde en 2 morceaux égaux. Après avoir reconstitué le cube, on y fait le vide. La pression extérieure est $p_0 = 10^5$ Pa.

1. Quel est l'effet du vide ? Représenter les forces de pression.
2. Calculer la force nécessaire pour séparer le cube en 2 moitiés suivant un plan vertical ($a = 10$ cm).
3. Mêmes questions avec une sphère métallique de même surface que le cube.
4. Mêmes questions lorsque la sphère est immergée dans l'eau à 10 m de profondeur.

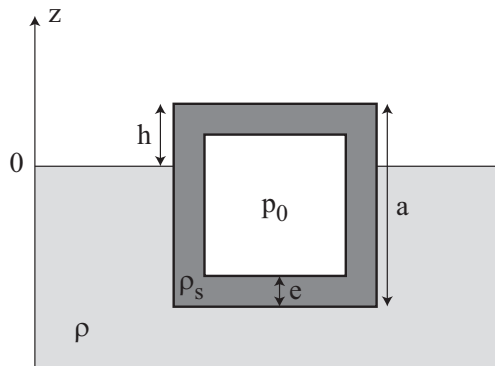
III – Principe d'Archimède

On considère un glaçon de forme cubique de côté $h = 4$ cm et flottant en équilibre dans un verre d'eau rempli à ras bord. On notera ρ_g la densité du glaçon, ρ_e celle de l'eau et ρ_a celle de l'air. On a $\rho_g/\rho_e \simeq 0,92$.

1. Retrouver le principe d'Archimède (dans l'air et dans l'eau) en exprimant la condition d'équilibre du glaçon.
2. Quelle est la hauteur immergée a du glaçon ?
3. Lorsque le glaçon fond, le verre déborde-t-il ?

IV – Submersible

On s'intéresse à l'immersion d'une boîte cubique de côté a dans de l'eau. Le cube, rigide et creux, est rempli d'air à la pression atmosphérique p_0 . Chaque face du cube a une épaisseur fixe e et on notera ρ_s la densité du matériau constituant le cube et M sa masse. Sauf mention contraire, la densité de l'eau ρ est supposée constante et on fait l'hypothèse que l'eau est un fluide parfait. L'axe Oz est pris vertical et orienté vers le haut.



1. Enoncer le théorème d'Archimède.

En déposant le cube dans l'eau, une face parallèle à la surface de l'eau, on constate qu'à l'équilibre sa face supérieure se trouve à une distance h au-dessus de la surface de l'eau de cote $z = 0$.

2. (a) Exprimer la poussée d'Archimède que subit le cube.
- (b) A l'équilibre, exprimer la hauteur émergée h en fonction de M , ρ et a . A quelle condition le cube flottera-t-il ?
- (c) Sachant que $e \ll a$, exprimer la masse M du cube en fonction de a , e et ρ_s . Quelle est alors la condition sur a pour que le cube flotte ? Exprimer numériquement cette condition pour $\rho_s/\rho = 10$ et $e = 5$ cm.
3. On suppose que le cube flotte à l'équilibre avec une hauteur émergée $h = 0$. On lui rajoute une masse m qui n'augmente pas son volume (par exemple en le remplissant d'eau). Que va-t-il alors se passer ? Le mouvement du cube pourra-t-il s'arrêter ?
4. Au cours du mouvement du cube, on prend maintenant en compte la variation de la densité de l'eau avec la profondeur, $\rho(z) = \rho_0(1 + \alpha z)$ avec $\rho_0 = 10^3$ kg/m³.
 - (a) Quel doit être le signe de α pour que le cube s'arrête ? Quelle est sa dimension ? Sachant que $m + M = (1 + k)\rho_0 a^3$ (k nombre sans dimension) exprimer la cote z_e où les forces sur le cube s'équilibreront. Faire l'application numérique pour $|\alpha| = 10^{-6}$ SI et $k = 10^{-3}$.
 - (b) Cet équilibre est-il stable ?

TD 2 - Hydrostatique

I – L'atmosphère terrestre

On s'intéresse ici aux propriétés de la basse atmosphère terrestre, d'altitude inférieure à 10 km (la troposphère). Le gaz atmosphérique est supposé parfait et en équilibre hydrostatique. La masse molaire de l'air est $M = 29$ g. Pour décrire l'atmosphère on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $Oxyz$ où Oz est l'axe vertical orienté vers le haut de l'atmosphère. La pression au niveau du sol est $p_0 = 1$ atm et l'altitude correspondante est $z = 0$.

On suppose dans un premier temps que l'atmosphère est isotherme de température $T = T_0$.

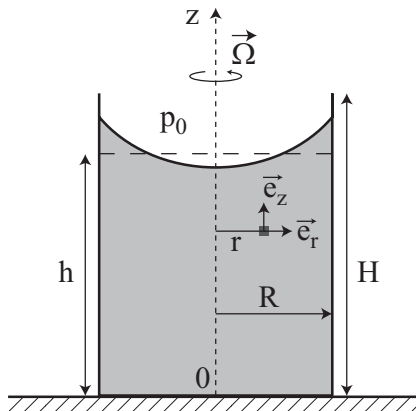
1. A partir du principe hydrostatique, déterminer le profil vertical de pression $p(z)$. On définit $h = RT_0/Mg$. Quelle est la dimension de h ? Quelle est sa signification? Calculer h pour $T_0 = 300$ K.

On suppose à présent que l'atmosphère est adiabatique et que $p = K\rho^\gamma$ avec $\gamma = c_p/c_v$ et K une constante.

2. Etablir une relation entre p et T .
3. De même qu'au 1), établir l'expression de $p(z)$. En déduire l'expression de $T(z)$.
4. Quelle est alors l'expression du gradient de température $a_s = dT/dz$? Exprimez-la en fonction de h . Calculer sa valeur numérique sachant que $\gamma = 1,4$.
5. En basse atmosphère, le gradient de température dT/dz est à peu près constant égal à -7 K/km. Dans ces conditions des mouvements de convection peuvent-ils se développer?

II – Déformation de la surface libre d'un liquide en rotation

On cherche à déterminer la forme de la surface libre d'un liquide contenu dans un verre de hauteur $H = 15$ cm en rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ constante. On note $R = 5$ cm le rayon du verre et $h = 10$ cm la hauteur de liquide lorsque $\Omega = 0$. On suppose que le fluide est au repos dans le référentiel tournant : on parle d'écoulement en rotation solide.



1. On repère une particule fluide par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Quelle est sa trajectoire dans le référentiel du laboratoire ?
2. Compte tenu des symétries du problème, justifier que la pression p dans le liquide ne dépend pas de θ .
3. Écrire l'équation de l'hydrostatique dans le référentiel tournant. Quelle est la force volumique d'inertie d'entraînement $\vec{f}_e$ qui s'applique ici ?
4. Déterminer le champ de pression $p(r, z)$ au sein du liquide. On note z_0 l'altitude de la surface de l'eau en $r = 0$.
5. Déterminer l'équation de la surface libre de l'eau. Tracer la courbe de $z - z_0$ en fonction de r : quel est le nom de cette courbe ?
6. Déterminer la hauteur de liquide z_0 en $r = 0$ en fonction de h , R et Ω . En déduire la vitesse angulaire maximale Ω au-delà de laquelle il n'y a plus de hauteur d'eau non nulle au centre en $r = 0$.
7. Calculer la vitesse angulaire Ω au-delà de laquelle l'eau déborde du verre.

