

1 Résolution de quelques systèmes hyperboliques d'équations de conservation par la méthode des Volumes Finis

Les équations de conservation sont essentielles en physique puisqu'elles traduisent la conservation d'une quantité d'intérêt (masse, énergie, quantité de mouvement...) dans un domaine physique au cours du temps. Ce sont des équations aux dérivées partielles (EDP) pouvant s'écrire sous la forme générale¹ (appelée **forme conservative**)

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{U}(t, x) + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x)) &= \mathbf{S}(t, x, \mathbf{U}), & \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{D} \\ \mathbf{U}(0, x) &= \mathbf{U}^0(x) & \forall x \in \mathcal{D}\end{aligned}\tag{1}$$

avec

- $\mathcal{T} = [t_{min}, t_{max}]$ est l'intervalle de temps considéré;
- $\mathcal{D} = [x_{min}, x_{max}]$ est le domaine spatial;
- $\mathbf{U} : \mathcal{T} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^q$ est le vecteur des quantités conservées (appelées **variables conservatives**, q est le nombre de variables conservatives);
- $\mathbf{F} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une fonction appelée **flux**;
- $\mathbf{S} : \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ traduit une source (par exemple une source externe de chaleur dans le cas d'une équation de bilan d'énergie).

L'objectif de ce projet est de développer un petit code qui permet de résoudre un système de la forme (1) en utilisant la méthode des volumes finis (décrite plus bas). Vous pouvez choisir un des systèmes présentés dans ce document mais vous n'êtes pas obligés.

1.1 Dérivation d'une loi de conservation simple en 1D

Les équations de conservations se dérivent assez naturellement de principes physiques. Pour l'illustrer, prenons un exemple simple. on considère un tuyau monodimensionnel dans lequel s'écoule une espèce chimique de densité $c(t, x)$ (en kg/m), à une vitesse $a(t, x)$ (en m/s). On considère une portion $[x_L, x_R]$ du tuyau. La masse totale de l'espèce à un instant t dans cette portion est donnée par

$$\int_{x_L}^{x_R} c(t, x) dx.\tag{2}$$

En supposant que l'espèce étudiée ne réagit pas avec son environnement, elle ne peut pas être créée ni détruite. Par conséquent, la variation de la masse totale dans la portion de tuyau ne peut être due qu'au flux de particules traversant les extrémités du domaine x_L et x_R . Donc, en notant $F_L(t)$ et $F_R(t)$ le flux massique aux extrémités, la variation de la masse totale se calcule comme

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} c(t, x) dx = F_L(t) - F_R(t),\tag{3}$$

avec la convention que $F_*(t) > 0$ lorsque les particules se déplacent vers la droite, et $F_*(t) < 0$ si elles se déplacent vers la gauche. Reste maintenant à déterminer comment relier les flux $F_L(t)$ et $F_R(t)$ à $c(x, t)$. Ici, le flux f peut s'exprimer pour tout (t, x) comme le produit de la vitesse de l'écoulement par la densité

$$f(c, t, x) = a(t, x)c(t, x).\tag{4}$$

Si la vitesse d'écoulement est constante, alors le flux dépend uniquement de c et s'écrit $f(c) = ac$. L'équation (3) s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} c(t, x) dx = f(c(t, x_L)) - f(c(t, x_R)).\tag{5}$$

¹Pour ce projet, on se restreindra à des problèmes 1D

En supposant que les fonctions c et f sont suffisamment régulières², alors on a

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_R} c(t, x) dx = - \int_{x_L}^{x_R} \frac{\partial}{\partial x} f(c(t, x)) dx, \quad (6)$$

ou encore

$$\int_{x_L}^{x_R} \left(\frac{\partial}{\partial t} c(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(c(t, x)) \right) dx = 0. \quad (7)$$

Comme cette équation est vraie pour tout intervalle $[x_L, x_R]$, alors nécessairement

$$\frac{\partial}{\partial t} c(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(c(t, x)) = 0, \quad (8)$$

que l'on note succinctement

$$\partial_t c + \partial_x (f(c)) = 0. \quad (9)$$

1.2 Quelques exemples

On donne ici quelques exemples de systèmes de lois de conservations. Les termes sources ne sont pas décrits car ils dépendent généralement du problème spécifique à traiter. Toutes les équations ci-dessous peuvent être dérivées en faisant d'un bilan de masse, de quantité de mouvement et/ou d'énergie.

