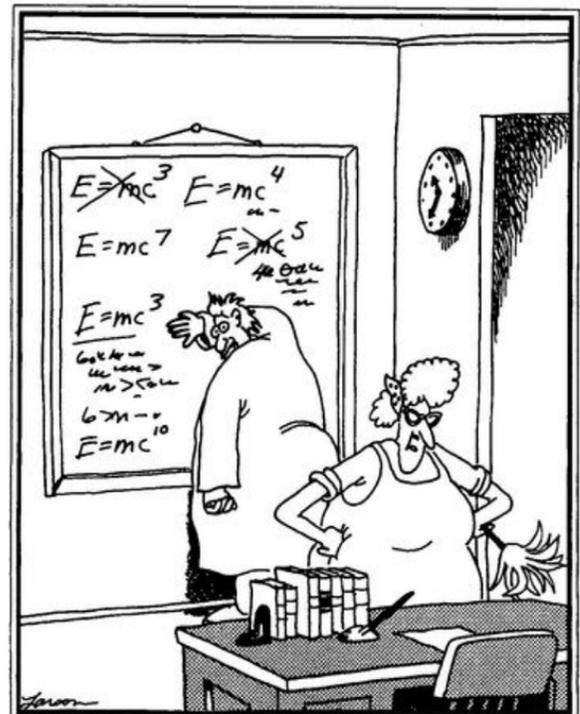
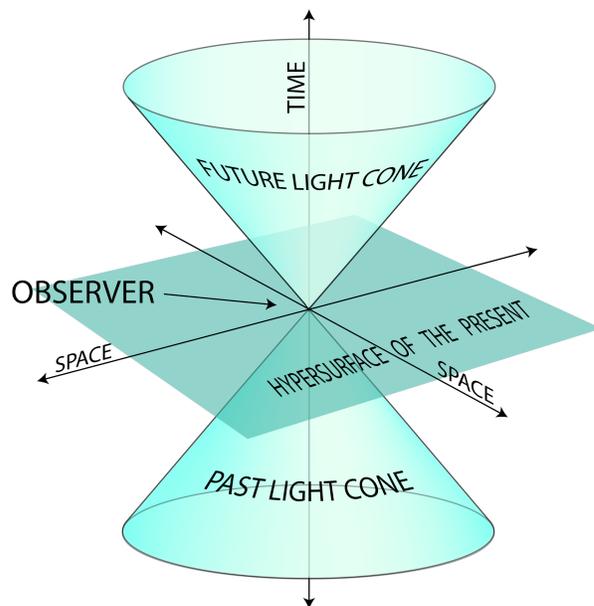


## TRAVAUX DIRIGÉS DE RELATIVITÉ RESTREINTE



"Now that desk looks better. Everything's squared away, yessir, squaaaaared away."



## TD de relativité restreinte n° 1

### Principe de relativité et premières conséquences

## 1 Désintégration

Le  $\Lambda^0$  est un baryon de masse  $1115 \text{ MeV}/c^2$  qui se désintègre en une paire proton-pion :  $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$ . Sa durée de vie propre étant de  $2.9 \times 10^{-10} \text{ s}$ , quelle est la distance moyenne parcourue par un  $\Lambda^0$  d'énergie  $10 \text{ GeV}$  dans le laboratoire ? (On admettra la formule pour l'énergie d'une particule libre qui sera démontrée dans quelques semaines :  $E = m\gamma c^2$ ).

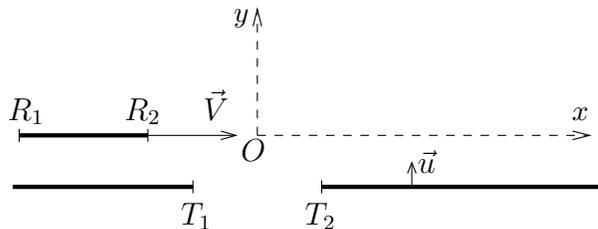
## 2 Contraction des longueurs

On considère deux référentiels inertiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. On considère une règle immobile dans l'un des référentiels et alignée selon l'axe de la translation. Retrouver le phénomène de contraction des longueurs de deux ou trois manières différentes.

## 3 Paradoxe de la règle et du trou

On étudie la situation schématisée sur la figure 1. On se place dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  doté des axes  $x$  et  $y$  et d'une horloge donnant  $t$ . Une règle de longueur propre  $L_0$  se déplace à une vitesse constante  $\vec{V} = V \vec{e}_x$  proche de  $c$ . Un plan percé d'un trou de largeur propre  $L_0$  se déplace lui selon l'axe  $Oy$  à une vitesse constante  $\vec{u} = u \vec{e}_y$  ;  $u \ll c$  de telle sorte qu'on peut traiter le mouvement du trou dans l'approximation non relativiste. Les mouvements de la règle et du trou sont tels que le milieu de la règle rejoint le milieu du trou à  $t = 0$  et coïncide alors avec l'origine  $O$  du référentiel.

Figure 1: Représentation du dispositif. La règle a pour extrémités les points  $R_1$  et  $R_2$ .  $T_1$  et  $T_2$  sont les bords du trou.



En raison de la contraction de la longueur de la règle dans  $\mathcal{R}$ , on s'attend à ce qu'elle passe largement dans le trou. Il apparaît un paradoxe lorsqu'on se place dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  attaché à la règle et qu'on voit la largeur du trou rétrécir: la règle ne pourrait alors plus passer.

Résoudre ce paradoxe en étudiant les coordonnées des extrémités  $R_{1,2}$  et  $T_{1,2}$  de la règle et du trou dans chacun des référentiels ( $\mathcal{R}$  puis  $\mathcal{R}'$ ). *Indication: lorsqu'on travaille dans  $\mathcal{R}'$  il faut étudier la trajectoire des extrémités du trou.*

## 4 Composition des vitesses

1/ On considère une transformation de Lorentz entre deux référentiels. L'un ( $\mathcal{R}$ ) est immobile, l'autre ( $\mathcal{R}'$ ) se déplace à vitesse constante  $V \vec{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . On considère un point matériel en mouvement. Donner les coordonnées de sa vitesse  $\vec{v}$  dans  $\mathcal{R}$  en fonction des coordonnées de sa

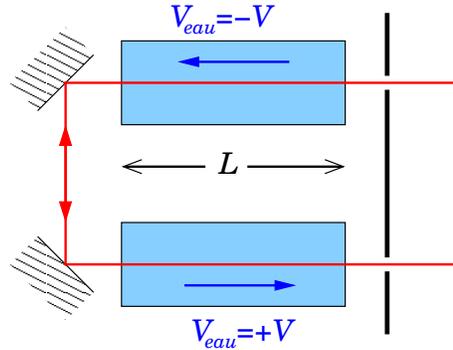
vitesse  $\vec{v}'$  dans  $\mathcal{R}'$  et de  $V$ . On dérivera le résultat de deux manières différentes (soit de manière directe, soit en passant par les lois de transformation de la quadri-vitesse).