TD 3 - Cinématique

I – Écoulement de Poiseuille

L'écoulement stationnaire d'un fluide soumis à une différence de pression et situé entre deux plans parallèles à xOz , situés en $\pm d/2$, est caractérisé par le champ de vitesse

$$\vec{u} = u_0 \left(1 - 4 \frac{y^2}{d^2} \right) \vec{e}_x.$$

1. Déterminer l'allure du champ de vitesse.
2. Cet écoulement est-il incompressible ?
3. Quelles sont les trajectoires suivies par une particule fluide ?
4. Déterminer les lignes de courant. Coïncident-elles avec les trajectoires ?
5. Calculer le champ de vorticité.
6. Déterminer le vecteur accélération.

II – Modèle de tourbillon

On considère un écoulement permanent dont le champ de vitesse admet comme composantes en coordonnées cylindriques et pour $r \neq 0$:

$$\begin{cases} u_r &= 0 \\ u_\theta &= Ar + \frac{B}{r} \\ u_z &= 0 \end{cases}$$

où A et B sont deux constantes. L'écoulement est-il incompressible et irrotationnel ? Calculer les composantes du tenseur taux de déformation. Après avoir identifié les lignes de courant, discuter les cas particuliers $A = 0$ et $B = 0$ et interpréter physiquement les résultats.

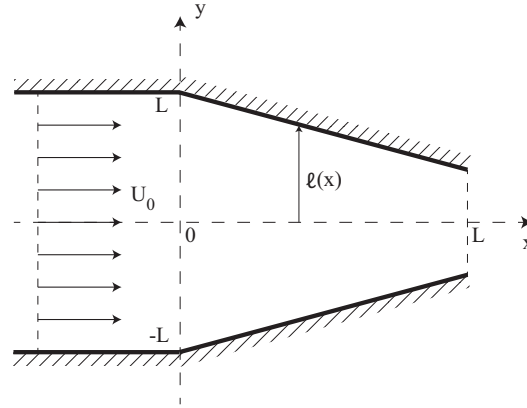
III – Écoulement dans une conduite convergente

On considère l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide dans une conduite convergente, de section rectangulaire, de longueur L et de largeur $2L$. La profondeur D de la conduite dans l'axe perpendiculaire au plan de la figure étant très grande, l'écoulement est invariant suivant l'axe z . Le fluide, en amont du convergent en $x < 0$, est animé de la vitesse $\vec{v} = U_0 \vec{e}_x$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement dans le convergent situé en $x > 0$. On note $\ell(x)$ la demi-largeur du convergent telle que $d\ell/dx = -\alpha$, où α est un coefficient positif tel que $\alpha \in]0, 1[$. On cherche le champ de vitesse en $x > 0$ de la forme

$$\vec{v} = U(x) \vec{e}_x + V(x, y) \vec{e}_y.$$

1. Exprimer la demi-largeur du convergent $\ell(x)$.



2. Déterminer $U(x)$ par conservation du débit volumique. En déduire l'expression de $V(x, y)$ en fonction de α, U_0, L, x et y . On admettra que $V(x, 0) = 0$.
3. Montrer que les équations des lignes de courant vérifient

$$\frac{y}{l(x)} = C^{\text{te}}.$$

Exprimer les équations des lignes de courant pour $C^{\text{te}} = [0 ; 0, 5 ; -0, 5]$. Représenter ces trois lignes de courant sur une même figure.

4. On souhaite savoir comment les lignes de courant se comportent les unes par rapport aux autres dans un convergent. On considère pour cela deux lignes de courant telle que

$$y_1 = C_1 l(x) \text{ et } y_2 = C_2 l(x),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes telles que $C_1 > C_2$. Exprimer l'écart d'ordonnées $\Delta y(x)$ de ces deux lignes de courant. Qu'en concluez-vous ?

5. Exprimer le champ de vorticité et le vecteur accélération. Justifier pourquoi le vecteur accélération n'est pas nul.

IV – Déformation dans un écoulement de cisaillement

Soit l'écoulement de cisaillement bidimensionnel $\vec{u} = ay \vec{e}_x$ avec $a > 0$.

1. Calculer le champ de vorticité de cet écoulement.
2. Calculer le tenseur des gradients de vitesse. En déduire l'expression du tenseur des rotations pures et du tenseur des déformations pures.
3. Montrer que la déformation d'un élément de fluide se traduit par
 - (a) aucune variation de volume.
 - (b) un allongement que l'on précisera suivant la direction $(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.
 - (c) une compression selon $(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.

TD 4 - Dynamique du fluide parfait : équation d'Euler et théorème de Bernoulli

I – Modélisation d'un cyclone

On souhaite modéliser très simplement l'écoulement d'air dans un cyclone. On assimile pour cela l'atmosphère à un fluide parfait de masse volumique ρ et le cyclone à un tourbillon cylindrique d'axe Oz et de rayon a constant avec l'altitude z . On note $z = 0$ l'altitude au niveau de la mer. On suppose que l'écoulement dans le cyclone est stationnaire et compte tenu des symétries du problème, on peut supposer que le champ de vitesse est $\vec{v} = \vec{v}(r, z)$ et le champ de pression $p = p(r, z)$. Pour simplifier le problème, on fait l'hypothèse que notre cyclone obéit à un tourbillon de Rankine, c'est-à-dire que la vorticité est nulle en dehors du cœur du tourbillon (de rayon a) et qu'elle est constante à l'intérieur tel que

$$\text{Région 1, } r \leq a : \vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \omega \vec{e}_z$$

$$\text{Région 2, } r > a : \vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

- Exprimer le vecteur vorticité en fonction des données du problème.
 - Montrer que la composante orthoradiale de la vitesse v_θ est indépendante de z .
 - Déterminer le profil de v_θ dans la région 1 de l'écoulement, que l'on notera v_1 . Vous utiliserez le fait qu'il n'y a pas de singularité en $r = 0$.
 - Exprimer le profil de v_θ dans la région 2 de l'écoulement, que l'on notera v_2 , compte tenu la continuité du champ de vitesse en $r = a$.
 - Représenter la forme du profil de vitesse sur un schéma. Que vaut la vitesse au centre du tourbillon ? Exprimer la vitesse maximale et préciser où est-elle atteinte. Que vaut la vitesse à l'infini ?
- On suppose pour simplifier par la suite que v_r et v_z sont nulles, bien que cette hypothèse soit peu réaliste pour un cyclone, compte tenu de la présence de forts courants ascendants au niveau du cœur du cyclone par exemple.

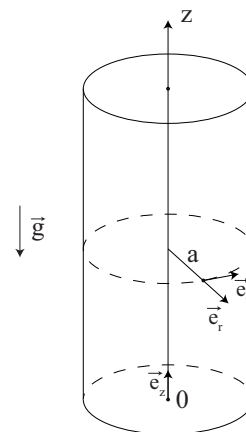


FIGURE 1 – Photographie de l'ouragan Florence en septembre 2018 et schématisation du problème.