Transport de champs scalaires passifs par un champ de vitesse incompressible On se donne q champs scalaires c_1, c_2, \dots, c_q transportés par un champ de vitesse incompressible (\equiv constant en 1D)
a. La conservation de la masse de chaque espèce se traduit par

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} ac_1 \\ \vdots \\ ac_q \end{pmatrix} \quad (10)$$

Modèle LWR³ pour le trafic routier On modélise le trafic sur une route par un gaz de véhicules de densité ρ et de vitesse u . La conservation de la masse se traduit par

$$\mathbf{U} = (\rho) \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\rho u(\rho)) \quad (11)$$

Pour fermer le système, étant données la vitesse maximale autorisée u_m et la densité maximale ρ_m , on se donne une loi d'état reliant la vitesse u à la densité ρ de la forme $u(\rho) = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$.

Acoustique linéaire Les équations de l'acoustique linéaire décrivent l'évolution des variations de densité et de vitesse d'un gaz (ρ, u) autour d'un état de référence (ρ_0, u_0) . Elles sont obtenues par linéarisation des équations d'Euler pour les fluides compressibles autour de (ρ_0, u_0) . La conservation de la masse et de la quantité de mouvement se traduisent par

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 \\ c^2 & u_0 \end{pmatrix} \mathbf{U} \quad (12)$$

La pression est obtenue par une loi d'état simple $p(\rho) = c^2 \rho$ où c est la vitesse du son dans le gaz.

Équations de Saint-Venant pour les écoulements en eaux peu profondes Les équations de Saint-Venant décrivent l'évolution de la hauteur h et de la vitesse horizontale moyenne u d'un écoulement à surface libre peu profond sous l'effet de la gravité. Elles sont obtenues par simplification des équations d'Euler, et traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement du fluide

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} j \\ \frac{j^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

où g est l'accélération de la pesanteur et $j = hu$ le débit volumique. On peut ajouter des termes sources pour modéliser une topographie (faiblement) variable, des effets visqueux (par une loi de frottement), ou encore la force de Coriolis pour une modélisation océanique à grande échelle.

²Généralement, la solution peut faire apparaître des discontinuités (e.g. une onde de choc en dynamique des gaz). Dans ce cas, on peut définir une notion de dérivée faible, qui a un sens pour des fonctions discontinues.

³pour Lighthill-Whitham-Richards, du nom des mathématiciens qui l'ont décrit pour la première fois en 1955 et 1956.

Équations d'Euler pour la dynamique des fluides parfaits compressibles Les équations d'Euler décrivent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale d'un fluide parfait compressible. Elles sont obtenues par une simplification des équations de Navier-Stokes compressibles dans le cas où les effets de viscosité sont négligeables.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ j \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} j \\ \frac{j^2}{\rho} + p \\ \frac{j}{\rho}(\epsilon + p) \end{pmatrix} \quad (14)$$

où ρ est la densité, $j = \rho u$ est la quantité de mouvement volumique, $\epsilon = (e + \frac{1}{2}\rho u^2)$ est l'énergie totale volumique (e est l'énergie interne volumique), et p est la pression. Pour fermer ce système (3 équations, 4 inconnues), on lui adjoint une loi d'état qui relie la pression aux autres variables. Par exemple pour un gaz parfait, $p = e(\gamma - 1)$ où γ est le coefficient adiabatique. On peut également ajouter des termes sources liés à une production/puit d'énergie (source chaude/froide), ou à des variation de section droite du canal d'écoulement.

Ces équations peuvent se simplifier pour des systèmes isothermes ou isentropiques

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ j \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} j \\ \frac{j^2}{\rho} + p \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

avec les lois d'état respectives $p(\rho) = \rho c^2$ et $p(\rho) = \kappa \rho^\gamma$.

1.3 Remarques

En pratique, on doit travailler sur un domaine spatial fini (un segment $[a, b]$ en 1D). Dès lors, le système (1) doit être enrichi de conditions aux bords adaptées. Dans ce projet, on pourra simplement considérer une condition aux limites périodique, qui s'écrit

$$\mathbf{U}(t, x_{min}) = \mathbf{U}(t, x_{max}). \quad (16)$$

Les systèmes d'équations de la forme (1) ont tous la propriété de propager des ondes à vitesse finie, et les vitesses de propagations sont données par les valeurs propres de la jacobienne du flux $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$. Cela implique notamment que $\mathbf{U}(t + \delta t, x)$ ne dépend que des valeurs dans l'ensemble

$$\{\mathbf{U}(t, x'), x' \in [x - c\delta t, x + c\delta t]\} \quad \text{où} \quad c = \max_i |\lambda_i|. \quad (17)$$

Les systèmes de la forme (1) peuvent faire apparaître des discontinuités dans la solution (aussi appelés chocs). Dès lors, les dérivées spatiales ne sont plus définies (au sens usuel), et il convient plutôt de travailler avec une forme intégrale des équations. C'est l'idée à la base de la méthode des volumes finis.