2/ On considère deux particules (1 et 2) animées de vitesses constantes  $\vec{v}$  et  $\vec{V}$  dans le laboratoire. On définit la vitesse relative  $\vec{v}_{\text{rel}}$  de 1 par rapport à 2 comme la vitesse de 1 dans le référentiel où 2 est au repos<sup>1</sup>. Montrer que

$$v_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{\left(1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2\right)^2} \left\{ \left(\vec{v} - \vec{V}\right)^2 - \frac{\left(\vec{v} \wedge \vec{V}\right)^2}{c^2} \right\}. \quad (1)$$

## 5 Expérience de Fizeau

On considère le dispositif expérimental illustré par le schéma ci-contre: une source lumineuse (située loin à droite sur la figure) émet un rayonnement que l'on scinde en deux parties qui suivent les chemins illustrés sur la figure: l'un des faisceaux entre dans le dispositif par l'ouverture en haut à droite et a une vitesse dont la direction est toujours identique à celle des écoulements qu'il traverse, l'autre faisceau entre dans le dispositif par l'ouverture en bas à droite et a une vitesse opposée à celle des écoulements qu'il traverse. Les faisceaux sortent du dispositif en se propageant tous deux vers la droite et se réunissent ensuite sur un écran où on les fait interférer.



On note  $v'$  la vitesse de la lumière par rapport à l'eau mesurée dans un référentiel où l'eau est immobile, et  $v_{\pm}$  cette même vitesse mesurée dans le laboratoire. Il y a un indice  $\pm$  pour distinguer les deux vitesses possibles de l'écoulement:  $\pm V$ .

- On note  $n$  l'indice de l'eau, de sorte que  $v' = c/n$ . Montrer qu'en négligeant les termes d'ordre  $(V/c)^2$  on obtient  $v_{\pm} = (c/n) \pm V(1 - 1/n^2)$ .
- En déduire l'expression de la différence de phase  $\Delta\phi$  entre les photons suivant les deux chemins possibles (on notera  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière). Donner la valeur prédite par la mécanique classique.
- Dans son expérience de 1851, Fizeau utilisa un montage pour lequel  $L = 1.487$  m,  $V = 7.059$  m/s,  $\lambda = 0.526$   $\mu\text{m}$  et  $n = 1.333$ . Il obtint  $(\Delta\phi/2\pi) = 0.23$ , cela permet-il de trancher entre l'approche relativiste et l'approche classique ?

## 6 Expérience d'Hafele et Keating

En 1971 Hafele et Keating [J. C. Hafele et R. E. Keating, Science **177**, 166 (1972)] ont réalisé une expérience se rapprochant de celle du paradoxe des jumeaux en synchronisant plusieurs horloges atomiques puis en embarquant certaines d'entre elles pour des tours du monde soit vers l'est, soit

<sup>1</sup>Attention ce n'est  $\vec{v} - \vec{V}$  que dans la limite non relativiste !

vers l'ouest. Lorsque les horloges sont de nouveau réunies, on compare les temps mesurés, c'est à dire leurs temps propres.

On donne: vitesse typique d'un avion de ligne par rapport au sol  $V = 900$  km/h, rayon terrestre:  $R = 6380$  km, durée typique du vol lors de l'expérience:  $T_{\text{vol}} = 2\pi R/V = 45$  h.

**1/** Par une simple estimation basée sur la dilatation des durées, estimer le décalage temporel entre une horloge au sol et une horloge embarquée dans un avion de ligne, initialement synchronisées. De combien un pilote de ligne rajeunit-il en effectuant 1000 h de vol par an sur une carrière de 30 ans ? Même question pour un étudiant qui fait l'aller-retour Paris-Orsay en RER 200 fois par an pendant 5 ans.

**2/** Lors de l'expérience, les horloges voyageant vers l'est sont, comme attendu, en retard par rapport à la sédentaire, mais celles voyageant vers l'ouest sont au contraire en avance, alors que  $\gamma$  ne dépend pas de la direction de la vitesse, mais uniquement de son module. Comment expliquer ce phénomène dans le cadre de la relativité restreinte ?

## 7 Bon anniversaire

L'astronaute Alice ( $A$ ) quitte son ami Bob ( $B$ ) pour un aller-retour vers un système solaire situé à 4 a.l. de la Terre. On suppose que l'aller et le retour s'effectuent à la même vitesse  $v = 0.8c$  et on néglige le temps que met  $A$  pour faire demi-tour.

**1/** Quel est la durée de l'aller du point de vue de  $A$  ? de  $B$  resté sur Terre ?

**2/**  $A$  célèbre l'anniversaire de son départ en envoyant chaque année (selon son horloge) un signal vers  $B$ . Pour  $B$ , quel intervalle de temps sépare la réception de deux signaux successifs envoyés par  $A$  durant le voyage aller ? Durant le voyage retour ? Combien de messages  $B$  reçoit-il en tout ?

**3/** Si  $B$  envoie, lui aussi, un signal à destination de  $A$  chaque année, combien de messages  $A$  va-t-elle recevoir durant la phase aller de son voyage ? Durant la phase retour ? Combien de messages reçoit-elle au total ?

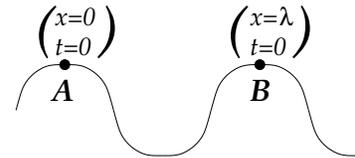
## TD de relativité restreinte n° 2

### Optique et Cinématique du point

### 1 Quadri-vecteur d'onde

Dans cet exercice nous allons démontrer que pour une onde de pulsation  $\omega$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de vitesse de phase  $v_p$ , la quantité  $(\omega/c, \vec{k})$  est un "bon" quadri-vecteur. Pour simplifier, nous allons travailler avec une seule dimension d'espace.