- (a) Rappeler l'équation d'Euler sous forme vectorielle.
- (b) Montrer que le terme non-linéaire est donné par $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{v_\theta^2(r)}{r}\vec{e}_r$. Projeter l'équation d'Euler sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$.
- (c) Déterminer le champ de pression $p_2(r, z)$ du cyclone dans la région 2, en utilisant les deux projections de l'équation d'Euler. Quelle condition aux limites raisonnable peut-on imposer à p infiniment loin du tourbillon en $z = 0$?
- (d) Énoncer le théorème de Bernoulli dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel (ce qui est bien le cas dans la région 2) et montrer que l'on peut retrouver $p_2(r, z)$ à partir de ce théorème.
- (e) Montrer le champ de pression $p_1(r, z)$ dans la région 1, en utilisant la continuité du champ de pression en $r = a$ pour déterminer une constante d'intégration, est donnée par

$$p_1(r, z) = p_0 - \rho g z + \rho \omega^2 \frac{(r^2 - 2a^2)}{8}.$$

3. Applications

- (a) Déterminer la dépression Δp générée entre le cœur du cyclone et un point situé à l'infini à la même altitude.
- (b) Évaluer, par un raisonnement simple, la force d'aspiration F exercée par le cyclone sur la toiture (de surface S) d'une maison située au centre du tourbillon et dont on a fermé hermétiquement toutes les ouvertures avant le passage du cyclone.
- (c) On suppose maintenant que le cyclone se trouve en pleine mer. Exprimer la hauteur H de la marée barométrique au niveau du cœur du tourbillon (hauteur de la mer au dessus de son niveau au repos aspirée par la dépression du cyclone).
- (d) Sachant que la vitesse v_θ maximale à la périphérie du cyclone est de 160 km/h, calculer Δp , H et F (pour un toit de surface $S = 100 \text{ m}^2$). On admettra que $\rho_{\text{air}} = 1 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

II – La clepsydre

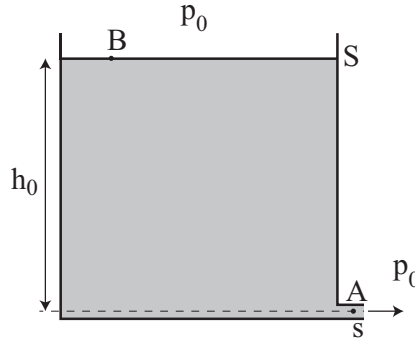
Dans l'Antiquité, les grecs mesuraient le temps en observant la hauteur h d'eau dans un récipient (clepsydre) en train de se vider et cet exercice a pour but d'étudier ce phénomène.

On suppose dans un premier temps que la clepsydre est un récipient cylindrique de section S constante avec à sa base un orifice de section s par lequel l'eau peut s'échapper à l'air libre. Cet orifice est d'abord bouché pour remplir la clepsydre jusqu'à la hauteur h_0 . A $t = 0$ on libère l'orifice et la vidange commence. Les valeurs numériques sont : $h_0 = 1 \text{ m}$, $s = 1 \text{ cm}^2$ et $S = 0,5 \text{ m}^2$.

On suppose que l'eau est un fluide parfait, incompressible et en écoulement permanent. On négligera les variations de pression dans l'air. La pression atmosphérique est $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

1. Soient v_B et v_A les vitesses de l'eau au sommet de la clepsydre et dans l'orifice de sortie. Que vaut v_A/v_B ?
2. Exprimer v_A à $t = 0$ et faites l'application numérique.
3. Exprimer v_B au cours de la vidange et déduisez-en $h(t)$.

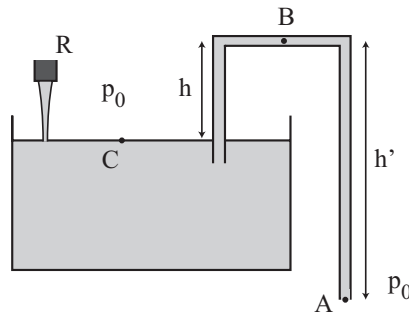
La mesure du temps est plus simple si la hauteur est une fonction affine du temps, soit si $h = at + b$ (les différences de hauteur sont alors proportionnelles au temps écoulé). On cherche la forme de clepsydre correspondante.



4. Soit D le diamètre de la clepsydre : comment doit varier D en fonction de h pour que h varie comme $at + b$? Calculer alors numériquement le temps de vidange de la clepsydre.

III – Le siphon

Un liquide ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) s'écoule par un siphon formé d'un tube en U de section constante. Le haut du tube est à une hauteur h au dessus du niveau de la surface libre dans le récipient et à une hauteur h' de l'orifice de sortie A . Le niveau du liquide (C) dans le réservoir de large section est maintenu constant grâce à l'apport de liquide par le robinet R . On suppose que $v(C) = 0$ et que le liquide est un fluide parfait.

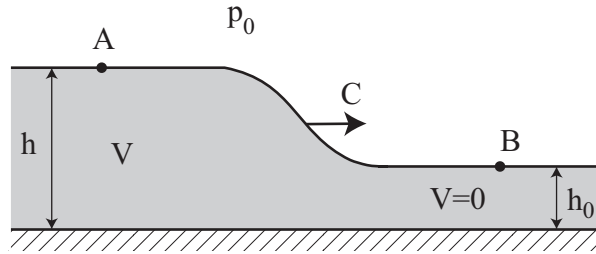


1. Exprimer la vitesse v_A de l'écoulement du liquide en A .
2. Dédire du résultat une condition nécessaire au fonctionnement du siphon. Calculer v_A pour $h' - h = 1 \text{ m}$. On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.
3. Calculer la pression en B pour $h' = 1,5 \text{ m}$ et $h' = 15 \text{ m}$ et commenter son signe.
4. A partir de quelle valeur limite de h' le siphon cessera-t-il de fonctionner?

IV – Vague

On considère une vague d'amplitude $h - h_0$ se propageant à la vitesse C à la surface d'une couche horizontale de fluide au repos d'épaisseur uniforme h_0 .

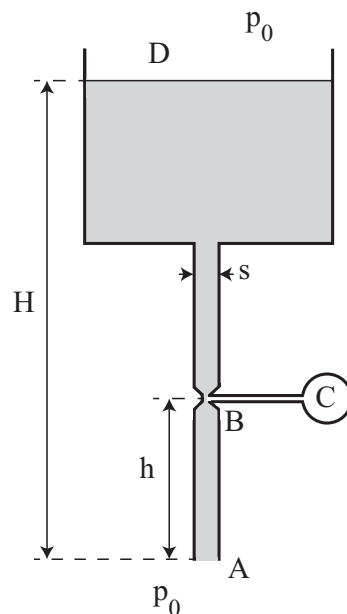
On se place dans le référentiel de la vague pour que l'écoulement soit stationnaire.



1. Déterminer une équation reliant les vitesses V et C par l'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B .
2. Trouver une deuxième équation reliant V et C à l'aide de la conservation du débit.
3. Exprimer la vitesse de propagation C de la vague et la vitesse V du fluide en fonction de h , h_0 et l'accélération de la pesanteur g .

V – Trompe à eau

Une trompe à eau est un dispositif servant à faire le vide. Elle est en général constituée d'un réservoir ouvert de grande section dont le niveau en D est maintenu constant. L'eau s'écoule par un tube de section constante s sauf en un point B où il présente un rétrécissement et où la section est $s_1 = s/4$. En B , le tube est mis en communication avec un récipient C initialement rempli d'air à la pression atmosphérique. En fonctionnement l'eau ne pénètre pas dans C . On étudie maintenant ce dispositif lorsque le régime permanent est établi. On suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible. On note p_0 la pression atmosphérique et on prend $p_0 = 10^5$ Pa. On supposera que la pression en D et A est p_0 .