1.4 Méthode des volumes finis en 1D

On se donne un maillage régulier de n_x cellules $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de centre x_i et de longueur Δx . On note $\mathbf{U}_i(t)$ la valeur moyenne de \mathbf{U} dans la cellule C_i au temps t . En intégrant l'équation (1) sur une cellule C_i , et en utilisant le théorème de la divergence pour le terme de flux, il vient

$$\partial_t \mathbf{U}_i(t) + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2})) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i-1/2}))}{\Delta x} = \mathbf{S}_i(t). \quad (18)$$

Cette formulation est exacte, et traduit le fait que la variation de \mathbf{U} dans une cellule est égale à la différence entre le flux entrant et le flux sortant (si on oublie la source). Cependant elle fait apparaître la valeur de la solution aux bords de chaque cellule. Comme aucune condition de continuité n'est imposée entre deux cellules, la solution n'est pas définie aux interfaces. L'idée est alors de remplacer le flux entre deux cellules par une valeur approchée que l'on note $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}(t)$. Comme l'information se propage à vitesse finie, il est raisonnable de supposer que le flux à l'interface entre deux cellules ne dépend que de la valeur de la solution dans ces cellules

$$\mathbf{F}_{i-1/2}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{U}_{i-1}(t), \mathbf{U}_i(t)) \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{i+1/2}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{U}_i(t), \mathbf{U}_{i+1}(t)) \quad (19)$$

Avec ces notations, le problème se réécrit

$$\partial_t \mathbf{U}_i(t) = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}(t) - \mathbf{F}_{i-1/2}(t)}{\Delta x} + \mathbf{S}_i(t), \quad (20)$$

qui est un système d'équations différentielles ordinaires qu'on peut résoudre avec la méthode de notre choix, par exemple avec la méthode d'Euler explicite

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t \mathbf{S}_i^n \quad (21)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la fonction \mathcal{F} qui approche le flux, et le tour est joué.

1.5 Choix du flux numérique

En pratique, la fonction \mathcal{F} doit vérifier des propriétés minimales, notamment la propriété de consistance

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}), \quad (22)$$

qui assure que le flux numérique tend vers le flux physique lorsque $(U_R - U_L)$ tend vers zéro.

Il existe beaucoup de flux numériques qui vérifient cette condition. En pratique, on considèrera deux flux numériques populaires et simples à calculer.

Le flux de Rusanov⁴ qui peut s'écrire

$$\mathcal{F}^{RUS}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)) - \frac{c}{2}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \quad (23)$$

avec

$$c = \max_{K=L,R} \left(\max_{i \in \{1, \dots, q\}} |\lambda_i^K| \right), \quad (24)$$

Le flux HLL⁵ qui est une généralisation du flux de Rusanov, et qui s'écrit

$$\mathcal{F}^{HLL}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) & \text{si } 0 \leq c_1 \\ \frac{c_2 \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - c_1 \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) & \text{si } c_1 < 0 \leq c_2 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) & \text{si } c_2 \leq 0 \end{cases} \quad (25)$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= \min_{K=L,R} \left(\min_{i \in \{1, \dots, q\}} \lambda_i^K \right) \\ c_2 &= \max_{K=L,R} \left(\max_{i \in \{1, \dots, q\}} \lambda_i^K \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Dans les formules précédentes, λ_i^K est la i -ème valeur propre de la jacobienne du flux dans la cellule K $\mathbf{JF}(\mathbf{U}_K)$, et correspond donc à la vitesse de propagation d'une onde. Moralement, le flux de Rusanov approche le flux physique en se basant sur l'onde qui se propage le plus vite en valeur absolue. Le flux HLL utilise les deux ondes extrémales, et est donc généralement plus précis que le flux de Rusanov, notamment en cas de choc.

Par ailleurs, ces vitesses de propagations sont très importantes, puisqu'elles vont aussi contraindre le choix du pas temps. Si on note $|\lambda|_{max}$ la plus grande vitesse de propagation (en valeur absolue) dans le domaine, la contrainte sur le pas de temps s'écrit

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\lambda|_{max}}. \quad (27)$$

Cette condition est généralement appelée **condition CFL**⁶, et traduit le fait qu'une onde n'a pas le droit de se propager sur plus d'une cellule en une durée Δt . Choisir un pas de temps qui ne respecte pas la condition CFL entraîne la plupart du temps une instabilité du schéma numérique, et des oscillations dont l'amplitude augmente très vite. Pour assurer la robustesse de la méthode, il est d'usage de recalculer $|\lambda|_{max}$ à chaque pas de temps et de choisir un Δt respectant la condition CFL.