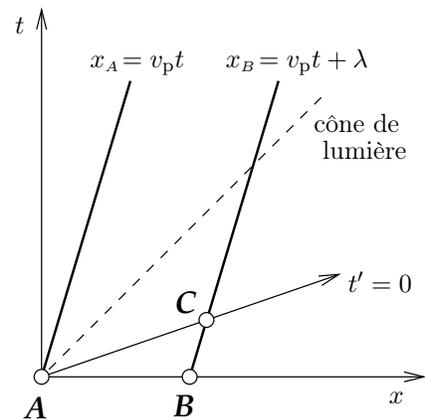
Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, on définit la longueur d'onde  $\lambda$  comme la distance (usuelle) entre deux événements simultanés: deux maxima successifs de l'onde (cf. figure ci-contre). Dans  $\mathcal{R}$ , les maxima de l'onde se déplacent à la vitesse  $v_p$ , vitesse de phase telle que  $v_p = \omega/k$ .



On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $V$  par rapport à  $\mathcal{R}$  selon l'axe  $Ox$ . On appelle  $C$  le maximum plus proche voisin de  $A$  qui est simultané avec  $A$  dans  $\mathcal{R}'$ . Le diagramme d'espace-temps correspondant est tracé sur la figure ci-contre.

Déterminer la coordonnée spatiale de  $C$  dans  $\mathcal{R}'$ , en déduire la longueur d'onde  $\lambda'$ . En définissant  $k' = 2\pi/\lambda'$  et  $k = 2\pi/\lambda$ , montrer que  $k'$  s'exprime à partir de  $k$  et  $\omega$  comme s'y attend pour la composante spatiale d'un quadri-vecteur  $(\frac{\omega}{c}, k)$ .

Vérifier que la partie temporelle a également la bonne loi de transformation. Pour cela il faudra définir la période comme l'intervalle temporel entre deux événements (lesquels ?) puis utiliser une démarche similaire à celle qui a été suivie ci-dessus.



### 2 Mesure de vitesse

Une voiture, assimilée à un miroir, s'éloigne d'un gendarme en ligne droite, à vitesse constante  $V$ . Le gendarme émet un rayonnement lumineux de pulsation  $\omega_i$  qui, après réflexion sur la voiture/miroir, revient vers le gendarme avec une pulsation  $\omega_r$ . Exprimer  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_i$ .

*Indications :* (1) Utiliser le quadri-vecteur d'onde. (2) On notera  $\omega'_i$  et  $\omega'_r$  les pulsations dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au miroir et on justifiera par des arguments physiques que  $\omega'_i = \omega'_r$ .



*U.S. Army soldier using a radar gun to catch speeding violators.*

### 3 Distribution spatiale des photons émis par une source en mouvement

Une source lumineuse émet des photons de manière isotrope dans son référentiel propre  $\mathcal{R}^*$ , le nombre  $dN$  de photons émis dans un angle solide  $d\Omega^*$  s'exprime en fonction du nombre total  $N_0$  de photons émis dans tout l'espace à l'aide de la relation  $dN/N_0 = d\Omega^*/(4\pi)$ . Cette source est animée d'une vitesse  $\vec{u}$  constante par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . On appelle  $dN$  le nombre de photons émis dans un angle solide  $d\Omega$  compris entre les cônes de demi-angle au sommet  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , avec  $\theta$  l'angle que forme la direction du photon émis par rapport à  $\vec{u}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Montrer que  $dN/N_0 = f(\theta) d\Omega/(4\pi)$ , avec  $f(\theta)$  une fonction représentant la distribution spatiale de l'émission des photons dans  $\mathcal{R}$  que l'on exprimera en fonction de  $\beta$  et  $\theta$ . Représenter  $f(\theta)$  en coordonnées polaires pour  $\beta = 1/2$ . Montrer alors que la moitié des photons sont émis dans un cône de demi-angle au sommet valant  $60^\circ$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### 4 Collisions élastiques

Une particule de masse  $m$  et d'énergie cinétique  $K$  entre en collision avec une autre particule de masse identique. On notera  $\vec{e}_x$  la direction de la particule incidente. À l'issue de la collision, les deux particules ont des énergies inégales, et leur vecteurs vitesses  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  sont *a priori* inégalement inclinés sur la direction de la particule incidente:  $\vec{v}'_1 \cdot \vec{e}_x \neq \vec{v}'_2 \cdot \vec{e}_x$ . On notera  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$ .

1/ Montrer qu'en mécanique newtonienne  $\alpha = \pi/2$ .

2/ Montrer qu'en relativité restreinte  $\alpha$  est un angle aigu (indication: exprimer  $\cos \alpha$  en fonction de  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$ ). Discuter les limites newtonienne et ultra-relativiste. Montrer que dans le cas d'une collision symétrique ( $\vec{v}'_1 \cdot \vec{e}_x = \vec{v}'_2 \cdot \vec{e}_x$ ) on a :

$$\cos \alpha = \frac{K}{K + 4mc^2}.$$

### 5 Cinématique des désintégrations en deux corps

1/ Une particule de masse  $M$  et de quadrivecteur énergie-impulsion  $\underline{P} = (E/c, \vec{p})$  se désintègre en deux particules de masses  $m_1, m_2$  et de quadrivecteurs  $\underline{P}_1, \underline{P}_2$  (on supposera  $\vec{p}$  aligné suivant  $Oz$ ).

- Donner l'expression des énergies  $E_1^*$  et  $E_2^*$  des particules 1 et 2 et de leur impulsion commune  $p^*$  dans le centre de masse de la désintégration.
- Montrer que  $\beta_{\text{CM}}$  relatif à la transformation de Lorentz du référentiel du laboratoire à celui du centre de masse est égal à  $p_z c/E$ .
- Exprimer  $E_1$  – énergie de la particule 1 dans le laboratoire – en fonction de  $\beta_{\text{CM}}, E_1^*, p^*$  et de l'angle  $\theta^*$  que fait dans le centre de masse l'impulsion de la particule 1 avec l'axe des  $z$ .
- On suppose la désintégration isotrope dans le centre de masse :  $dN/d(\cos \theta^*) = A$  ( $A$  constante). Déduire de (c) la distribution  $dN/dE_1$  dans le laboratoire.