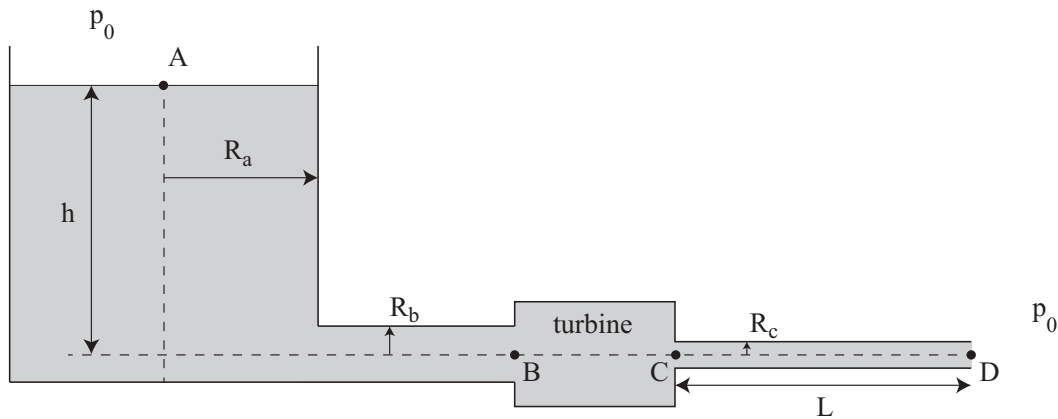


1. Calculer les vitesses v_A et v_B de l'eau aux points A et B . On donne $H = 50$ cm, $h = 10$ cm, $s = 1$ cm² et $g = 10$ m/s².
2. Evaluer la pression en C .

TD 5 - Théorème de Bernoulli généralisé

I – Vidange d'un réservoir à travers une turbine

Un réservoir cylindrique de rayon R_a contient de l'eau de masse volumique ρ . Sa base est reliée par une canalisation de rayon R_b à une turbine dont l'entrée est située à une hauteur h au dessous du niveau du réservoir. L'eau s'écoule en régime permanent dans le tuyau et au travers de la turbine. On notera p_b et p_c les pressions à l'entrée et à la sortie de la turbine. **Tant que $p_b > p_c$, la turbine maintient le débit constant.** A la sortie C de la turbine, le liquide s'écoule dans un tuyau horizontal de rayon R_c et de longueur L puis sort en D . La pression dans l'air est la pression atmosphérique p_0 . Données numériques : $Q = 1$ litre/s, $R_a = 80$ cm, $R_b = 8$ cm, $R_c = 4$ cm, $h = 1,50$ m, $L = 10$ m.



1. Dans toute cette première question on considère que le fluide est parfait.
 - (a) Expliquer pourquoi on peut faire l'hypothèse $v_A = 0$.
 - (b) Exprimer les pressions p_b et p_c .
 - (c) Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ absorbée par la turbine.
 - (d) Calculer numériquement les vitesses v_b et v_c puis p_b et $\mathcal{P}$ pour $h = h_0$
2. On remplace l'eau par un liquide de forte viscosité $\eta = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ mais de même masse volumique. On suppose que les forces de viscosité interviennent uniquement (par soucis de simplification) dans le tronçon CD et que le débit reste le même qu'à la question précédente.
 - (a) On rappelle la loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta l} \Delta p$$

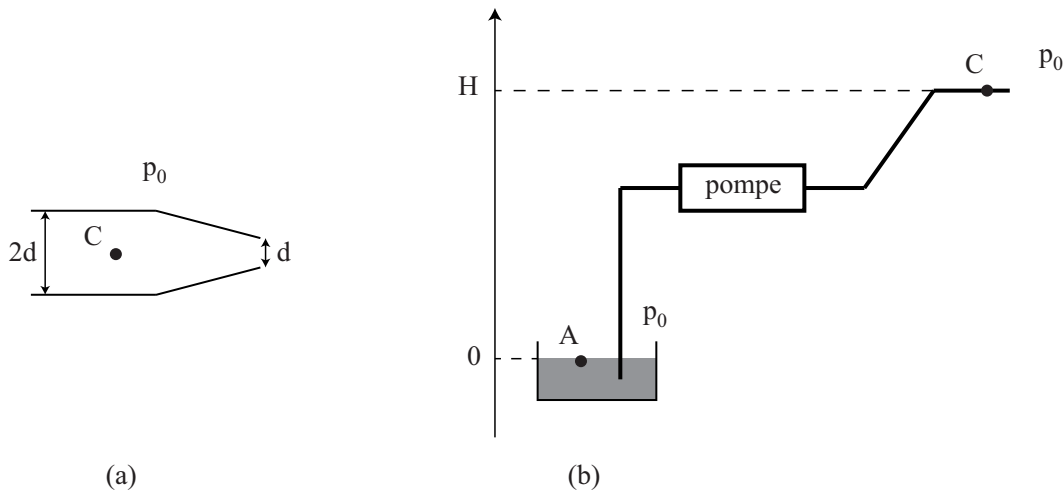
Dans le système présent, que représentent a , η , l et Δp ? Précisez les dimensions de chacune de ces grandeurs.

- (b) Définissez la vitesse moyenne d'écoulement v_m dans le tuyau CD . Est-elle modifiée par la prise en compte des forces de viscosité?

- (c) L'écoulement dans CD est-il turbulent ? (on rappelle le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \frac{\rho v d}{\eta}$)
- (d) Exprimer alors p_c et $\mathcal{P}$ et faites l'application numérique pour $h = h_0$. Comparer $\mathcal{P}$ au résultat obtenu en 1)d) et interpréter.
3. On considère à présent que le niveau du réservoir baisse ($v_a \neq 0$) et on cherche à déterminer comment évoluent en fonction du temps la hauteur h , les pressions p_b et p_c ainsi que la puissance $\mathcal{P}$ absorbée par la turbine.
- (a) Comment s'exprime la vitesse v_a ?
- (b) En supposant que $h = h_0$ à $t = 0$ et que le débit reste constant, exprimer $h(t)$ et $\mathcal{P}(t)$.
- (c) Quelle est la relation entre p_b et p_c lorsque le débit ne peut plus être maintenu par la turbine ? En déduire la hauteur h_1 et le temps t_1 à partir desquels le débit n'est plus régulé. Calculer les valeurs numériques de h_1 et t_1 .

II – Jacuzzi

On s'intéresse ici au fonctionnement d'un jacuzzi alimenté par un réservoir en sous-sol à une profondeur $H = 20$ m. On suppose que l'eau est prélevée à la pression atmosphérique p_0 et que le jet final débouche à l'air libre où règne également p_0 . On suppose que le débit Q_V est de $3,6 \text{ m}^3/\text{h}$. Le réservoir où l'eau est prélevée est suffisamment grand pour que l'on puisse négliger la vitesse à sa surface. On se place en régime permanent et on considère que l'eau est un fluide incompressible et parfait. On néglige toutes les pertes de charge dues à la forme de l'écoulement.