⁴pour V. V. Rusanov, du nom du mathématicien qui l'a décrit pour la première fois en 1961

⁵pour A. Harten, P. D. Lax et B. van Leer, du nom des mathématiciens qui l'ont décrit pour la première fois en 1981

⁶pour Courant-Friedrichs-Lewy, du nom des mathématiciens qui l'ont décrite pour la première fois en 1928.

1.6 Prise en compte des conditions aux bords

La méthode des volumes finis permet de prendre en compte les conditions aux bords de manière assez simple : il suffit d'imposer une valeur dans une cellule fictive en dehors du domaine de l'autre côté du bord, puis de calculer le flux numérique en utilisant cette valeur. Par exemple pour des conditions aux limites périodiques (16), on impose:

$$U_{-1} = U_N \text{ à gauche} \quad \text{et} \quad U_{N+1} = U_0 \text{ à droite.} \quad (28)$$

où l'on a supposé que le domaine est divisé en $N + 1$ cellules numérotées de 0 à N .

1.7 Mise en œuvre

La procédure de résolution consiste à chaque pas de temps à:

1. Calculer $|\lambda|_{max}$ et mettre à jour le pas de temps avec la condition CFL;
2. Parcourir les interfaces entre les cellules pour calculer les flux numériques et ajouter leur contribution au membre de droite
3. Ajouter la contribution de la source au membre de droite (s'il y a une source)
4. Faire un pas d'euler explicite pour calculer la solution au temps suivant
5. Sauvegarder la solution dans un fichier
6. Recommencer

1.8 Exemple de solution pour les équations de Saint-Venant avec topographie

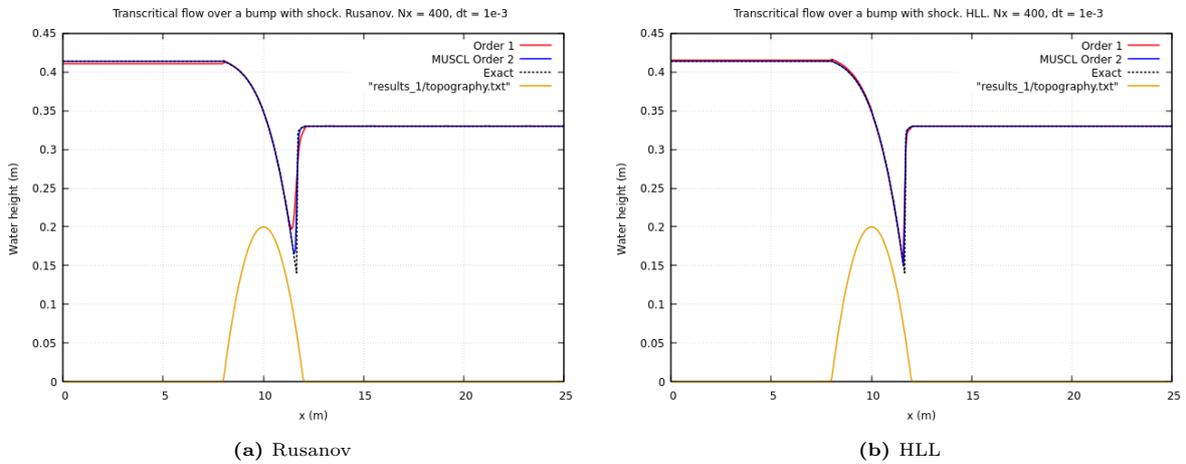


Figure 1 – Tracé de la surface libre pour un écoulement transcritique avec choc au dessus d'une bosse (solution exacte et solutions numériques calculées avec les flux de Rusanov et HLL). L'écoulement fait apparaître un choc (ressaut hydraulique) en aval de la bosse, qui est correctement capturé par la méthode numérique.

1.9 Pour aller plus loin

Sur la méthode des volumes finis, on pourra se référer aux livres

- E.F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction (Third Edition)*;
- Randall J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*.

Le premier se concentre principalement sur la résolution des équations d'Euler, tandis que le second explore de nombreux systèmes, mais les deux sont assez complémentaires. Ils contiennent beaucoup d'informations sur l'analyse mathématique des systèmes hyperboliques, les méthodes numériques associées (principalement les Volumes Finis) et leur mise en oeuvre algorithmique. Il existe également de nombreuses ressources en libre accès sur internet.