2/ Un  $\pi^+$  se désintègre en vol suivant le mode :  $\pi^+ \rightarrow \nu_\mu \mu^+$  ( $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$  et  $m_\nu = 0 \text{ eV}/c^2$ ).

- (a) Si l'énergie cinétique  $K$  du  $\pi^+$  est de 140 MeV dans le laboratoire, combien vaut le  $\beta_{\text{CM}}$  relatif à la transformation du référentiel du laboratoire à celui du centre de masse ?
- (b) On choisit l'axe des  $z$  suivant la ligne de vol du  $\pi$  dans le laboratoire. Soit  $\theta$  (resp.  $\theta^*$ ) l'angle sous lequel est émis le  $\mu$  par rapport à cet axe dans le laboratoire (resp. dans le centre de masse). Montrer que

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma_{\text{CM}}} \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \beta_{\text{CM}} \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}} .$$

En déduire que le  $\mu^+$  est émis dans le laboratoire dans un cône d'ouverture  $\theta_{\text{max}} \simeq 9^\circ$ .

## 6 Collision frontale

On étudie la collision élastique frontale d'une particule incidente de masse  $M$  et de vitesse  $\beta = v/c$  avec une particule immobile de masse  $m$ .

1/ Écrire les quadrivecteurs énergie-impulsion initiaux de chaque particule dans le référentiel du laboratoire.

2/ Construire la transformation de Lorentz qui fait passer du référentiel du laboratoire au référentiel  $\mathcal{R}^*$  dans lequel la particule de masse  $M$  est au repos. En déduire la quadri-impulsion de chaque particule dans  $\mathcal{R}^*$ .

3/ On se place dans le cas limite où  $M \gg m$ .

- (a) En étudiant la cinématique d'une collision frontale dans  $\mathcal{R}^*$ , déterminer sans aucun calcul l'impulsion finale *maximale* de la particule légère.
- (b) En revenant dans le référentiel du labo, montrer alors que l'énergie cinétique finale maximale transférée à la particule légère lors de la collision est

$$K = 2 m c^2 \beta^2 \gamma^2 . \quad (1)$$

## 7 Diffusion Compton inverse

Dans l'Univers jeune, des masses de gaz d'hydrogène se contractent pour former des galaxies et on nomme ces systèmes amas de galaxies. En traversant un amas de galaxies, les photons du rayonnement de fond cosmique (corps noir à 2,7 K) subissent des collisions avec les électrons qui augmentent leur énergie: c'est l'effet Compton inverse. On considère donc la diffusion d'un photon de fréquence  $\nu$  et d'impulsion  $\vec{p}$  par un électron d'impulsion  $\vec{p}_e$ , d'énergie  $\mathcal{E}_e$  et de facteur de Lorentz  $\gamma$ . Pour décrire ce processus, on se place dans  $\mathcal{R}'$  le référentiel propre de l'électron après la collision et on suppose que le photon diffusé (de fréquence  $\nu'$  et d'impulsion  $\vec{p}'$ ) se propage selon l'axe  $Ox$ . L'angle entre  $Ox$  et l'impulsion du photon incident est  $\theta$  et l'angle entre  $Ox$  et  $\vec{p}_e$  sera noté  $\varphi$ .

0) *Question de cours:* Rappeler la définition du quadrivecteur impulsion  $\underline{P}$  d'une particule de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ . Que vaut la norme de  $\underline{P}$ ? Exprimer alors  $\underline{P}$  en fonction de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{p}$ , énergie totale et impulsion relativiste de la particule. Rappeler alors la relation entre  $\mathcal{E}$ ,  $p$  et  $m$ .

- 1) Faire un schéma représentant les impulsions et les angles  $\theta$  et  $\varphi$  au cours de la diffusion.
- 2) On cherche à exprimer la variation de longueur d'onde du photon  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$ .

- a) Écrire la conservation de la quadri-impulsion au cours de la collision en utilisant les quadrivecteurs  $\underline{P}$ ,  $\underline{P}_e$ ,  $\underline{P}'$ ,  $\underline{P}'_e$  du photon et de l'électron avant, puis après, la collision.
- b) Établir l'expression de  $\Delta\lambda$  en fonction de  $\cos\theta$  et de la longueur d'onde de Compton  $\lambda_C = h/(m_e c)$ . Calculer sa valeur sachant que  $\theta = 1$  rad. Pour  $\lambda = 1$  mm (valeur typique pour le fond cosmique), que peut-on dire de  $\Delta\lambda/\lambda$  ?

**3)** Reprendre le calcul cinématique en écrivant la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans le cas non-relativiste [avec en particulier  $\mathcal{E}_e = p_e^2/(2m_e)$ ] et montrer qu'on aboutit à

$$\nu' - \nu = \frac{h}{2m_e c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\theta) = \frac{h}{2m_e c^2} [(\nu - \nu')^2 + 2\nu\nu'(1 - \cos\theta)] .$$

Montrer alors qu'on retrouve l'expression de  $\Delta\lambda$  obtenue à la question 2).b) en faisant une approximation que l'on peut légitimer *a posteriori* pour des photons du fond cosmique.

Cette distorsion du rayonnement de fond cosmique à 2,7 K a été étudiée théoriquement par deux physiciens russes Sunyaev et Zel'dovich dans les années 60. Elle est depuis mesurée régulièrement et permet de tracer la masse des grandes structures de l'Univers et de contraindre les paramètres cosmologiques tels que l'âge de l'Univers.

## 8 Taux de collision entre particules relativistes

On fait rentrer en collision deux faisceaux de particules, de vitesses respectives  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  et de densités (nombre de particules par unité de volume)  $n_1$  et  $n_2$ . La section efficace de collision est  $\sigma$ .

**1/** Calculer le nombre de collisions par unité de volume et de temps dans un référentiel où  $\vec{v}_2 = 0$ . Pour avoir une image géométrique du processus, on pourra supposer que les particules du faisceau 1 sont ponctuelles, et que celles du faisceau 2 sont des billes de rayon  $R$  (la section efficace valant alors  $\sigma = \pi R^2$ ).

**2/** En déduire le taux de collision dans un référentiel quelconque lorsque les vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont non relativistes.