1. On commence par définir le tube délivrant le jet d'eau (fig. a). Pour des questions de confort, on souhaite maintenir l'énergie cinétique du jet à 0.1 Joule pour un volume d'eau de 30 cm^3 .
- (a) Quelle doit alors être la valeur de la vitesse du jet en sortie v_s ?
- (b) Exprimer et calculer le diamètre de sortie d du jet.
- (c) Sachant que le diamètre du tube qui amène l'eau de la pompe au point C vaut $2d$, donner la relation entre v_C et v_s .

- (d) En appliquant le théorème de Bernoulli, exprimer la pression au point C , p_C , en fonction de p_0 , ρ et v_s . Calculer p_C .
2. On cherche maintenant à caractériser la pompe qui permet au jacuzzi de fonctionner. On note $\mathcal{P}$ la puissance mécanique fournie par la pompe au fluide. Le diamètre du tube qui amène l'eau jusqu'au jacuzzi est partout $2d$ sauf dans la partie finale décrite précédemment.
- (a) Quelle est la dimension de $\mathcal{P}/Q_V$?
- (b) En utilisant le théorème de Bernoulli généralisé aux écoulements incluant des machines, exprimer $\mathcal{P}$ en fonction de Q_V , v_s et H . Calculer $\mathcal{P}$.
- (c) En déduire l'expression de la différence de pression Δp entre l'entrée et la sortie de la pompe en fonction de H et v_s . Comment peut-on interpréter cette expression d'un point de vue énergétique (on pourra multiplier les deux membres par le volume d'une particule fluide τ) ?
- (d) Sachant que Δp est une constante caractérisant la pompe indépendamment de Q_V , tracer la courbe de H en fonction de Q_V pour la valeur de Δp calculée précédemment. Pour quelle valeur de Q_V , H est-elle maximale ? Quelle est la valeur maximale de Q_V possible ?

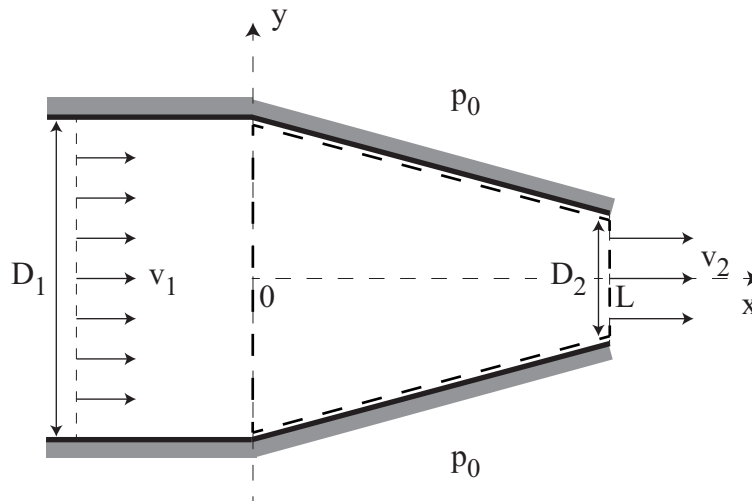
Pour un type de pompe donné, cette courbe permet de déterminer le débit possible pour H donné.

TD 6 - Théorème de transport

I – Lance à incendie

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide parfait dans un convergent cylindrique. Un exemple classique est celui de la lance à incendie représentée sur la figure ci-dessous. L'eau passe d'abord par un tuyau de diamètre D_1 avec la vitesse moyenne v_1 puis par un manchon conique de longueur L et de diamètre de sortie D_2 . A la sortie du manchon, l'eau débouche dans l'air à la pression atmosphérique p_0 avec la vitesse moyenne v_2 . On notera Q_V le débit volumique de cet écoulement.

On suppose que l'eau a une masse volumique ρ constante et que l'écoulement est en régime permanent. On négligera les variations de pression de l'air dues aux différences de hauteur. La surface de contrôle est représentée sur le schéma par des tirêts.



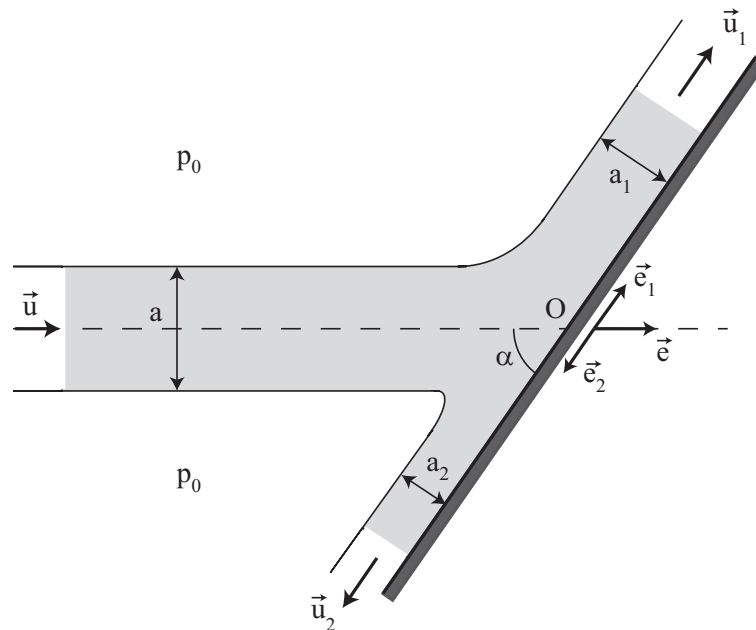
1. Exprimer et calculer v_2 en fonction des données du problème. En déduire v_1 .
Données numériques : $D_1 = 6,5 \text{ cm}$, $D_2 = 2,2 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $Q_V = 5 \text{ L/s}$.
2. Exprimer et calculer la pression moyenne p_1 dans le tuyau de diamètre D_1 .
3. On cherche à estimer la force de recul ressentie par un pompier tenant la lance. En s'appuyant sur le théorème de transport, déterminer la force $\vec{F}$ subie par la lance. S'agit-il d'une force de recul ? Commentez ce résultat.
4. Les pompiers prétendent subir une force de recul lorsqu'ils tiennent une lance à incendie dans les mains. Faire une hypothèse sur la forme de la lance à incendie et faire le calcul.

II – Impact d'un jet sur une plaque plane

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ . Le schéma représente une coupe horizontale d'un jet plan qui arrive obliquement sur une plaque plane (P) en faisant un angle d'incidence α avec la direction du jet et qui, après l'impact, se sépare en deux lames de fluide.

Loin de la région de l'impact, le jet incident à une épaisseur a et une vitesse uniforme u . Après l'impact, les deux lames de fluide d'épaisseurs a_1 et a_2 s'écoulent respectivement avec des vitesses uniformes u_1 et u_2 . L'ensemble (jet + plaque) se trouve dans l'air à la pression atmosphérique p_0 .

On se propose d'évaluer la force $\vec{R}$ qu'il faut exercer sur la plaque (P) soumise à l'impact du jet pour la maintenir immobile, ainsi que la position du point d'application de $\vec{R}$ sur cette plaque.