**3/** Dans le cas relativiste, en prenant en compte la contraction des longueurs et la définition de la vitesse relative (cf. Eq. (1) du TD1) montrer que

$$\frac{dN}{d^4X} = \sigma n_1 n_2 \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)^2}{c^2}} . \quad (2)$$

Vérifier que cette expression peut se mettre sous la forme

$$\frac{dN}{d^4X} = \sigma \frac{n_1}{\gamma_1} \frac{n_2}{\gamma_2} \sqrt{\frac{(U_1 \cdot U_2)^2}{c^2} - c^2} . \quad (3)$$

En déduire que le résultat obtenu est bien covariant.

**4/** Calculer le taux de collision entre des faisceaux de photons dont les directions font entre elles un angle  $\theta$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\theta = 0$  correspondant à une collision frontale). Comparer avec le résultat d'un calcul non relativiste.

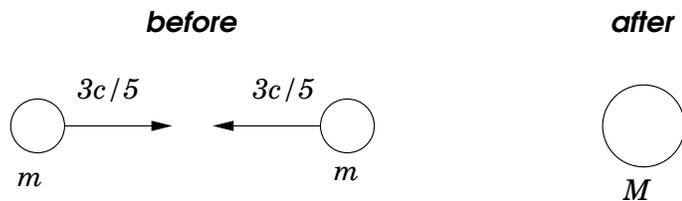
## TD de relativité restreinte n° 3

### *Dynamique relativiste*

### 1 Masse = énergie au repos

1/ Deux morceaux d'argile, chacun de masse  $m$  ont une collision frontale à la vitesse  $3c/5$ . Elles se combinent pour former une particule composite (cf. figure ci-dessous). Quelle est la masse  $M$  de cette particule ?

Figure 2: Collision-adhésion de deux particules de masses égales.



2/ An example of bound state is the hydrogen atom. It consists of a positively charged proton and a negatively charged electron, the two being bound together by the electric force. The rest masses of the two particles are respectively:  $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$  ;  $m_e = 0.5 \text{ MeV}/c^2$ . The corresponding binding energy is  $\Delta E = -13.5 \text{ eV}$ . Evaluate the rest energy  $Mc^2$  of the hydrogen atom and the relative mass gain  $(m_e + m_p - M)/(m_e + m_p)$ .

3/ Défaut de masse : une particule  $\alpha$  est le noyau d'un atome  ${}^4\text{He}$ , constitué de deux neutrons et de deux protons. Les différentes masses sont<sup>1</sup> : masse du noyau d'Hélium : 4.0026 u, masse du proton : 1.0073 u, masse du neutron : 1.0087 u. Calculer l'énergie de liaison de la particule  $\alpha$ .

Même question pour le noyau  ${}^{238}_{92}\text{U}$  dont la masse vaut 238.0022 u. Quelle est l'énergie de liaison électronique totale de cet élément sachant que la masse de l'atome  ${}^{238}_{92}\text{U}$  vaut 238.0508 u (on prendra  $m_e = 5.49 \times 10^{-4} \text{ u}$ ) ?

### 2 Mouvement à accélération propre constante

Un vaisseau spatial quitte la Terre avec une accélération propre  $a_0$  constante à chaque instant. On supposera qu'à l'instant  $t = 0$  du référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, le vaisseau se trouve à l'origine des coordonnées avec une vitesse nulle.

- Exprimer le temps  $t$  du référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  en fonction du temps propre  $t^*$  du cosmonaute, les origines des temps étant communes au moment du départ.
- Exprimer le temps propre  $t^*$  en fonction de la distance  $x$  parcourue par le vaisseau spatial mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  terrestre.
- On prendra pour unité de temps l'année ( $a$ ) et pour unité de distance l'année lumière ( $a.l.$ ). Calculer le temps propre  $t^*$  et le temps  $t$  correspondant pour un observateur terrestre, pour que le cosmonaute atteigne, en maintenant son accélération propre constante  $a_0 = 9,52 \text{ m.s}^{-2}$

<sup>1</sup>L'unité u de masse atomique vaut 1/12 de la masse de l'atome de  ${}^{12}\text{C}$ .  $1 \text{ u} = (1/N_A) \text{ g} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.49 \text{ MeV}/c^2$ .

(proche de l'accélération de la pesanteur), l'étoile la plus proche du Soleil , Proxima du Centaure, située à 4,25 *a.l.* Même question pour atteindre le centre de notre galaxie situé à 30000 *a.l.*, la galaxie d'Andromède située à 2,2.10<sup>6</sup> *a.l.* et enfin pour atteindre les limites observables de notre univers estimées 15.10<sup>9</sup> *a.l.*

### 3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Soit un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  où règne une champ électrique uniforme et indépendant du temps  $\vec{E}_S$  dirigé suivant l'axe  $Ox$ . A  $t = 0$  une particule chargée est envoyée de l'origine  $O$  du repère avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  parallèle à l'axe  $Oy$ .

Etudier le mouvement de cette particule chargée par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  et donner l'équation de sa trajectoire. Retrouver l'expression de la trajectoire classique dans l'approximation non relativiste.

### 4 Paquets d'électrons

Dans un anneau synchrotron, on obtient un rayonnement fortement focalisé et cohérent grâce à l'accélération de paquets d'électrons groupés. On s'intéresse ici à l'évolution d'un paquet d'électrons dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du centre de masse du paquet puis dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  du laboratoire. La vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $\vec{V} = V \vec{e}_z$ .

La masse d'un électron du paquet est notée  $m$ , sa charge  $q$  et sa vitesse dans  $\mathcal{R}$  est  $\vec{u}$ . On notera  $\gamma_u = (1 - \vec{u}^2/c^2)^{-1/2}$  le facteur de Lorentz associé. Dans  $\mathcal{R}$  l'énergie totale de l'électron sera notée  $\mathcal{E}$  et son impulsion  $\vec{p}$ .

1/ On commence par établir l'expression de la quadri-force  $\underline{F}$  d'un électron du paquet dans  $\mathcal{R}$ . On note  $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  la force qui s'exerce sur l'électron dans  $\mathcal{R}$ .

- (a) Rappeler l'expression de la quadri-impulsion  $\underline{P}$  de l'électron en fonction (i) de  $m$ ,  $\gamma_u$  et  $\vec{u}$ , puis (ii) de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{p}$ . Dédire de (ii) une expression de  $d\underline{P}/d\tau$ . Justifier que  $\underline{P} \cdot d\underline{P}/d\tau = 0$ , puis que  $d\mathcal{E}/d\tau = \vec{f} \cdot \vec{u}$ .
- (b) Dédire du résultat précédent que la quadri-force  $\underline{F} = d\underline{P}/d\tau$  (où  $\tau$  est le temps propre de l'électron) s'exprime comme

$$\underline{F} = \gamma_u \left( \frac{1}{c} \vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f} \right). \quad (1)$$

2/ On supposera désormais que

$$u/c \ll 1 \quad \text{et} \quad u \ll V. \quad (2)$$

On va tirer de (2) des conséquences qui devront être utilisées dans tout le reste du problème.

- (a) Donner une approximation simple de  $\gamma_u$ . Justifier alors que la quadri-force dans  $\mathcal{R}$  a pour expression  $\underline{F} \simeq (0, \vec{f})$ .
- (b) Justifier rapidement que la vitesse  $\vec{u}'$  d'un électron dans  $\mathcal{R}'$  peut s'écrire  $\vec{u}' \simeq -\vec{V}$ . En déduire une relation simple entre les facteurs de Lorentz  $\gamma_{u'}$  (pour l'électron dans  $\mathcal{R}'$ ) et  $\gamma$  (qui caractérise le changement de référentiel). Donner alors l'expression de la quadri-force  $\underline{F}'$  dans  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $\vec{f}'$  et  $\vec{V}$ .

**3/** Dans  $\mathcal{R}$ , on considère un paquet d'électrons sphérique de centre  $O$  (origine de  $\mathcal{R}$ ). On suppose que le champ électrique associé est à symétrie sphérique et indépendant du temps, et qu'il n'y a pas de champ magnétique.

- (a) Quelle est la direction et le sens de la force  $\vec{f}$  s'exerçant sur un électron du paquet ? (faire un schéma).

Dans la suite, on utilisera  $\vec{f}_\perp$  et  $\vec{f}_\parallel$ , les contributions à  $\vec{f}$  perpendiculaires et parallèles à  $\vec{e}_z$ , telles que  $\vec{f} = \vec{f}_\parallel + \vec{f}_\perp$ .

- (b) Écrire la transformation de Lorentz donnant  $\underline{F}'$ , la quadriforce de l'électron dans  $\mathcal{R}'$ , en fonction de  $\underline{F}$ . Exprimer alors  $\vec{f}'_\parallel$  en fonction de  $\vec{f}_\parallel$  et  $\vec{f}'_\perp$  en fonction de  $\vec{f}_\perp$ .
- (c) On se place dans le cas ultra-relativiste où la vitesse  $\vec{V}$  du paquet d'onde dans  $\mathcal{R}$  est proche de celle de la lumière. Comment va alors évoluer le paquet d'électrons dans  $\mathcal{R}$  ?

**4/** On note  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  les champs électrique et magnétique générés par le paquet d'électrons dans  $\mathcal{R}'$ .

- (a) Exprimer  $\vec{f}'$  la force s'exerçant sur un électron dans  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$ .

- (b) Sachant que  $\vec{B}' = -\frac{\vec{V} \wedge \vec{E}'}{c^2}$  et que  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ , exprimer  $\vec{f}'$  en fonction de  $\vec{E}'_\parallel$  et  $\vec{E}'_\perp$  (contributions parallèle et perpendiculaire à  $\vec{e}_z$  avec  $\vec{E}' = \vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp$ ).

- (c) En comparant avec les lois de transformation établies en **3/**(b), donner la loi de transformation qui permet de passer de  $\vec{E}$  dans  $\mathcal{R}$  à  $\vec{E}'$  dans  $\mathcal{R}'$ .

## 5 Synchrotron à protons

Un synchrotron est un accélérateur de particules qui permet de maintenir les particules sur une trajectoire circulaire fixe. Pour cela, une série d'électroaimants créent un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, perpendiculaire au plan de la trajectoire et variant lentement avec le temps de façon à maintenir le rayon  $R$  constant pendant toute la montée en énergie des protons dans le cas considéré ici. Ces protons sont accélérés dans une cavité accélératrice où le champ électrique qui leur est appliqué varie avec une fréquence  $f$  multiple de la fréquence de rotation  $\nu$  des protons. On notera  $k = K/mc^2$  l'énergie cinétique réduite des protons, avec  $mc^2 = 0,938$  GeV pour un proton.

- (a) Pour une valeur de  $k$  donnée, exprimer la valeur du champ magnétique  $B$  et de la fréquence  $\nu$  maintenant les protons sur la trajectoire circulaire de rayon  $R$  donné.
- (b) On suppose qu'à chaque tour, l'énergie des protons augment d'une quantité  $\Delta E_0$  constante. En assimilant la variation d'énergie à une variation continue, établir la loi de variation du champ magnétique  $B$  avec le temps. En déduire celle de  $k$  et de  $\nu$  en fonction du temps.
- (c) A.N. : Au Super Proton Synchrotron (SPS) du CERN à Genève, les protons sont injectés avec une impulsion initiale  $p_i = 26$  GeV/c, le rayon du synchrotron vaut  $R = 1100$  m,  $\Delta E_0 = 50$  keV et le champ magnétique final  $B_f = 1,21$  T. Calculer l'énergie finale des protons, leur impulsion finale  $P_f$ , la durée de la montée en énergie, le nombre de tours effectués, la distance parcourue par les protons pendant cette phase d'accélération et les fréquences extrêmes.

## TD de relativité restreinte n° 4

### Electrodynamique relativiste

### 1 Jauge de Coulomb

On considère une configuration des champs électromagnétiques correspondant aux potentiels  $\phi(\vec{r}, t)$  et  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Déterminer le champ scalaire  $G(\vec{r}, t)$  permettant à la transformation  $\phi \rightarrow \phi^* = \phi - \partial_t G$ ,  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla} G$  de satisfaire la condition de jauge de Coulomb:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* = 0$ .

### 2 Charge ponctuelle en mouvement rectiligne uniforme

Soit une particule  $P$  de charge  $q$  qui se déplace selon  $Ox$  à la vitesse uniforme  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  et qui passe à l'origine à l'instant initial. On désigne par  $\mathcal{R}_0$  le référentiel propre associé à cette particule. Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}$ .