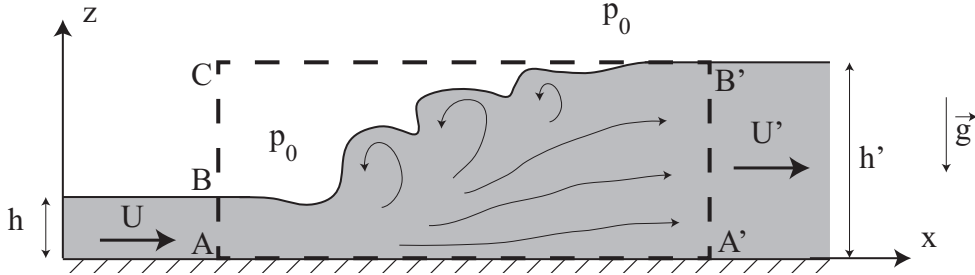


1. Dédurre de l'équation de Bernoulli et de la condition d'incompressibilité, les relations entre u , u_1 et u_2 ainsi qu'entre a , a_1 et a_2 .
2. En s'appuyant sur le théorème de transport de Reynolds, déterminer la résultante $\vec{F}$ des forces de pression subies par la plaque.
On exprimera le résultat en fonction de ρ , a , a_1 , a_2 , u , u_1 , u_2 et des vecteurs unitaires $\vec{e}$, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ des directions associées respectivement aux trois lames de fluide.
3. Expliciter les composantes de $\vec{F}$ le long de la plaque $\vec{e}_1$ et sur la normale $\vec{e}_2$ à la plaque. En déduire l'expression du module de la force $\vec{R}$.
4. Justifier que la composante de la force le long de la plaque est nulle, et en déduire une relation permettant de calculer a_1 et a_2 en fonction de a et α .

III – Le ressaut hydraulique

On s'intéresse à la formation d'un ressaut hydraulique, c'est-à-dire à un changement brutal de la profondeur d'eau, entre l'amont et l'aval, tel que $h < h'$. On considère l'écoulement stationnaire incompressible de faible profondeur dans un canal ouvert d'épaisseur unité dans la direction perpendiculaire. On ne peut pas appliquer l'équation de Bernoulli dans ce problème car il existe une forte dissipation d'énergie au niveau du ressaut : il n'existe donc pas de lignes de courant dont la viscosité est négligeable tout du long. Pour contourner ce problème, on va simplement utiliser la conservation du débit et la conservation de la quantité de mouvement

dans un volume de contrôle suffisamment grand, de sorte que les faces d'entrée et de sortie soient suffisamment éloignées du ressaut pour que la **viscosité soit négligeable**. Le volume de contrôle est délimité par $ABCB'A'$. On suppose de plus que, loin du ressaut, l'écoulement est parallèle et uniforme, de vitesse U et U' en amont et en aval du ressaut respectivement et l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est dirigée selon $-\vec{e}_z$ (le fluide est pesant). On admet que l'accélération de la pesanteur est $g = 10 \text{ m/s}^2$.



1. La répartition de la pression en amont et en aval du ressaut est hydrostatique. Exprimer $p(z)$ et $p'(z)$, respectivement les pressions en amont (sur AB) et en aval (sur $A'B'$) du ressaut.
2. Exprimer le débit volumique Q_v et le débit massique Q_m sous forme intégrale. Donner la relation qui relie ces deux débits pour un fluide incompressible. Sachant que la masse est conservée, que cela implique-t-il sur le débit volumique ? En déduire une relation reliant U , U' , h et h' .
3. En appliquant le théorème de transport de Reynolds relatif à la quantité de mouvement horizontale au domaine fluide $ABCB'A'$. En déduire que

$$\frac{1}{2}gh^2 + U^2h = \frac{1}{2}gh'^2 + U'^2h'.$$

4. Exprimer U et U' en fonction de h , h' et g .
5. On admet que $\sqrt{gh}$ est la vitesse de propagation des ondes à la surface d'un fluide de profondeur h (dans l'approximation en eau peu profonde). On définit les nombres de Froude amont et aval

$$Fr = \frac{U^2}{gh} ; Fr' = \frac{U'^2}{gh'}.$$

Comparer ces deux nombres par rapport à l'unité. Un écoulement pour lequel on a $Fr > 1$ est dit super-critique ou torrentiel, tandis qu'il est dit sous-critique ou fluvial lorsque $Fr < 1$.

6. À partir de l'expression de U déterminée à la question 4, montrer que l'on obtient un polynôme du second degré en h' . Le résoudre et montrer que

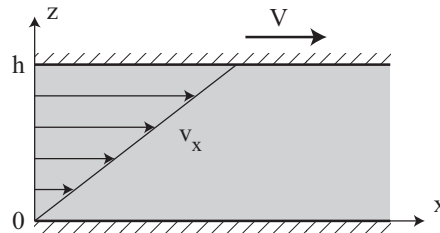
$$\frac{h'}{h} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr}}{2}. \quad (1)$$

7. Avec un débit volumique par unité de largeur de $0,5 \text{ m}^2/\text{s}$ et une profondeur d'approche $h = 0,2 \text{ m}$, calculer U , Fr , h' , U' et Fr' .

TD 7 - Fluides visqueux et équations de Navier-Stokes

I – Écoulement de Couette

On considère l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide visqueux newtonien, incompressible, entre deux plaques parallèles horizontales espacées d'une distance h . La plaque supérieure est en mouvement à la vitesse V , alors que la plaque inférieure est statique. Les deux plaques sont considérées de dimensions infinies dans la direction x . L'écoulement est unidimensionnel, parallèle à la direction x . On note η le coefficient de viscosité dynamique du fluide et ρ sa masse volumique. On admettra que la pression ne varie pas selon x (plaques infinies).

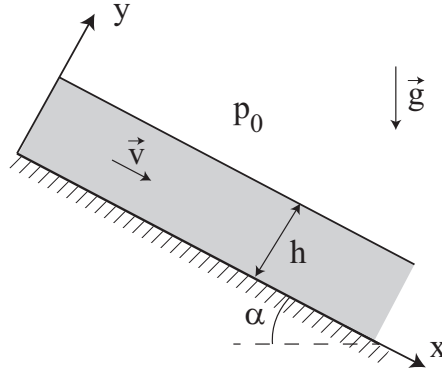


1. Écrire la condition d'incompressibilité compte tenu des hypothèses.
2. Écrire les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites satisfaites par le champ de vitesse. Trouver l'expression de v_x .
3. Cet écoulement est-il irrotationnel ?
4. Calculer le débit volumique de cet écoulement par unité de profondeur dans la direction Oy .
5. On considère que le fluide est de l'huile pour moteur et $h = 3$ mm. La vitesse de la plaque en mouvement est $V = 10$ m/s. On suppose que les propriétés de l'huile sont constantes. On donne : $\rho = 888,2$ kg/m³
 $\nu = \eta/\rho = 900 \cdot 10^{-6}$ m²/s.
Calculer les forces de frottement visqueux du plan $z = 0$ et du plan $z = h$ sur un élément de fluide d'épaisseur dx .

II – Écoulement sur plan incliné

Nous nous proposons d'étudier l'écoulement stationnaire d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. On choisira le système de coordonnées défini par le plan incliné. Sous l'effet de l'attraction terrestre, le fluide s'écoule à l'air libre (à la pression atmosphérique p_0) le long du plan (Ox, Oy) sur une épaisseur uniforme h , avec un champ de vitesse que l'on supposera de la forme $\vec{v} = v(y) \vec{u}_x$.

1. Montrer que cet écoulement est incompressible.



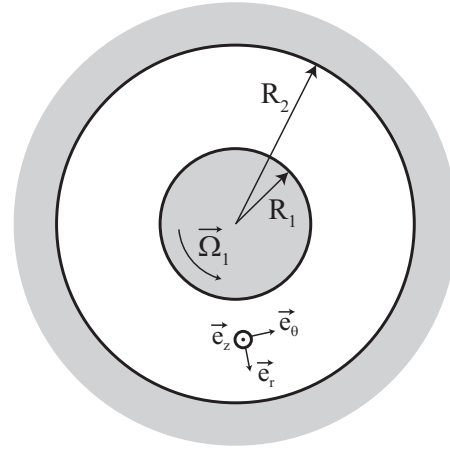
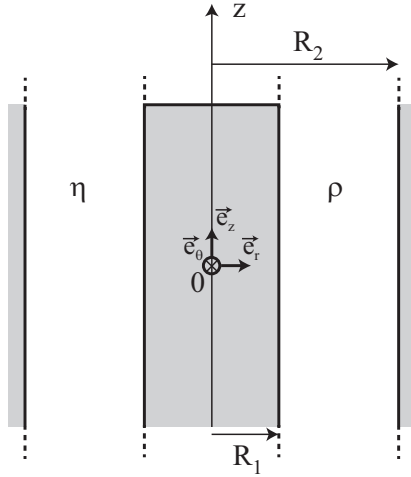
2. (a) Montrer que l'équation de Navier-Stokes se réduit à une équation linéaire dont la projection sur les axes Ox et Oy fournit deux équations différentielles permettant de déterminer la pression $p(x, y)$ et le champ de vitesse partout dans le fluide.
Peut-on négliger les termes $g \sin \alpha$ et $g \cos \alpha$ dans ces équations ?
- (b) Quelle est la condition de pression sur la surface libre (en $y = h$) du fluide en écoulement ? En déduire le champ de pression en tout point du fluide.
- (c) En considérant que la contrainte tangentielle de friction exercée par l'air sur le fluide est négligeable, quelle est la condition de vitesse sur la surface libre (en $y = h$) ?
Déterminer l'allure de la contrainte visqueuse σ'_{xy} . Exprimer la contrainte pariétale σ_0 .
- (d) Quelle est la condition de vitesse sur le plan incliné (en $y = 0$) ? Déterminer l'expression du champ de vitesse $v(y)$, et préciser la forme de son profil.
3. Calculer le débit volumique de cet écoulement par unité de longueur dans la direction Oz .

III – Viscosimètre de Couette

Le viscosimètre de Couette est constitué de 2 cylindres infini coaxiaux pouvant tourner. Le liquide dont on veut mesurer la viscosité est placé entre les cylindres. Le cylindre intérieur de rayon R_1 est entraîné avec une vitesse angulaire Ω_1 alors que le cylindre extérieur de rayon R_2 est maintenu fixe. On suppose le liquide incompressible et newtonien et on ne s'intéresse qu'au régime stationnaire. On admet que le viscosimètre est infiniment haut de sorte que l'on néglige les effets de bords. On néglige enfin les effets de la pesanteur.

On cherche à établir l'expression du couple qui va s'exercer sur le cylindre extérieur. Pour ce faire, on va d'abord établir l'expression du champ de vitesse en utilisant l'équation de Navier-Stokes. On utilisera les coordonnées cylindriques pour décrire l'écoulement.

1. On commence par exploiter les propriétés de symétrie de l'écoulement :
Lorsqu'on met le cylindre intérieur en rotation, que se passe-t-il dans le fluide ? En déduire la direction de la vitesse $\vec{v}$ dans le fluide. Représenter quelques lignes de courant. De quelle(s) variable(s) dépend $\vec{v}$?
2. En projetant l'équation de Navier-Stokes :
 - (a) Établir une équation différentielle sur v valeur algébrique du vecteur vitesse. Intégrez-la et utilisez les conditions aux limites pour déterminer complètement v en fonction des données du problème. On pourra noter $\alpha = R_2^2/R_1^2$.



- (b) Tracer la courbe de v .
- (c) En déduire l'expression de la vitesse angulaire ω .
3. (a) Exprimer la force par unité de surface (ou contrainte) σ_2 qui s'exerce sur le cylindre extérieur. En déduire le couple Γ_2 exercé sur le cylindre.
- (b) Comment peut-on alors mesurer le coefficient de viscosité η du fluide ? Comment faut-il choisir α , R_1 et h étant fixés) pour que cette mesure soit sensible ?
- (c) Sachant que $\Omega_1 = 3$ tours/s, $R_1 = 10$ cm, $\alpha = 2$, $\eta = 10^{-3}$ Pa.s et $h = 0,5$ m, calculer Γ_2 .
4. En utilisant une autre projection de l'équation de Navier-Stokes et l'expression de la vitesse, déterminer la pression en tout point du fluide. On admet que la pression du liquide est p_{ref} en $r = R_2$.

Formulaire

1 Tenseurs

Scalaire

Les grandeurs physiques qui ne dépendent pas de l'orientation portent le nom de scalaires. Leur connaissance complète ne nécessite de connaître que leur intensité (un nombre réel). La température T , la pression p , la masse volumique ρ sont des exemples de scalaires.

Vecteur

Les grandeurs physiques nécessitant la donnée de leur direction, en plus de leur intensité, portent le nom de vecteurs. Pour les définir complètement, la donnée de trois nombres réels est nécessaire. On note a_i , avec

$$i = 1, 2, 3, \text{ les trois composantes du vecteur } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ dans la base orthonormée } \{\vec{e}_i\}$$
$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i.$$

La force, la vitesse, le champ électrique ou les différents gradients sont des exemples de vecteurs. On note un vecteur $\vec{a}$ ou $\underline{a}$.

Tenseur

Il existe cependant certaines grandeurs physiques qui dépendent simultanément de l'intensité et de la direction de deux vecteurs. On nomme ces grandeurs des tenseurs d'ordre 2. Par exemple, la contrainte $\frac{dF_i}{dS_j}$ nécessite

la connaissance du vecteur force élémentaire $d\vec{F}$ ainsi que celle du vecteur élément de surface $d\vec{S}$. On note un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{G}}$ ou G_{ij} .

Rang d'un tenseur

Le rang d'un tenseur est le nombre d'indices nécessaires à son écriture. Ainsi, les scalaires sont des tenseurs d'ordre 0, les vecteurs des tenseurs d'ordre 1. On peut également définir des tenseurs de rang supérieur à 2 : ils apparaissent de temps en temps en physique, par exemple pour décrire des relations linéaires entre tenseurs. Un tenseur de rang 2 correspond à une matrice de $3^2 = 9$ composantes a priori indépendantes.

Convention de sommation d'Einstein

L'écriture des relations tensorielles peut être assez lourde. Dans un souci de simplification, on utilise la convention de sommation d'Einstein. Il existe deux types d'indices :

- les indices "libres" présents qu'une seule fois

- les indices “muets” présents deux fois.