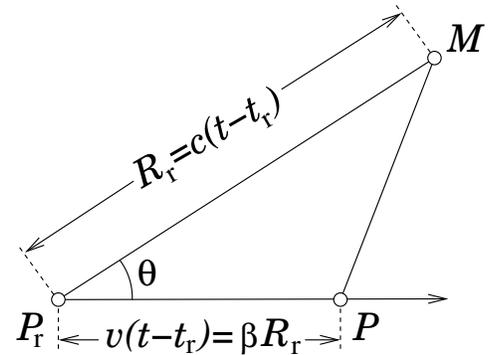
1/ Evaluer dans  $\mathcal{R}_0$  le quadripotential du champ créé en  $M$ . En déduire les expressions de  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$ . Exprimer dans  $\mathcal{R}$  le quadripotential en fonction de  $(x, y, z, t)$ .

2/ On ne considérera plus désormais que le référentiel  $\mathcal{R}$ . Démontrer que le potentiel scalaire peut se mettre sous la forme (les notations sont définies sur la figure):

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{1/2}}. \quad (1)$$

3/ On désigne par  $t_r$  le "temps retardé" qui est défini comme suit: un photon émis par  $P$  à l'instant  $t_r$  arrive en  $M$  à l'instant  $t$ . On note  $\vec{R}_r = \overrightarrow{P(t_r)M}$ . Démontrer que  $\sin \alpha = \beta \sin \psi$ . En déduire

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{R_r(1 - \hat{R}_r \cdot \vec{\beta})}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \hat{R}_r = \vec{R}_r/R_r, \\ \vec{\beta} = \frac{v}{c} \vec{e}_x. \end{cases}$$



4/ Exprimer  $\vec{E}$  en fonction de  $x, y, z, t$ . Etudier les variations de  $E_x$  et de  $E_{y(z)}$  en fonction de  $\xi = x - vt$ , en particulier pour  $\beta \simeq 0$  et pour  $\beta \rightarrow 1$ . Commenter. Tracer les lignes de champ. Exprimer  $\vec{B}$ . Montrer que  $\vec{B} = \vec{\beta} \wedge \vec{E}/c = \hat{R}_r \wedge \vec{E}/c$ .

### 3 Un paradoxe électromagnétique

On considère une particule chargée immobile dans un référentiel  $\mathcal{R}$  où règne un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_z \vec{e}_z$  (il n'est pas utile de considérer un champ avec également une coordonnée selon  $\vec{e}_y$ , le problème est déjà suffisamment général comme ceci).

1/ Quelle force la particule subit-elle ?

2/ Si l'on décide maintenant de travailler dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  qui se déplace à la vitesse  $\vec{V} = V \vec{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$  la particule n'est plus immobile. Elle devrait donc subir une force... Résoudre ce paradoxe.

## 4 Force entre deux électrons qui se déplacent côte à côte

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , deux électrons  $M_1$  et  $M_2$  se déplacent côte à côte à vitesse constante  $v$  sur deux droites parallèles distantes de  $d$ . Soit  $\mathcal{R}'$  le référentiel dans lequel ils sont immobiles.

1/ Calculer dans  $\mathcal{R}'$  les champs  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  créés par  $M_1$  au point  $M_2$ . En déduire la force qui s'exerce sur  $M_2$ .

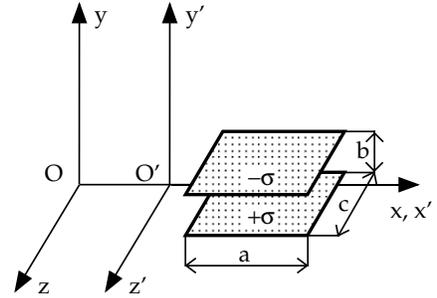
2/ Répondre aux mêmes questions dans  $\mathcal{R}$ . On calculera les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  créés par  $M_1$  au point  $M_2$  de deux manière différentes. On vérifiera la nature covariante de la force de Lorentz.

## 5 Condensateur mobile

Soient deux référentiels d'inertie  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Un même événement a pour coordonnées  $X^\mu = (ct, x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}$  et  $X'^\mu = (ct', x', y', z')$  dans  $\mathcal{R}'$ . L'origine  $(0, 0, 0, 0)$  correspond à un même événement dans les deux référentiels.  $\mathcal{R}'$  se déplace par rapport à  $\mathcal{R}$  avec la vitesse constante  $\vec{v}$  parallèle à l'axe  $Ox$  (transformation spéciale de Lorentz).

Un condensateur plan ( $b \ll a, c$ ) est immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Déterminer le champ  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de deux façons différentes :

1. par transformation du champ après avoir déterminé le champ dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
2. par un calcul direct en utilisant les théorèmes de Gauss et d'Ampère dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Il faudra déterminer avec un peu de soin les densités de charge et de courant dans ce référentiel.

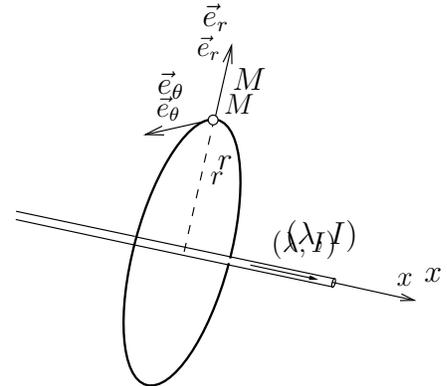


## 6 Courant dans un fil

• Démontrer (ou admettre si le temps manque) qu'un fil conducteur infiniment long et fin, assimilé à l'axe  $Ox$ , parcouru par un courant  $I$  et portant une charge linéique  $\lambda$ , crée, en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du fil, des champs électrique et magnétique ayant pour expression:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{e}_r, \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e}_\theta. \quad (2)$$

Dans ces expressions  $\lambda$  et  $I$  sont des quantités algébriques,  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont définis sur la figure ci-contre et ne dépendent pas du signe de  $\lambda$  ou  $I$ .



On considère un fil rectiligne d'axe  $Ox$ . Le fil contient des charges positives (des ions) immobiles correspondant à une charge électrique volumique  $\rho_i$  et une densité de courant  $\vec{J}_i = \vec{0}$ . Il y a aussi des électrons (charge  $\rho_e$ ) se déplaçant à la vitesse  $\vec{u} = u \vec{e}_x$  créant une densité de courant  $\vec{J}_e = \rho_e \vec{u}$ . Le fil étant globalement neutre, la densité totale de charge vaut  $\rho = \rho_i + \rho_e = 0$ .