Dans le cas d’indices “muets”, on laisse souvent tomber le signe $\sum$, en sous-entendant qu’il y a sommation sur l’indice répété deux fois. Par exemple, lorsque l’on écrit $a_i = b_i + c_i, \forall i = 1, 2, 3$, l’indice i étant répété, on somme et on obtient le système de 3 équations suivant

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + c_1 \\ a_2 = b_2 + c_2 \\ a_3 = b_3 + c_3 \end{cases}$$

Produit scalaire

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Produit matriciel

$$\vec{y} = \underline{a} \vec{x} \quad \rightarrow \quad y_i = a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad (\text{on somme sur } j \forall i)$$

$$\vec{z} = \underline{b} \vec{y} = \underline{b} \underline{a} \vec{x} = \underline{c} \vec{x} \quad \rightarrow \quad z_i = b_{ij} y_j = b_{ij} a_{jk} x_k = c_{ik} x_k$$

Symbole de Kronecker

Le tenseur unité δ_{ij} est tel que $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Ce tenseur symétrique correspond à la matrice unité I

$$\delta_{ij} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $\forall \vec{x}, \vec{x} = I \vec{x}$ ou $x_i = \delta_{ij} x_j$.

Trace d’une matrice

$$\text{tr}(\underline{a}) = a_{ii} = a_{ij} \delta_{ij} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Dérivées partielles

On note $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$ et $\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j$. Les dérivées partielles commutent telles que $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$.

Divergence

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_i v_i = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3$$

Accélération convective

$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ est un vecteur. La $i^{\text{ème}}$ composante de $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ est

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} /_i = v_j \partial_j v_i = (v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 + v_3 \partial_3) v_i$$

Laplacien

$$\Delta \vec{v} = \nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

$$\Delta \vec{v} /_i = \partial_j \partial_j v_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_i$$

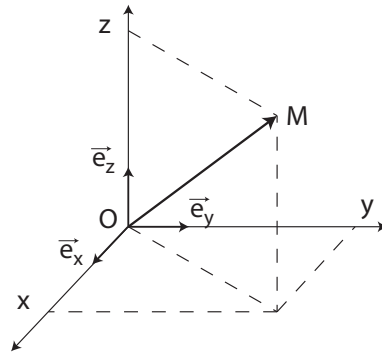
Tenseur taux de déformation

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j)$$

2 Opérateurs

2.1 Coordonnées cartésiennes

Le point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ avec x, y et $z \in \mathbb{R}$. On note $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$ le vecteur vitesse.



Gradient :

$$\vec{\text{grad}} p = \vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \text{ est un vecteur.}$$

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\text{grad}} v_x \\ \overrightarrow{\text{grad}} v_y \\ \overrightarrow{\text{grad}} v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ est une matrice.}$$

Divergence :

$$\text{div } \vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{tr} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ est un scalaire.}$$

$$\overrightarrow{\text{div}} (\underline{\underline{A}}) = \begin{pmatrix} \text{div } \vec{A}_x \\ \text{div } \vec{A}_y \\ \text{div } \vec{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \right)_{i=1,3} \text{ est un vecteur.}$$

Laplacien :

$$\Delta p = \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} p \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \text{ est un scalaire.}$$

$$\Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{div}} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)_{i=1,3} \text{ est un vecteur.}$$

Rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

Tenseur taux de déformation :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{G}}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

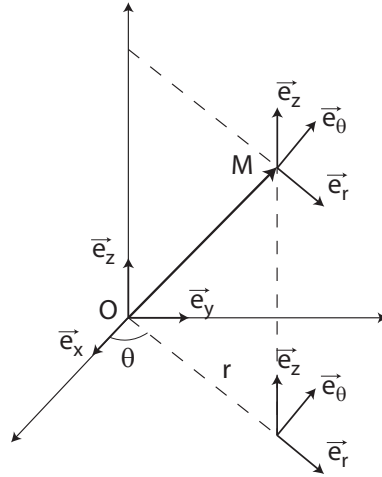
que l'on peut écrire sous forme indicielle $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Ce tenseur taux de déformation est symétrique par définition.

Remarque :

L'opérateur gradient augmente l'ordre du tenseur, l'opérateur divergence le diminue et l'opérateur laplacien le laisse inchangé. Le rotationnel ne s'applique qu'à un vecteur.

2.2 Coordonnées cylindriques

Le point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. Les coordonnées vérifient $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$. On note $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z$ le vecteur vitesse.



Gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z.$$

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Divergence :

$$\text{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{tr} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Laplacien :

$$\Delta p = \text{div} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} p \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

Rotationnel :

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

Tenseur taux de déformation :

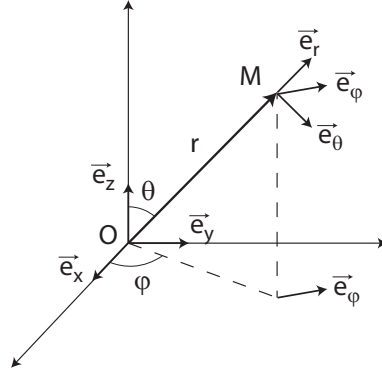
$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{G}}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ // & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ // & // & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

2.3 Coordonnées sphériques

Le point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ) dans le trièdre direct orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ avec $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. Les coordonnées vérifient $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. On note $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$ le vecteur vitesse.

Gradient :

$$\underline{\underline{\text{grad}}} p = \vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$



$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi \cotan \theta}{r} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cotan \theta}{r} \end{bmatrix}$$

Divergence :

$$\text{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{tr} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Laplacien :

$$\Delta p = \text{div} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} p \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}.$$

Rotationnel :

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\varphi) - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_\varphi) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi.$$

Tenseur taux de déformation :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) \\ // & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \cotan \theta}{r} \right) \\ // & // & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cotan \theta}{r} \end{bmatrix}$$

3 Relations usuelles

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\Delta p) = \Delta(\overrightarrow{\text{grad}} p)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f g) = f \overrightarrow{\text{grad}}(g) + g \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v})\right) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}\right) \wedge \vec{v}$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v}) = \underline{G} = \underline{D} + \underline{\Omega}, \quad \underline{D} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v}) + \underline{\underline{\text{grad}}}^T(\vec{v}) \right), \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v}) - \underline{\underline{\text{grad}}}^T(\vec{v}) \right)$$

$$\text{div} \vec{v} = \text{tr} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} \right)$$

$$\text{div}(\Delta \vec{v}) = \Delta(\text{div} \vec{v})$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) = 0$$

$$\text{div}(p \vec{v}) = p \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{div}(p \underline{A}) = p \text{div}(\underline{A}) + \underline{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{div}(p \underline{I}) = \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} - \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$$

$$\Delta p = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} p)$$

$$\Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{div}}(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{v}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v})$$

$$\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g$$

$$\Delta(p \vec{v}) = p \Delta \vec{v} + \vec{v} \Delta p + 2(\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} p) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\Delta \vec{v}) = \Delta(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(p \vec{v}) = p \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + (\overrightarrow{\text{grad}} p) \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \text{div} \vec{v} - \vec{v} \text{div} \vec{u} + (\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u}) \vec{v} - (\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v}) \vec{u}$$

4 Équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}$$

4.1 Coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{1}{\rho} f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

4.2 Coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{1}{\rho} f_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

4.3 Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cotan \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v_\theta \cotan \theta}{r^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cotan \theta}{r} &= \frac{1}{\rho} f_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\cotan \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cotan \theta}{r} &= \frac{1}{\rho} f_\varphi - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\cotan \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned}$$