1/ le quadri-courant **total** sera noté  $\underline{J}$ . Écrire ses composantes dans le référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel le fil est immobile.

2/ On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à vitesse constante  $V \vec{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Déterminer les densités de charge et de courant totales dans  $\mathcal{R}'$ .

3/ Dans  $\mathcal{R}$  une charge test  $q$  est immobile à une distance  $r$  du fil. Quelle force ressent-elle ?

4/ On va tenter de retrouver ce résultat en travaillant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

- (a) En utilisant les résultats de la question 1/, déterminer dans  $\mathcal{R}'$  les champs  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  créés par le fil. *Indication: on notera  $S$  la section du fil. Il est approprié d'introduire la charge linéique du fil dans  $\mathcal{R}'$  ( $\lambda' = \rho' S$ ) et le courant  $I' = J'_x S$  afin d'utiliser (2).*
- (b) Déterminer, toujours dans  $\mathcal{R}'$ , la force induite sur la particule (qui se déplace à vitesse constante dans  $\mathcal{R}'$ ).
- (c) Retrouver le même résultat en utilisant le concept de quadri-force (cf. exercice ?? du TD3) dont on rappelle qu'elle s'exprime comme  $\mathcal{F}^\mu = \gamma (\vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \vec{v}/c, \vec{F}_{\text{Lorentz}})$  où  $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

## 7 Effet Cherenkov

Les déchets radioactifs placés dans les piscines de stockage d'un réacteur nucléaire émettent un rayonnement bleuté. C'est cet effet que nous allons étudier dans ce problème. Il correspond à l'émission de photons par des électrons issus de désintégrations radioactives et a lieu lorsque les électrons se déplacent plus vite de la lumière **dans le milieu**.

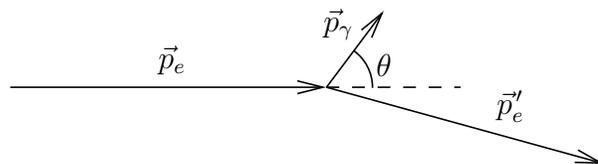
1/ Montrer que les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique peuvent être formellement ramenées aux équations dans le vide (en présence de charges et de courants) en remplaçant  $\epsilon_0$  par une valeur effective  $\epsilon_0^*$  qu'on exprimera en fonction de  $\epsilon_0$  et  $n$ . Quelle est la vitesse  $c^*$  de propagation de la lumière dans le milieu ?

2/ En déduire le potentiel électrique créé par une particule chargée  $P$  en mouvement à vitesse constante  $v$  dans le milieu diélectrique. *Indication* : adapter l'équation (??) en utilisant  $\epsilon_0^*$  et  $c^*$ .

- (a) Montrer que si la vitesse  $v$  est supérieure à une vitesse critique que l'on déterminera, ce potentiel diverge dans une direction  $\theta$  dont on donnera l'expression en fonction de  $c^*$  et  $v$  (l'angle  $\theta$  est défini sur la figure).
- (b) Reproduire la figure en l'adaptant au cas où  $v$  est supérieure à la vitesse critique. Montrer que pour la direction  $\theta$  qui vient d'être déterminée, le triangle  $P_rMP$  est rectangle en  $M$ .
- (c) En déduire qu'à l'instant  $t$ , le lieu des points  $M$  où le champ diverge est un cône de sommet  $P$  et d'axe  $\vec{v}/v$  dont on donnera l'ouverture angulaire en fonction de  $v$  et  $c^*$ .
- (d) Comment varie l'ouverture du cône quand la vitesse de la particule augmente ? Quelles sont ses valeurs extrémales ? On donnera les valeurs numériques en prenant  $n = 1.33$  (indice de l'eau).

3/ On va analyser le phénomène en utilisant des considérations cinématiques. La particule est un électron de masse  $m = 511 \text{ keV}/c^2$  dont on note la quadri-impulsion  $\underline{P}_e$ .

Lorsque l'effet Cherenkov se produit, l'électron émet un photon dans une direction faisant un angle  $\theta$  (*a priori* indéterminé) avec la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron incident. On notera  $\underline{P}'_e$  et  $\underline{P}_\gamma$  les quadri-impulsions après l'émission.



- (a) Écrire la forme que prend l'équation de propagation dans le milieu d'indice  $n$  en l'absence de charge et de courant. En déduire la relation de dispersion d'une onde plane pour laquelle les champs ont une dépendance spatio-temporelle de la forme  $\exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$ . Justifier alors que dans un milieu d'indice  $n$ , la quadri-impulsion d'un photon de pulsation  $\omega$  se propageant selon la direction  $\vec{u}$  ( $|\vec{u}| = 1$ ) s'écrit  $\underline{P}_\gamma = \hbar(\omega/c, n\omega \vec{u}/c)$ . Exprimer  $\underline{P}_\gamma^2$  et commenter le résultat.
- (b) Donner les expressions relativistes de l'énergie  $E_e$  et de l'impulsion  $\vec{p}_e$  initiales de l'électron en fonction de  $\gamma$ ,  $m$  et  $\beta$ .
- (c) Écrire la conservation de l'énergie-impulsion au cours de la réaction. En déduire une relation entre  $\underline{P}_\gamma^2$  et  $(\underline{P}_e \cdot \underline{P}_\gamma)$ , puis l'expression de l'angle d'émission du photon:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{2\gamma mc^2}(n^2 - 1) \right). \quad (3)$$

4/ L'électron se propage dans l'eau ( $n = 1.33$ ) de la piscine de stockage d'un réacteur nucléaire en émettant un photon bleu de longueur d'onde  $2\pi c/\omega = 0.46 \mu\text{m}$ . Justifier par une évaluation des ordres de grandeur<sup>1</sup> qu'on peut faire une approximation qui simplifie grandement l'expression (3).

- (a) En déduire que l'effet Cherenkov ne peut se produire que si  $v \geq c/n$ . Que vaut l'angle  $\theta$  correspondant ? Comparer avec le résultat de la question 2/.
- (b) Pour pousser la comparaison plus avant, on évaluera l'ordre de grandeur de l'incidence qu'a l'émission du photon sur l'impulsion de l'électron et on discutera l'approximation de translation rectiligne uniforme utilisée dans la question 2/.

<sup>1</sup>Pour les applications numériques on utilisera  $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$  où  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ .